

СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ КОНДЕНСАТОРОВ И КАТУШЕК ИНДУКТИВНОСТИ

Введение

В практике анализа линейных электрических цепей широко используются две двухэлементные схемы замещения. Это так называемые RC и RL-цепи. Детальное рассмотрение структурных вариаций этих цепочек связано с внедрением в расчетную практику компьютерных методов анализа и распространенным мнением, что эти преобразования эквивалентны только в рамках одной частоты и не могут быть использованы в условиях девиации частот. Другая интересная сторона связана с идеей сравнения как однородных, так и разнородных цепочек друг с другом в условиях частотной зависимости при одинаковом подборе параметров на базовой частоте. Кроме того, нам кажется возможным в условиях современного анализа показать различные методики, связанные как с преобразованиями сопротивлений в проводимости, так и наоборот и, особенно, из анализа последствий этих преобразований.

Цель работы – выполнить обстоятельный частотный анализ схем замещения катушек индуктивности и конденсаторов, рассчитанных на базовой частоте и имеющих вполне определённые исходные параметры, подвергающиеся частотно зависимому воздействию. Интерес представляют также некоторые комбинации из рассматриваемых структур в частотном варианте анализа.

Анализ состояния

На рис. 1 представлены все четыре варианта схем замещения RL и RC-цепей в двухэлементном изображении.

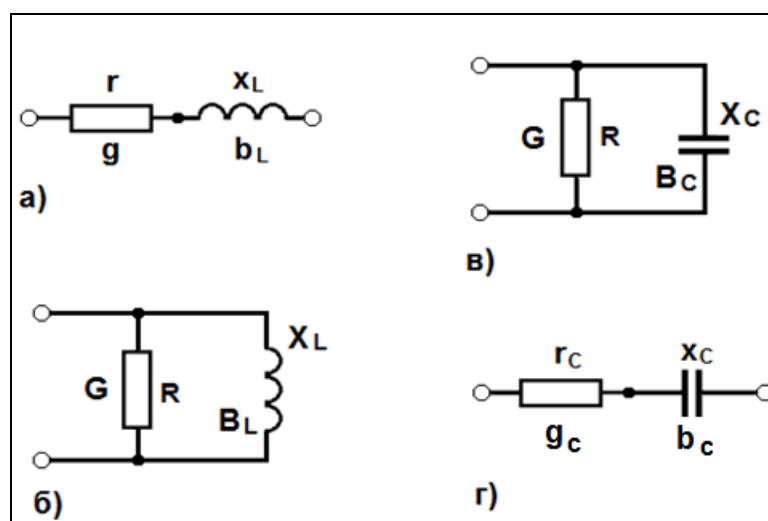


Рис. 1. Схемы замещения катушки индуктивности – слева; схемы замещения конденсатора – справа

Каждый из элементов схемы обозначен двояко: и как сопротивление и как проводимость. Это сделано с целью устранения необходимости повторного представления схем в разных подходах анализа. С этой же целью обозначения сопротивлений и проводимостей в разных структурах тоже выбраны не одинаково. Реактивные сопротивления и проводимости на схемах также выделены. Но нас интересуют случаи равных соответствующих величин, по этой причине индексы индуктивностей «L» и емкостей «C» иногда будут опущены. При обозначении входных сопротивлений иногда будем придерживаться индексов 1, 2, 3 и 4 в соответствии с порядком обозначения схем буквами: а), б), в), г).

Вариант преобразования с сопротивлениями и проводимостями

Переход от схемы а) к схеме б) или от схемы г) к схеме в) в условиях одной частоты обычно решают просто путём деления соответствующего сопротивления на квадрат модуля входного сопротивления:

$$G = \frac{r}{Z^2}; \quad B_L = \frac{x_L}{Z^2}; \quad Z^2 = r^2 + x_L^2; \quad \text{или} \quad G = \frac{r}{Z_C^2}; \quad B_C = \frac{x_C}{Z_C^2}; \quad Z_C^2 = r^2 + x_C^2 \quad (1)$$

Обратный переход решают аналогично, но сопротивления получают, используя проводимости параллельных схем замещения:

$$r = \frac{G}{Y_L^2}; \quad x_L = \frac{B_L}{Y_L^2}; \quad Y_L^2 = G^2 + B_L^2; \quad \text{или} \quad r = \frac{G}{Y_C^2}; \quad x_C = \frac{B_C}{Y_C^2}; \quad Y_C^2 = G^2 + B_C^2; \quad (2)$$

В некоторых учебных пособиях, например [1], предостерегают, что не следует использовать сопротивления последовательной схемы замещения для определения проводимостей. На наш взгляд, это делать можно, но правильно ими пользоваться. Пусть $g = 1/r$ и $b = 1/x_L$. Тогда в комплексной форме записи получим:

$$\underline{Y} = g \cdot jb / (g + jb) = g \cdot b^2 / (g^2 + b^2) - jb \cdot g^2 / (g^2 + b^2) = G - jB_L. \quad (3)$$

Если в уравнениях для проводимостей G и B_L в (1) поменять сопротивления на соответствующие им проводимости, то получим эту же запись. Точно такую же форму можно получить из сопротивлений для параллельной схемы замещения:

$$\underline{Z} = R \cdot jX_L / (R + jX_L) = R \cdot X_L^2 / (R^2 + X_L^2) + jX_L \cdot R^2 / (R^2 + X_L^2) = r + jx_L. \quad (4)$$

Вариант преобразования с использованием понятия о добротности

Метод, обозначенный выражениями (1) и (2), широко используется во всех учебных пособиях. Основной недостаток — наличие в одном выражении величин с неодинаковой размерностью и невозможность или скорее сложность сравнения, например, r и R и g и G для любой пары преобразуемых схем. Понятие о добротности катушки индуктивности или конденсатора обычно вводят радиотехники, которые их связывают с добротностью колебательного контура. Не вдаваясь в подробности [2], представим их отношениями тех или иных параметров рассматриваемого элемента. Например, добротность катушки индуктивности может быть найдена из отношений сопротивлений или проводимостей для каждой из схем по-разному $Q_L = x_L / r = g / b_L = B_L / G = R / X_L$ и для конденсатора: $Q_C = x_C / r = g / b_C = B_C / G = R / X_C$, т. е. одинаково для обоих вариантов схем замещения рассматриваемых устройств. С учетом записанных отношений параметров выражения (3) и (4) можно переписать иначе:

$$G = g \cdot \frac{b_L^2}{g^2 + b_L^2} = \frac{g}{1 + Q_L^2}; \quad \text{откуда} \quad R = r \cdot (1 + Q_L^2). \quad (5)$$

$$\text{Или} \quad B_L = b_L \cdot \frac{g^2}{g^2 + b_L^2} = \frac{b_L}{1 + D_L^2}; \quad \text{откуда}$$

$$X_L = x_L \cdot (1 + D_L^2); \quad (6)$$

где $D_L = 1/Q_L$ — затухание, величина обратная добротности.

Достоинство выражений (5) и (6) состоит в том, что из них даже без чисел видно, что при достаточно большой добротности (больше десяти) величины реактивных сопротивлений обеих схем практически равны, активные же сопротивления двух различных структур тем больше различны по величине, чем лучше добротность.

Вариант преобразования по закону дуальных структур

Закон дуальных структур [3] для каждой из пар рассматриваемых схем очевиден и из выражений (1) и (2), достаточно перейти от G к R или от B к X и выполнить несложные преобразования, связанные с получением произведений (7):

$$r \cdot R = Z^2 \quad \text{и} \quad x \cdot X = Z^2. \quad (7)$$

Эти соотношения в равной мере применимы для каждой из пар и очень удобны для использования в преобразованиях рассматриваемых структур цепей, так как совершенно равноценны для любой из двух связанных эквивалентностью схем. Однако заметим, что выражения (5) и (6) все же более практичны чем (7), так как определить значение $Z = \sqrt{r^2 + x^2}$ более затруднительно, чем найти значение добротности $Q = x/r$.

Частотные преобразования

Кроме того, в практике анализа RC и RL-цепей обычно работают с RLC-параметрами. В этой работе использованы понятия об активных и реактивных сопротивлениях из очень простых соображений. Пусть известно, что реактивное сопротивление катушки

$x = 2\pi fL = \omega L = \frac{\omega \omega_0 L}{\omega_0} = \frac{\omega \cdot x_0}{\omega_0} = \omega \cdot x_0$ и на базовой частоте имеет конкретное значение

$x_0 = 40 \text{ Ом}$. Чтобы сделать его частотно зависимым достаточно умножить на безразмерный комплексный оператор $j\omega$. Например, $x(\omega) = 40j\omega$. Здесь $\omega = w/w_0$ — относительная круговая частота; w — круговая частота; w_0 — круговая базовая частота. Другими словами, умножая индуктивное сопротивление на относительную угловую частоту, практически ничего не меняя по существу, обеспечивают переход от частоты $w = 2\pi f$, имеющей размерность рад/с к безразмерной относительной частоте, которая на базовой частоте всегда равна единице. Эта же операция может быть проделана с емкостным сопротивлением или проводимостью. Пусть $x = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega \cdot w_0 C} = \frac{x_0}{j\omega}$; тогда при $x_0 = 40 \text{ Ом}$, имеем $x(\omega) = 40/(j\omega)$.

Авторы рассчитывают, что этот удобный переход от циклической частоты к относительной позволит без труда решать многие проблемы теории электрических цепей в частотной области с помощью вычислительной техники.

Рассмотрим сопротивления четырех цепочек, изображенных на рис. 1, в зависимости от частоты:

$$Z_1(\omega) = r + j\omega \cdot x_0; \quad Y_2(\omega) = \frac{1}{r + j\omega \cdot x_0}; \quad Y_3(\omega) = \frac{1}{r + \frac{x_0}{j\omega}}; \quad Z_4(\omega) = r + \frac{x_0}{j\omega}. \quad (8)$$

Чтобы увидеть частотную зависимость составляющих сопротивлений параллельных схем замещения, необходимо выполнить ряд простых преобразований.

$$Y_2(\omega) = \frac{r - x_0 j\omega}{r^2 + x_0^2 \omega^2} = g \frac{r^2}{r^2 + x_0^2 \omega^2} - j\omega \cdot b \frac{x_0^2}{r^2 + x_0^2 \omega^2} = \frac{G}{\omega^2} \cdot \frac{1 + Q^2}{1/\omega^2 + Q^2} + \frac{B\omega}{j} \cdot \frac{1 + D^2}{\omega^2 + D^2}. \quad (9)$$

Если учесть, что $\frac{1 + D^2}{\omega^2 + D^2} = \frac{1 + Q^2}{1 + Q^2 \omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1 + Q^2}{1/\omega^2 + Q^2} = \frac{M(\omega)}{\omega^2}$ то

$Y_2(\omega) = \left(\frac{G}{\omega^2} + \frac{B}{j\omega} \right) \cdot M(\omega)$. Таким образом, параллельная модель линейной цепи в частотном варианте отличается от расчетов на одной частоте двумя коэффициентами

ω^2 и $M(\omega) = \frac{1+Q^2}{1/\omega^2 + Q^2}$. Если первый коэффициент появляется только у активной составляющей и должен учитываться всегда, то второй учитывают только при добротности $Q \leq 10$. При рассмотрении проводимости схемы «в»

$$Y_3(\omega) = G\omega^2 \frac{1+Q^2}{\omega^2 + Q^2} + j\omega B \frac{1+Q^2}{\omega^2 + Q^2} = (G\omega^2 + j\omega B) \cdot N(\omega). \quad (10)$$

Здесь появляются две частотно зависимые составляющие ω^2 и $N(\omega) = \frac{1+Q^2}{\omega^2 + Q^2}$.

Частотно зависимые коэффициенты $N(\omega)$ и $M(\omega)$ представлены в виде графических зависимостей на рис. 2, из которых видно, что их роль с повышением добротности исчезает. Условно можно принять за граничную единицу $Q \approx 10$.

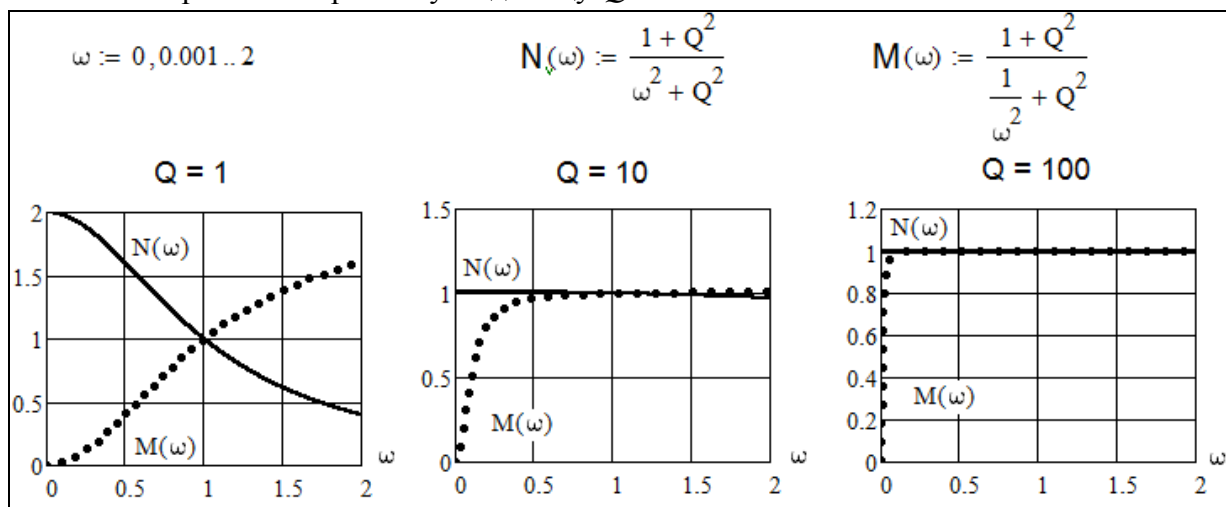


Рис. 2. Частотно зависимые коэффициенты $N(\omega)$ и $M(\omega)$

В практике анализа электрических цепей с конденсаторами и катушками индуктивности возможны случаи, когда активные части проводимостей той и другой цепочки независимы от частоты. В этом случае допустима другая ориентация на эквивалентность. Например, проводимость цепи «в» описана конкретным выражением: $Y_3(\omega) = G + j\omega B$, тогда очевидно что, входное сопротивление будет иметь вид

$$\begin{aligned} Z_3(\omega) &= \frac{1}{G + j\omega B} = R \frac{G^2}{G^2 + \omega^2 B^2} - j\omega X \frac{B^2}{G^2 + \omega^2 B^2} = \frac{r}{\omega^2} \frac{1+Q^2}{1/\omega^2 + Q^2} - j\omega \cdot x \frac{1+D^2}{\omega^2 + D^2} = \\ &= \left(\frac{r}{\omega^2} + \frac{x}{j\omega} \right) \cdot M(\omega); \quad \text{Так как} \quad \frac{1+D^2}{\omega^2 + D^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{1+Q^2}{1/\omega^2 + Q^2} \end{aligned}$$

Аналогичный вариант возможен при переходе от параллельной схемы «б» к схеме «а». В отношении базовой частоты оба варианта преобразований идентичны. Что касается боковых частот, то существует некоторая разница в трактовке результата. Однако при добротностях, приближенных к 100 и выше эта разница в полосе пропускания исчезает. Основой для решения служат следующие обстоятельства практики. Катушка индуктивности, как правило, представляется в виде последовательной схемы замещения и в чрезвычайно редких случаях анализа представляется параллельной моделью. Конденсатор же наоборот чаще представляют в виде параллельной модели, которая хорошо соответствует саморазряду. По этой причине предложены два различных алгоритма преобразований рассматриваемых электротехнических устройств.

Катушка индуктивности

За основу принята эквивалентность входных сопротивлений двух схем. Алгоритм состоит из следующей последовательности действий:

○ Заданы параметры входного сопротивления, последовательной схемы замещения

○ $Z_1(\omega) = r + j\omega \cdot x$.

○ Производят расчет вспомогательных параметров и параметров второй схемы на базовой частоте

○ $Q = \frac{x}{r}$; $M(\omega) = \frac{1+Q^2}{1/\omega^2 + Q^2}$; $G = \frac{1}{r(1+Q^2)}$; $B = \frac{1}{x(1+Q^2)}$.

○ Записывают выражение для входной проводимости параллельной цепи:

○ $Y_2(\omega) = \left(\frac{G}{\omega^2} + \frac{B}{j\omega} \right) \cdot M(\omega)$.

○ Определяют входное сопротивление по выражению:

○ $Z_2(\omega) = \frac{1}{Y_2(\omega)} = r + j\omega \cdot x$.

На рис. 3 представлен вариант пересчета параметров последовательной схемы замещения катушки индуктивности в эквивалентную ей параллельную схему в соответствии с изложенным алгоритмом при добротности $Q < 10$. На рисунке приведены частотные зависимости модуля и фазы входного сопротивления совершенно аналогичные для обеих схем. Кроме того даны значения активной и реактивной составляющих этого сопротивления для трех значений относительных частот.

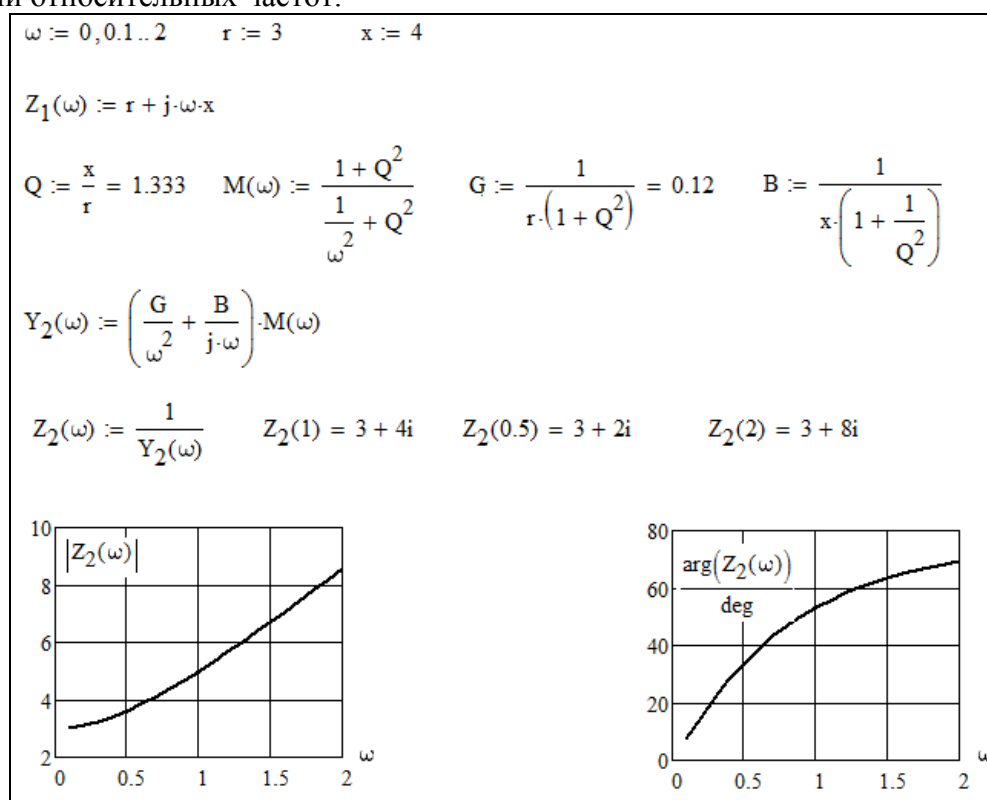


Рис. 3. Пример эквивалентного пересчета последовательной схемы в параллельный аналог

Конденсатор

За основу принята эквивалентность входных проводимостей двух схем. Алгоритм состоит из следующей последовательности действий:

• Заданы параметры входной проводимости параллельной схемы замещения

- $Y_2(\omega) = G + j\omega \cdot B$
- Производят расчет вспомогательных параметров и параметров второй схемы замещения на базовой частоте

$$Q = \frac{B}{G}; \quad r = \frac{1}{G(1+Q^2)}; \quad x = \frac{1}{B(1+Q^2)}; \quad M(\omega) = \frac{1+Q^2}{1/\omega^2 + Q^2}$$

- Записывают выражение для входного сопротивления последовательной цепи

$$Z_1(\omega) = \left(\frac{r}{\omega^2} + \frac{x}{j\omega} \right) \cdot M(\omega)$$

- Определяют входную проводимость по известному выражению

$$Y_1(\omega) = \frac{1}{Z_1(\omega)} = G + j\omega \cdot B$$

Ниже, на рис. 4, представлен вариант анализа схем замещения конденсатора в соответствии с описанным выше алгоритмом.

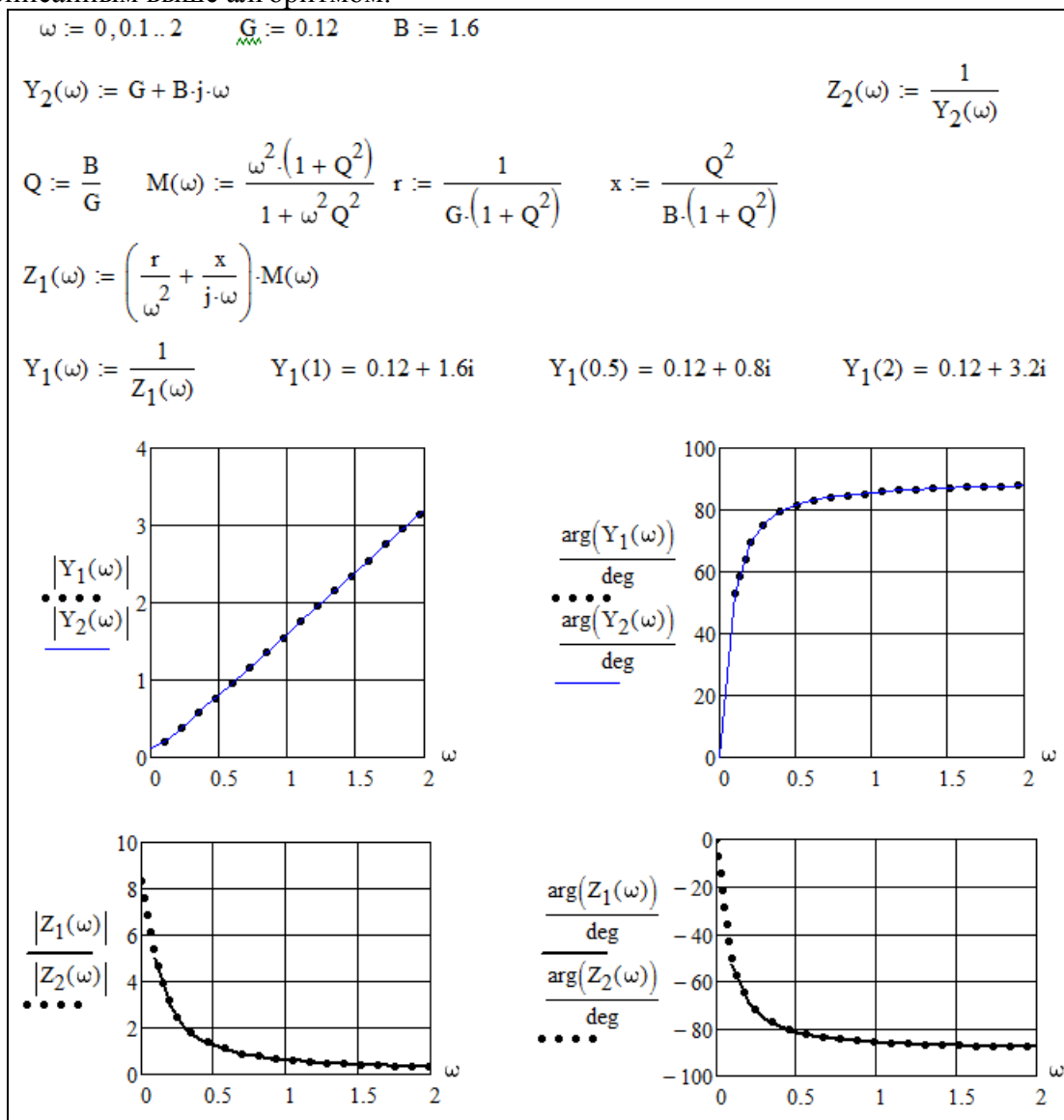


Рис. 4. Пример эквивалентного пересчета параллельной схемы в последовательный аналог

Заметим, что в данном примере частотно-зависимый коэффициент $M(\omega)$ можно было опустить из рассмотрения. Здесь он равен $M(0.5) = 0.983$ и $M(2) = 1.004$ при добротности $Q = 13.3$.

Последовательный колебательный контур

Его обычно рассматривают в составе из трех параметров (RLC), пренебрегая параллельным сопротивлением в схеме конденсатора. В связи с изложенной теорией сопротивление конденсатора в последовательной схеме замещения содержит коэффициент, обратно пропорциональный квадрату относительной частоты при любой добротности.

Такая трактовка схемы замещения конденсатора позволяет учесть и это влияние на резонансный эффект. Так передаточная функция последовательного колебательного контура по напряжению (реакция конденсатора на входное гармоническое воздействие) может быть записана в виде

$$H(\omega) = \frac{1}{G + j\omega \cdot B} = \frac{1}{r + j\omega \cdot x + \frac{1}{G + j\omega \cdot B}} = \frac{1}{1 + rG(1 + j\omega \cdot Q_L)(1 + j\omega \cdot Q_C)} = \frac{R}{R + r(1 + j\omega \cdot Q)^2}.$$

Последняя форма записи выполнена для варианта с равными добротностями катушки индуктивности и конденсатора. В любом случае, очевидно, что роль активного сопротивления катушки и проводимости конденсатора в колебательном процессе одинаковы – и тот, и другой параметр с соответствующим изменением расширяют полосу пропускания.

Обратить внимание: параллельный контур, составленный из этих же двух схем, описывает процесс изменения тока в индуктивности точно такой передаточной функцией по току:

$$T(\omega) = \frac{1}{r + j\omega \cdot x} = \frac{1}{G + j\omega \cdot B + \frac{1}{r + j\omega \cdot x}} = \frac{1}{1 + rG(1 + j\omega \cdot Q_L)(1 + j\omega \cdot Q_C)}.$$

Таким образом, установлено, что процесс резонансных колебаний напряжения на конденсаторе последовательного контура идентичен процессу изменения тока в катушке индуктивности параллельного контура. Можно сделать вывод, что реакция изменения напряжения на катушке в последовательном контуре окажется одинаковой с реакцией общего тока конденсатора по отношению к току в контуре.

Выводы

1. Схемы замещения катушек индуктивности и конденсаторов могут быть рассчитаны эквивалентными и в частотной области или по входному сопротивлению или по входной проводимости, которые в рамках своего алгоритма подчиняются закону соотношений между сопротивлениями и проводимостями.

2. Для катушек индуктивности предпочтительней является эквивалентность по входному сопротивлению, а для конденсаторов — эквивалентность по входной проводимости.

3. При добротности катушек индуктивности или конденсаторов со значением около 100 и выше граница между двумя вариантами пересчета эквивалентности стирается.

4. Частотно-зависимые коэффициенты $M(\omega)$ и $N(\omega)$ при добротности $Q \geq 10$ практически полностью утрачивают влияние на параметры рассчитываемых схем.

5. Последовательный и параллельный колебательные контуры, образованные из схем замещения имеют одинаковые передаточные коэффициенты по току в катушке и по напряжению на конденсаторе.

Список литературы: 1. *Добротворский, И. Н.* Теория электрических цепей : учебник для техникумов. – М. : Радио и связь, 1989. – 472 с. 2. *Новиков, Ю. Н.* Электротехника и электроника. Теория цепей и сигналов, методы анализа : учеб. пособие. – СПб. : Питер, 2005. – 384 с. 3. *Эквивалентные структуры в гармоническом анализе / П. Ф. Лебедев // Радиотехника. – 2004. – Вып. 139. – С. 107 – 112.*

Харьковский национальный
университет строительства и архитектуры

Поступила в редколлегию 04.09.2012