

## СПЕКТР ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ

В. І. Векерик, В. М. Мойсишин, К. Г. Левчук

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 42153,  
e-mail: public@nung.edu.ua, kgl.impr.nan@gmail.com

*Запропоновано математичну модель параметричних коливань бурильної вежі з урахуванням всіх її елементів, а також залежність процесів буріння від параметрів елементів механічної системи. Особливу увагу звернуто на дослідження частотного спектру коливань бурильної колони. У процесі моделювання динаміки бурильної установки враховано параметри основи вежі, лебідки, талевої системи (кронблока, канатів, талевого блока). Наведено приклад комп'ютерного моделювання частотного спектра математичної моделі поздовжніх коливань бурильної колони із заданими параметрами.*

Ключові слова: бурова вежа, частота, спектр, талева система, частотне рівняння, кронблок, хвильова теорія, метод Фур'є

*Предложена математическая модель параметрических колебаний буровой вышки с учётом всех её элементов, а также их влияние на процессы бурения. Основное внимание обращено на исследование частотного спектра колебаний бурильной колонны. В процессе моделирования динамики буровой установки учтены параметры основания вышки, лебёдки, талевой системы (кронблока, канатов, талевого блока). Приведён пример компьютерного моделирования частотного спектра математической модели продольных колебаний бурильной колонны с заданными параметрами*

Ключевые слова: буровая вышка, частота, спектр, талевая система, частотное уравнение, кронблок, волновая теория, метод Фурье

*In this article discussed a mathematical model of parametric oscillations of the rig with all its elements, as well as their influence on the process of drilling. The attention is focused on the study of vibration frequency spectrum of the drill string. The modeling takes into account the parameters base tower, winch, block and tackle system (crown block, ropes, traveling block). As example, this done computer simulation of a mathematical model with the given parameters.*

Keywords: derrick, the frequency spectrum, traveling system, the frequency equation, crownblock, the wave theory, Fourier method

## АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ

Переважна більшість дослідників при складанні математичної моделі та дослідження руху бурильної колони її верхню частину розглядають у вигляді зосередженої маси з еквівалентною пружиною [1, 2]. Дослідження таким чином змодельованих систем не дозволяє враховувати основні параметри конструкції бурової вежі, а також оцінити вплив цих параметрів на динамічні характеристики роботи бурильного інструмента та показники роботи долота у свердловині.

Для вивчення динаміки та ефективності роботи шарошкового долота, а також взаємодії бурильної колони зі стінкою свердловини під час буріння виникла необхідність створення узагальненої моделі динамічного режиму роботи механічної системи «шарошкове долото – бурильна колона – бурова вежа» [1, 3]. Тому подальший розвиток таких моделей для можливості оцінювання впливу параметрів механічних систем на процес буріння має значний науковий і практичний інтерес.

Основну увагу в запропонованій статті відведено вивченню спектру поздовжніх коливань елементів бурової установки. Розв'язання поставленої задачі проведено на основі хвильової теорії та теорії локальних деформацій. З аналізу отриманих результатів приходимо до висновку, що поломки бурового обладнання можуть бути

зумовлені наявністю даних коливань. Таким чином, проведені дослідження дозволяють підвищити техніко-економічні показники буріння на основі аналізу динамічних характеристик поздовжніх коливань бурильної колони (БК).

Метою цієї роботи є розробка математичної моделі бурильної колони з використанням аналітичних і чисельних методів дослідження динамічних систем, сучасних обчислювальних засобів і спеціалізованих математичних пакетів для подальшого поширення на дослідження аналогічних багатомасових систем.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

**Задача дослідження** – удосконалення математичної моделі динаміки поздовжніх коливань бурильної колони (БК). Дослідження впливу технологічних параметрів бурової вежі на частоту та інтенсивність коливань її елементів.

**Об'єкт дослідження** – механічна система «шарошкове долото – бурильна колона – бурова вежа».

**Предмет дослідження** – динамічні характеристики поздовжніх коливань бурильної колони при поглибленні свердловини шарошкови-ми долотами.

**Методи дослідження** – теорія локальних деформацій, аналітичний метод Фур'є для розв'язування задач математичної фізики (хвильо-

вого рівняння), методи математичного і фізичного моделювання із застосуванням комп'ютерних математичних пакетів.

Вивчення динамічних режимів коливального руху БК ґрунтується на застосуванні чисельних методів розв'язку та методів математичного і функціонального аналізу. Для розробки практичних рекомендацій раціонального вибору технологічних й геометричних параметрів БК використано методи аналізу результатів моделювання динамічних процесів у буринній колоні [4].

Розрахункову схему бурової вежі для вивчення динаміки БК подано на рис. 1. Вона включає основу 1, встановлену на поверхні пружно-в'язкого ґрунту, еквівалентних стрижнів вежі, кронблок 3 і талевий блок 4. Шківні 5 блоків з'єднані між собою канатом 6. Будемо вважати, що маса основи бурової вежі рівномірно розподілена в її об'ємі по поверхні, талеві канати 6 вертикальні та паралельні між собою, страховальні відтяжки не впливають на зміщення перерізів вежі.

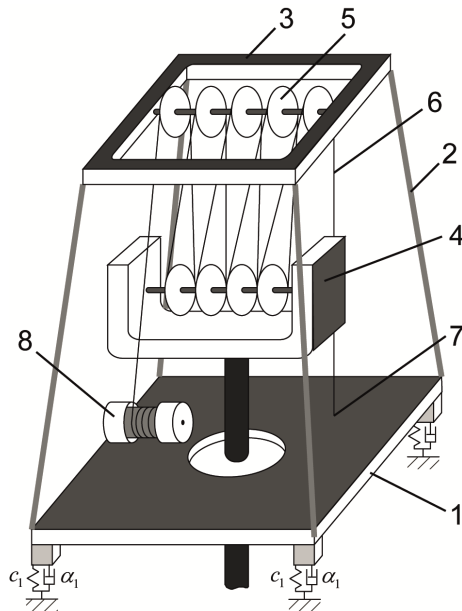


Рисунок 1 – Розрахункова схема бурової вежі

Скориставшись методом перерізів розчленуємо механічну систему бурової вежі на окремі частини по внутрішніх в'язях. У свою чергу дію в'язей замінимо реакціями в'язей.

Основу бурової вежі встановлено на пружно-в'язкому ґрунті з коефіцієнтами пружності  $c_1$  і в'язкого опору  $\alpha_1$ . На основу, що має масу  $m_1$ , діють сили ваги  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$  і пружності  $\vec{S} = -c_s [\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)] \operatorname{cosec} \alpha$  зі сторони стрижнів, нахилених під кутом  $\alpha$  до горизонту, сила натягу  $\vec{T}_1 = -c_{k1} [\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)]$  мертвого кінця талевого каната 7, а також реакція  $\vec{R}_{леб}$  лебідки 8, котра має дві складові горизонтальну  $\vec{R}_{леб}^x$  і вертикальну  $\vec{R}_{леб}^y$  (рис. 2). Запишемо основне рівняння динаміки основи вежі

$$m_1 \ddot{w}_1(t) + \alpha_1 \dot{w}_1(t) + c_1 w_1(t) = m_1 g - R_{леб}^y - (c_{k1} + 4c_s \sin \alpha) [w_1(t) - w_2(t)], \quad (1)$$

де  $\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)$  – деформація стрижнів і каната, прикріпленого до основи;

$$\dot{w}_1(t) = \frac{\partial w_1(t)}{\partial t}; \quad \ddot{w}_1(t) = \frac{\partial^2 w_1(t)}{\partial t^2};$$

$$c_s = \frac{E_s F_s}{L_s \sin \alpha}, \quad c_{k1} = \frac{E_{кан} F_{кан}}{L_s \sin \alpha} \text{ – жорсткості,}$$

$F_s, F_{кан}$  – площі поперечних перерізів;

$E_s, E_{кан}$  – модулі пружності стрижнів і каната;

$L_s$  – довжина стрижнів.

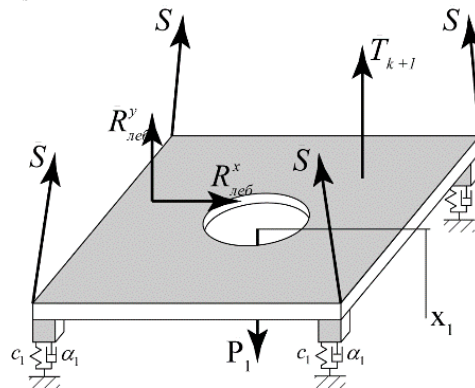


Рисунок 2 – Розрахункова схема основи бурової вежі

Гальмівний барабан лебідки (рис. 3) масою  $m_\sigma$  здійснює плоскопаралельний рух під дією гальмівного моменту  $\vec{M}$ , сил ваги  $\vec{P}_\sigma = m_\sigma \vec{g}$ , вертикальної складової реакції основи вежі  $\vec{R}_{леб}^y$  і пружності кінця каната  $\vec{T}_{k+1} = -c_{k1} [\vec{w}_1(t) - \vec{w}_2(t)]$ , що з нього сходять. Диференціальні рівняння руху лебідки мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} m_\sigma \ddot{w}_1(t) &= m_\sigma g + R_{леб}^y - c_{k1} [w_1(t) - w_2(t)]; \\ J_\sigma \ddot{\phi}_\sigma(t) + J_\sigma \dot{\phi}_\sigma(t) &= \\ &= -c_{k1} [w_1(t) - w_2(t) + \phi_\sigma(t) r_\sigma] r_\sigma - M, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $\phi_\sigma(t)$  – кут повороту барабана лебідки в радіанах,

$$\ddot{\phi}_\sigma(t) = \frac{d^2 \phi_\sigma(t)}{dt^2}, \quad \dot{\phi}_\sigma(t) = \frac{d \phi_\sigma(t)}{dt},$$

$J_\sigma = J_0 + m_{кан} l(t) r_\sigma^2$  – момент інерції барабана лебідки;

$J_0$  – момент інерції барабана лебідки без каната;

$m_{кан}$  – маса 1 м каната;

$l(t) = l_0 - r_\sigma \phi_\sigma(t)$  – довжина каната на лебідці,

$l_0$  – довжина каната, намотаного на лебідку на початку спуску БК,

$r_\sigma$  – радіус барабана лебідки.

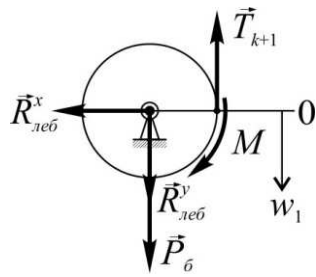


Рисунок 3 – Розрахункова схема лебідки

На кронблок масою  $m_2$  діють сили ваги  $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$  і пружності  $\vec{S} = -c_s [\bar{w}_1(t) - \bar{w}_2(t)] \text{cosec } \alpha$ , реакції шківів  $\vec{R}_{2i-1}$ ,  $i = \overline{1; 0,5(k+1)}$  на вісь кронблока (рис. 4). Основне рівняння динаміки кронблока має вигляд

$$m_2 \ddot{w}_2(t) = m_2 g + 4c_s [w_1(t) - w_2(t)] \sin \alpha + \sum_{i=1}^{0,5(k+1)} R_{2i-1}, \quad (3)$$

де  $\ddot{w}_2(t) = \frac{\partial^2 w_2(t)}{\partial t^2}$ .

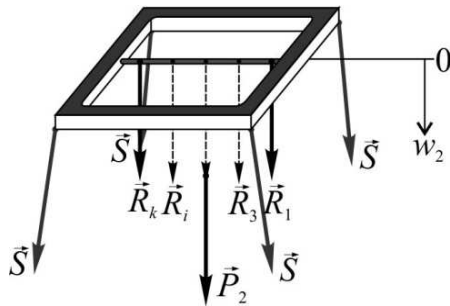


Рисунок 4 – Розрахункова схема кронблока бурової вежі

На талевий блок масою  $m_3$  діють сили ваги  $\vec{P}_3 = m_3 \vec{g}$  і поздовжня сила у поперечному перерізі першої ділянки БК  $\vec{F}_1(0,t)$ , реакції шківів  $\vec{R}_{2i}$ ,  $i = \overline{1; 0,5(k-1)}$  на його вісь (рис. 5). Запишемо основне диференціальне рівняння руху талевого блока

$$m_3 \left[ \ddot{w}_3(t) + \ddot{\varphi}_\delta(t) \frac{r_\delta}{k-1} \right] = m_3 g - EF_1 u_1'(0,t) - \sum_{i=1}^{0,5(k-1)} R_{2i}, \quad (4)$$

де  $\ddot{w}_3(t) = \frac{\partial^2 w_3(t)}{\partial t^2}$ ;

$E$  і  $F_1$  – модуль пружності (Юнга) і площа поперечного перерізу першої труби БК;

$u_1'(0,t) = \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x_1}$  – швидкість деформації верхнього кінця БК,

$k$  – кількість шківів талевої системи.

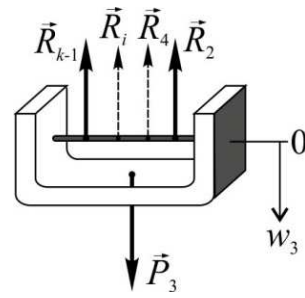


Рисунок 5 – Розрахункова схема талевого блока

Шківні кронблока і талевого блока масою  $m_i^{ук}$  здійснюють плоскопаралельний рух під дією сил ваги  $\vec{P}_i = m_i \vec{g}$ , реакції блоків  $\vec{R}_i$  і пружності канатів  $\vec{T}_i$ ,  $i = \overline{1; k}$  (рис. 6). Складемо диференціальні рівняння руху шківів кронблока ( $i = \overline{2; 0,5k}$ ):

$$m_1^{ук} \ddot{w}_2(t) = m_1 g - R_1 + c_{кан} [w_1(t) - 2w_2(t) + w_3(t)];$$

$$J_1^{ук} \ddot{\varphi}_1^{ук}(t) = 0,$$

$$m_{2i-1}^{ук} \ddot{w}_2(t) = m_{2i-1} g - R_{2i-1} - c_{кан} [w_3(t) - w_2(t)];$$

$$J_{2i-1}^{ук} \ddot{\varphi}_{2i-1}^{ук}(t) = 2c_{кан} \frac{i-1}{k-1} \varphi_\delta(t) r_\delta,$$

$$m_k^{ук} \ddot{w}_2(t) = m_k g - R_k + c_{кан} [w_1(t) - 2w_2(t) + w_3(t)];$$

$$J_k^{ук} \ddot{\varphi}_k^{ук}(t) = c_{кан} \varphi_\delta(t) r_\delta,$$

талевого блока ( $i = \overline{1; 0,5(k-1)}$ ):

$$m_{2i} \left[ \ddot{w}_3(t) + \ddot{\varphi}_\delta(t) \frac{r_\delta}{k-1} \right] = m_{2i} g + R_{2i} - 2c_{кан} [w_3(t) - w_2(t)]; \quad (6)$$

$$J_{2i}^{ук} \ddot{\varphi}_{2i}^{ук} = c_{кан} \frac{2i-1}{k-1} \varphi_\delta(t) r_\delta.$$

де  $w_3(t) - w_2(t)$  – деформація каната;

$\varphi_i^{ук}$  – кут повороту шківів (рис. 7) талевої системи в радіанах;

$J_i^{ук}$  – момент інерції цих шківів;

$r_i^{ук}$  – радіуси шківів ( $i = \overline{1; k}$ );

$c_{кан} = \frac{E_{кан} F_{кан}}{L(t)}$  – жорсткість канатів талевої системи;

$L(t) = L_0 + \varphi_\delta(t) \frac{r_\delta}{k-1}$  – відстань між кронблоком і талевим блоком ( $L_0$  – початкова відстань між цими блоками).

При складанні динамічних рівнянь руху елементів механічної системи були використані кінематичні залежності між лінійними та кутовими переміщеннями, зображеними на рис. 7. Шляхом їх диференціювання за часом були встановлені залежності між швидкостями і пришвидшеннями руху основи, кронблока, талевого блока і шківів.

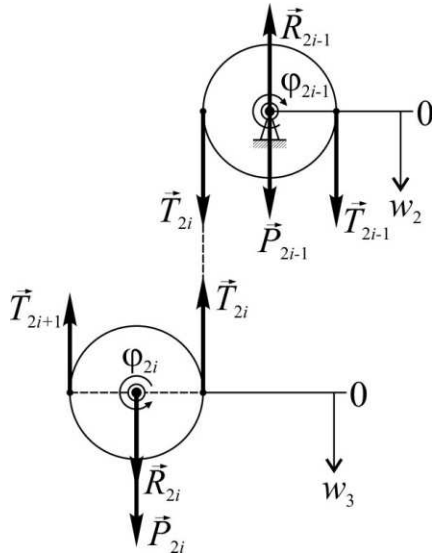


Рисунок 6 – Схеми навантаження шківів кронблока і талевого блока

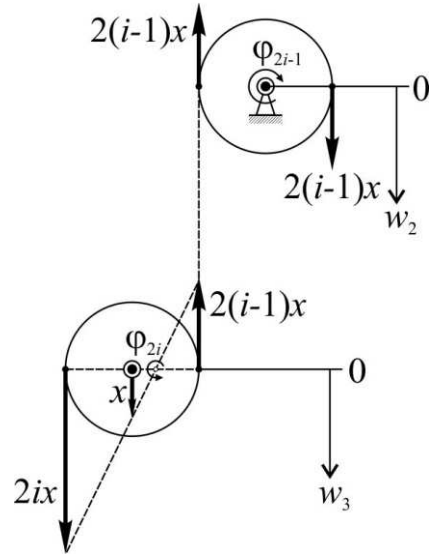


Рисунок 7 – Кінематика шківів талевої системи

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_{\delta}) \ddot{w}_1(t) + \alpha_1 \dot{w}_1(t) + c_1 w_1(t) &= (m_1 + m_{\delta}) g - \frac{2}{L_s} \left( 2E_s F_s + \frac{E_{кан} F_{кан}}{\sin \alpha} \right) [w_1(t) - w_2(t)]; \\ \left[ J_0 + m_{кан} (l_0 - \varphi_{\delta}(t) r_{\delta}) r_{\delta}^2 \right] \ddot{\varphi}_{\delta}(t) - m_{кан} r_{\delta}^3 \dot{\varphi}_{\delta}^2 &= -\frac{E_{кан} F_{кан}}{L_s \sin \alpha} [w_1(t) - w_2(t) + \varphi_{\delta}(t) r_{\delta}] r_{\delta} - M; \\ \left[ m_2 + 0,5(k+1)m \right] \ddot{w}_2(t) &= [m_2 + 0,5(k+1)m] g + 4 \frac{E_s F_s}{L_s} [w_1(t) - w_2(t)] + \\ + \frac{E_{кан} F_{кан}}{L_s \sin \alpha} [2w_1(t) - 4w_2(t) + 2w_3(t) + \varphi_{\delta}(t) r_{\delta}] - \frac{E_{кан} F_{кан} (k-3)}{L_0 + \frac{\varphi_{\delta}(t) r_{\delta}}{k-1}} [w_2(t) - w_3(t)]; \\ \left[ m_3 + 0,5(k-1)m \right] \left( \dot{w}_3(t) + \ddot{\varphi}_{\delta}(t) \frac{r_{\delta}}{k-1} \right) &= [m_3 + 0,5(k-1)m] g - EF_1 u_1'(0, t) + \\ + \frac{E_{кан} F_{кан} (k-1)}{L_0 + \frac{\varphi_{\delta}(t) r_{\delta}}{k-1}} [w_2(t) - w_3(t)]. \end{aligned} \right\} (7)$$

Взявши до уваги, що в реальних бурових установках радіуси і маси шківів талевої системи однакові:  $m_i^{шк} = m$ ,  $r_i^{шк} = r$  ( $i = \overline{1, k}$ ), рівняння (1)-(6) зводяться до наступної системи диференціальних рівнянь (7).

Початкові умови, яким повинні задовольняти розв'язки системи диференціальних рівнянь (7), можна знайти зі статичного розв'язку поставленої задачі

$$\begin{aligned} (m_1 + m_{\delta}) g &= \frac{2}{L_s} \left( 2E_s F_s + \frac{E_{кан} F_{кан}}{\sin \alpha} \right) [w_1(0) - w_2(0)]; \\ \frac{E_{кан} F_{кан}}{L_s \sin \alpha} [w_1(0) - w_2(0) + \varphi_{\delta}(0) r_{\delta}] r_{\delta} &= -M; \\ [m_2 + 0,5(k+1)m] g &= \frac{E_{кан} F_{кан} (k-3)}{L_0 + \frac{\varphi_{\delta}(0) r_{\delta}}{k-1}} \times \\ \times [w_2(0) - w_3(0)] - 4 \frac{E_s F_s}{L_s} [w_1(0) - w_2(0)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{E_{кан} F_{кан}}{L_s \sin \alpha} [2w_1(0) - 4w_2(0) + 2w_3(0) + \varphi_{\delta}(0) r_{\delta}]; \\ [m_3 + 0,5(k-1)m] g &= \\ = EF_1 u_1'(0, 0) - \frac{E_{кан} F_{кан} (k-1)}{L_0 + \frac{\varphi_{\delta}(0) r_{\delta}}{k-1}} [w_2(0) - w_3(0)]. \end{aligned}$$

чисельним методом.

Бурильну колону подамо у вигляді  $n$  стрижнів циліндричної форми довжинами  $l_j$  з поперечними перерізами  $F_j$ , модулем пружності  $E$  (Юнга) і густиною матеріалу  $\rho_j$ , з якого виготовлені бурильні труби. Будемо вважати, що всі сили діють вздовж осей цих стрижнів  $O_j x_j$  з початком у точках  $O_j$  – верхніх перерізах БК, а поперечні перерізи стрижнів переміщуються поступально вздовж зазначених осей. Це припущення справедливе, якщо поперечні розміри стрижнів малі порівняно з їхніми дов-

жинами, а також величини сил, що діють вздовж осей стрижнів, незначні<sup>1</sup>.

Рівняння руху ділянок БК у поздовжньому напрямку подамо у вигляді

$$\ddot{u}_j(x_j, t) + 2h_j \dot{u}_j(x_j, t) - \frac{E}{\rho_j} u_j''(x_j, t) = g, \quad (8)$$

де  $j = \overline{1, n}$  – номер ділянки;

$$2h_j = \frac{\alpha_j}{\rho_j F_j l_j} - \text{зведений коефіцієнт опору}$$

( $\alpha_j$  – коефіцієнт опору);

$$\ddot{u}_j(x_j, t) = \frac{\partial^2 u_j(x_j, t)}{\partial t^2};$$

$$\dot{u}_j(x_j, t) = \frac{\partial u_j(x_j, t)}{\partial t};$$

$$u_j''(x_j, t) = \frac{\partial^2 u_j(x_j, t)}{\partial x_j^2}.$$

### ГРАНИЧНІ УМОВИ

Граничні умови складаються з початкових і крайових умов руху бурової вежі.

Запишемо крайові умови БК. Рух верхнього кінця ( $x_1 = 0$ ) зумовлена поступальним рухом елементів талевої системи  $w_3(t)$  (рис. 5)

$$u_1(0, t) = w_3(t); \quad \dot{u}_1(0, t) = \dot{w}_3(t);$$

$$EF_1 u_1'(0, t) = E_{кан} F_{кан} w_3'(t). \quad (9)$$

На межах сусідніх ділянок БК деформації однакові, а сили пружності врівноважені силами взаємодії БК з промивальною рідиною ( $j = \overline{1, n-1}$ )

$$u_j(l_j, t) = u_{j+1}(0, t); \quad (10)$$

$$EF_j u_j'(l_j, t) =$$

$$= EF_{j+1} u_{j+1}'(0, t) + qg(F_{j+1} - F_j) \sum_{i=1}^j l_j, \quad (11)$$

де  $q$  – густина промивальної рідини.

На нижньому кінці БК крайова умова має вигляд:

$$EF_n u_n'(l_j, t) = qg F_n \sum_{i=1}^n l_i. \quad (12)$$

Далі запишемо початкові умови руху БК. Рівняння балансу сил для довільного перерізу першої секції труб  $x_1$  має вигляд:

$$-EF_1 u_1'(x_1, 0) + g[\rho_1 F_1 (l_1 - x_1) + \rho_2 F_2 l_2 + q(F_2 - F_1)l_1 - qF_2(l_1 + l_2)] + F_p = 0,$$

після інтегрування якого з урахуванням початкової умови згідно (9)  $u_1(0, 0) = w_3(0)$

$$u_1(x_1, 0) = a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2, \quad (13)$$

де  $a_{10} = w_3(0)$ ;

$$a_{11} = \frac{1}{EF_1} [g(\rho_1 F_1 l_1 + \rho_2 F_2 l_2 - q(F_1 l_1 - F_2 l_2)) + F_p];$$

$$a_{12} = -\frac{\rho_1}{2E} g.$$

Для другої секції БК маємо

$$-EF_2 u_2'(x_2, 0) + g[\rho_2 F_2 (l_2 - x_2) - qF_2 (l_2 + l_1)] + F_p = 0,$$

після інтегрування якого з урахуванням початкової умови згідно (9)  $u_2(0, 0) = u_1(l_1, 0)$

$$u_2(x_2, 0) = a_{20} + a_{21}x_2 + a_{22}x_2^2, \quad (14)$$

де  $a_{20} = u_1(l_1, 0)$ ;

$$a_{21} = \frac{g}{E} (\rho_2 l_2 + q(l_2 + l_1)) + F_p;$$

$$a_{22} = -\frac{\rho_2}{2E} g.$$

Аналогічно

$$u_j(x_j, 0) = a_{j0} + a_{j1}x_j + a_{j2}x_j^2, \quad j = \overline{3, n}. \quad (15)$$

В момент розчеплення замкової пари ударного механізму [6], який включають до компонування при ліквідуванні прихоплень бурильної колони, швидкості переміщень перерізів прийемо рівними нулю ( $j = \overline{1, n}$ )

$$\dot{u}_j(x_j, 0) = 0. \quad (16)$$

### ЧАСТОТНИЙ СПЕКТР КОЛИВАНЬ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ

Оскільки рівняння системи диференціальних рівнянь (8) є неоднорідними, що задовольняють неоднорідні крайові умови (9)-(11), то розв'язок цієї системи шукають у вигляді суми

$$u_j(x_j, t) = u_{1j}(x_j, t) + u_{2j}(x_j, t). \quad (17)$$

Рівнянням частот коливань БК отримують із загального розв'язку системи однорідних диференціальних рівнянь, що відповідають системі неоднорідних рівнянь (8)

$$\ddot{u}_{1j}(x_j, t) + 2h_j \dot{u}_{1j}(x_j, t) - \frac{E}{\rho_j} u_{1j}''(x_j, t) = 0,$$

$$j = \overline{1, n} \quad (18)$$

з однорідними крайовими умовами, що відповідають неоднорідним (9)-(12)

<sup>1</sup> Якщо сили великі, то стрижні почнуть згинатись. Найменше значення сили  $P$ , при якій стрижень займає стійке зігнуте положення (критичне навантаження), яке визначають за формулою Ейлера  $P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $J$  – центральний момент інерції поперечного перерізу,  $l$  – довжина стрижня.

$$\begin{aligned}
 F_1 \rho_1 u'_{11}(0, t) - u''_{11}(0, t) &= 0; \\
 u_{1j}(l_j, t) &= u_{1(j+1)}(0, t); \\
 F_j u'_{1j}(l_j, t) &= F_{j+1} u'_{1(j+1)}(0, t); \\
 EF_n u'_{1n}(l_n, t) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Поставлену задачу шукатимемо за методом Фур'є (з методом д'Аламбера можна ознайомитись в [4]), тобто запишемо загальний розв'язок рівняння (18) у вигляді

$$u_{1j}(x_j, t) = X_j(x) \cdot T_j(t). \tag{20}$$

Шляхом підстановки (20) в (18) розділяємо змінні

$$\frac{\ddot{T}_j(t) + 2h_j \dot{T}_j(t)}{T_j(t)} = \frac{EX_j''(x_j)}{\rho_j X_j(x_j)} = \text{const} = -p^2, \tag{21}$$

яке розпадається на два незалежних диференціальних рівняння, загальний розв'язок яких

$$\begin{aligned}
 X_j(x_j) &= A_j \sin(a_j p x_j) + B_j \cos(a_j p x_j); \\
 T_j(t) &= e^{-h_j t} \times
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$\times \left[ C_j \sin\left(t\sqrt{p^2 - h_j^2}\right) + D_j \cos\left(t\sqrt{p^2 - h_j^2}\right) \right],$$

де  $a_j = \sqrt{\frac{\rho_j}{E}}$ .

Відповідно похідні розв'язків (22) мають вигляд

$$\begin{aligned}
 X'_j(x) &= a_j p [A_j \cos(a_j p x) - B_j \sin(a_j p x)]; \\
 \dot{T}_j(t) &= e^{-h_j t} \left\{ -h_j [C_j \sin(p_{1j} t) + D_j \cos(p_{1j} t)] + \right. \\
 &\quad \left. + p_{1j} [C_j \cos(p_{1j} t) - D_j \sin(p_{1j} t)] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

де  $p_{1j} = \sqrt{p^2 - h_j^2}$

Так як відповідно до крайових умов (19)

$$\begin{aligned}
 A_1 F_1 \sqrt{E \rho_1} &= -p B_1; \\
 \dots & \\
 A_j \sin(a_j p l_j) + B_j \cos(a_j p l_j) &= B_{j+1}; \\
 a_j F_j [A_j \cos(a_j p l_j) - B_j \sin(a_j p l_j)] &= \\
 &= a_{j+1} F_{j+1} A_{j+1}; \\
 \dots & \\
 A_n &= B_n \operatorname{tg}(a_n p l_n).
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Прирівнявши до нуля визначник системи  $2n$  рівнянь (24), знаходимо частотний спектр коливань БК.

$$\begin{vmatrix}
 F_1 \sqrt{E \rho_1} & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \sin(a_j p l_j) & \cos(a_j p l_j) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_j F_j \cos(a_j p l_j) & -a_j F_j \sin(a_j p l_j) & a_{j+1} F_{j+1} & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \operatorname{tg}(a_n p l_n)
 \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ

Рівняння частот (24) – трансцендентне, яке не має розв'язків в елементарних функціях. Оскільки тригонометричні функції, що містить рівняння (24), є періодичними, то воно має нескінченну кількість коренів. Ці корні неважко знайти графічно (рис. 8) як точки перетину графіка частотного рівняння з горизонтальною віссю, або чисельно вирахувати за допомогою математичного комп'ютерного пакета (табл. 1).

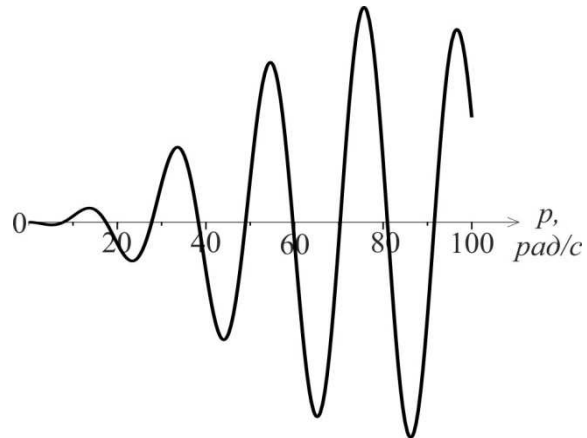


Рисунок 8 – Графічний розв'язок частотного рівняння коливань БК

На рис. 8 і в табл. 1 показано результати чисельного розрахунку перших 10 частот рівняння (24) бурової вежі, виконаного для наступних вихідних даних:

$$\begin{aligned}
 k &= 13, n = 2, \alpha = 80^\circ, m_1 = 61 \text{ т}, m_2 = 8,3 \text{ т}, \\
 m_3 &= 9,855 \text{ т}, m_6 = 26,547 \text{ т}, m_{\text{кан}} = 4 \text{ кг/м}, \\
 J_0 &= 2400 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, r_6 = 40 \text{ см}, c_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ Н/м}, \\
 \alpha_1 &= 2 \cdot 10^4 \text{ кг/с}, \rho_1 = 9011 \text{ кг/м}^3, \\
 F_1 &= 4,084 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \rho_2 = 7845 \text{ кг/м}^3, \\
 F_2 &= 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2, F_s = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \\
 F_{\text{кан}} &= 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, L_0 = 1 \text{ км}, l_0 = 0,8 \text{ км}, \\
 E_1 = E_2 = E_s &= 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}, E_{\text{кан}} = 1 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \\
 l_1 &= 1400 \text{ м}, l_2 = 130 \text{ м}, L_s = 40 \text{ м}, M = 300 \text{ Н}\cdot\text{с}.
 \end{aligned}$$

З рис. 8 доходимо висновку, що частоти коливань БК у загальному випадку не кратні. Їх кратність значною мірою залежить від параметрів бурової вежі.

Таблиця 1 – Частоти коливань бурильної колони

Частота	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$
рад/с	7,834	17,44	27,77	38,32	48,95	59,62	70,30	80,96	91,57	102

Побудована математична модель наведеної механічної системи з урахуванням динаміки руху всіх її елементів може бути використана у розрахунках частотного спектру коливань бурових веж і підймальних механізмів.

### ВИСНОВКИ

Розглянута методика розрахунку частотного спектра коливань БК і чисельне моделювання засвідчила:

1) порушення періодичності коливань залежить від параметрів БК (матеріалу, площі поперечного перерізу, пружності системи), отримані результати можна поширити на дослідження системи з розподіленими параметрами та зосередженими масами;

2) у загальному випадку спектр частот коливань БК не носить кратного характеру, і, як наслідок, коливання неперіодичні.

### Література

1 Калинин С. Г. Динамика несущих конструкций буровых установок / С. Г. Калинин, Е. В. Харченко. – Львів: Вища школа, Вид-во при Львів. ун-ті, 1988. – 144 с.

2 Султанов Б. З. Управление устойчивостью и динамикой бурильной колонны / Б. З. Султанов. – М.: Недра, 1991. – 208 с.

3 Бидерман В. Л. Теория механических колебаний: підруч. [для студ. вищ. навч. закл.] / В. Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

4 Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твёрдых тел. Удар / Н. А. Кильчевский. – К.: Наукова думка, 1976. – 318 с.

5 Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Комкнига, 2007. – 352 с.

6 Мойсишин В.М., Кулинин З.В, Моделювання динаміки бурильної колони при ліквідації прихоплень ударними механізмами // Нафтогазова енергетика. – 2006. – №1. – С. 28-36.

Стаття надійшла до редакційної колегії  
12.02.14

Рекомендована до друку  
професором Коцкуличем Я.С.  
(ІФНТУНГ, м. Івано-Франківськ)  
д-ром техн. наук Кунцяком Я.В.  
(НДіКБ бурового інструменту, м. Київ)