

ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ КЕРУВАННЯ КОНСЕРВАТИВНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Вступ

Час регулювання є однією з найважливіших характеристик системи керування. Яка б теорія не була б покладена в основу синтезу системи керування, що проектується, забезпечення заданого часу керування є необхідною умовою її функціонування. Зрозуміло, що зменшення часу регулювання, тобто збільшення швидкодії, має велике практичне значення для широкого класу технічних задач. Значна кількість об'єктів керування має консервативні властивості (незатухаючі коливання вихідних величин), що накладає певні особливості на рішення задач оптимального керування такими об'єктами.

Задачам оптимального керування за швидкодією присвячено значну кількість публікацій, зокрема роботи О.О. Павлова, Л.І. Розонера, Л.П. Смольнікова, В.П. Колесника, В.В. Солодовникова, Н.Н. Красовського, Ю.Г. Антомонова, О.О. Колесникова, М. Атанса, П. Фалба та інші [1]. Але не зважаючи на високий інтерес до цієї проблеми, якщо оцінювати практичні результати, вони є досить скромними. Це пов'язано з труднощами під час проектування та реалізації оптимального закону керування. Крім того, більшість результатів, що демонструють роботи з цього питання, не містять прозорих прикладів, а тим більше моделювання.

Мета статті – дослідження методу оптимального за швидкодією керування консервативними системами теоретично та за допомогою моделювання у програмному комплексі MATLAB/Simulink.

Основний матеріал

Розглянемо рішення задачі про оптимальну швидкодію для об'єкту, що має чисто уявні корені характеристичного рівняння. Для таких об'єктів теорема про n -інтервалів не справедлива і перемикань може бути більше, ніж число $(n-1)$ [2].

У якості прикладу розглянемо гармонічний осцилятор, що є математичною моделлю консервативних процесів, що з часом не затухають [3].

Так, розглянемо тіло маси m , що підвішено на пружині з коефіцієнтом пружності k (рис. 1, а). Величина $y(t)$ визначає лінійне переміщення відносно стану рівноваги, $f(t)$ – сила, що обмежена за величиною, прикладена до тіла $|f(t)| \leq F$.

Диференційне рівняння для такої системи має вид

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ky(t) = f(t). \quad (1)$$

Оберемо наступні величини

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, K = \frac{F}{m}, u(t) = \frac{f(t)}{F}. \quad (2)$$

Тоді рівняння (1) запишеться у виді

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = Ku(t). \quad (3)$$

Керування буде обмежено виразом $|u(t)| \leq 1$. Позначимо змінні стану як $y_1(t) = y(t)$ та $y_2(t) = \dot{y}(t)$. Тоді рівняння (3) можна представити як

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = -\omega^2 y_1(t) + Ku(t), \\ y(t) = y_1(t). \end{cases} \quad (4)$$

Нехай $x_1(t) = \frac{\omega}{K} y_1(t)$ та $x_2(t) = \frac{1}{K} y_2(t)$. Тоді (4) прийме вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\omega x_1(t) + u(t), \\ y(t) = \frac{K}{\omega} x_1(t). \end{cases} \quad (5)$$

Матриця А системи

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

має чисто уявні власні значення $eigA = \pm j\omega$.

Розглянемо наступний приклад [3]. Симетричне тіло, що обертається одночасно навколо трьох осей (рис. 1, б).

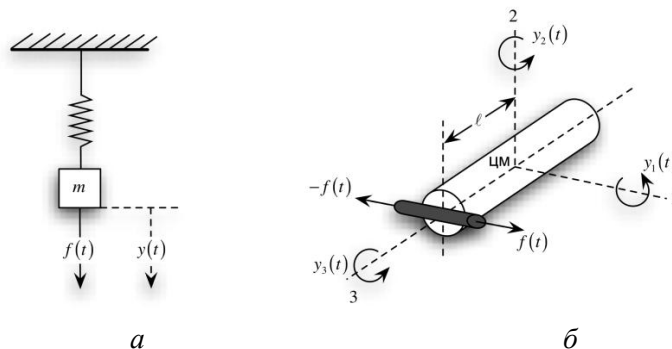


Рис. 1. Фізичні системи, що мають математичні моделі у виді гармонічного осцилятора

Введемо осі 1, 2, 3, що проходять через центр мас тіла. Позначимо через $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ кутові швидкості обертання навколо осей 1, 2, 3. Оскільки вісь 3 є віссю симетрії, то моменти інерції відносно осей 1, 2 рівні. Позначимо їх через J , а момент інерції відносно осі 3 – J_3 . Також на тілі закріплено реактивний двигун на відстані l від центра мас, тяга якого $f(t)$ обмежена співвідношенням $|f(t)| \leq F$. Зрозуміло, що момент $lf(t)$, який створює реактивний двигун, впливає на величину кутового прискорення $\dot{y}_2(t)$.

Система диференційних рівнянь, що описує систему

$$\begin{cases} J\dot{y}_1(t) = (J - J_3)y_2(t)y_3(t), \\ J\dot{y}_2(t) = (J_3 - J)y_1(t)y_3(t) + lf(t), \\ J_3\dot{y}_3(t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

З останнього рівняння $y_3(t) = const = c_3$. Позначимо $\omega = \frac{(J - J_3)c_3}{J}$. Тоді (7) запишеться

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \omega y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = -\omega y_1(t) + \frac{\ell}{J} f(t). \end{cases} \quad (8)$$

Позначимо $K = \frac{1}{J} F$, $u(t) = \frac{f(t)}{F}$, $x_1(t) = \frac{1}{K} y_1(t)$ та $x_2(t) = \frac{1}{K} y_2(t)$. Тоді система (8) прийме вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \omega x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\omega x_1(t) + u(t), \\ y(t) = Kx_1(t). \end{cases} \quad (9)$$

Керування обмежене співвідношенням $|u(t)| \leq 1$.

Отримані рівняння станів системи (9) тотожні відповідним рівнянням системи (5).

Розглянемо рішення оптимальної за швидкодією задачі керування гармонічним осцилятором на прикладі.

Задано об'єкт керування рівняннями стану

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases}$$

Необхідно знайти керування, обмежене виразом $|u(t)| \leq 1$, котре переведе об'єкт з довільного початкового стану у стан спокою, тобто $x(T) = [0 \ 0]^T$ за мінімальний час.

Запишемо гамільтоніан

$$H = p_1(t)x_2(t) + p_2(t)(-x_1(t) + u(t)) = p_1(t)x_2(t) - p_2(t)x_1(t) + p_2(t)u(t). \quad (10)$$

Від керування у складі гамільтоніану залежить тільки останній доданок $p_2(t)u(t)$. Отже максимум гамільтоніана буде досягатися, коли величина $p_2(t)u(t)$ буде завжди додатня. Оскільки керування обмежено $-1 \leq u(t) \leq 1$, тому воно повинно бути того самого знаку, що і функція $p_2(t)$. Математично це можна записати як

$$u(t) = 1 \cdot \text{sign}\{p_2(t)\}. \quad (11)$$

Тоді система спряжених рівнянь матиме вид

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_2(t), \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t). \end{cases} \quad (12)$$

Продиференціюємо перше рівняння системи (11) один раз за часом $\ddot{p}_1(t) = \dot{p}_2(t)$. З урахуванням другого рівняння системи, $\ddot{p}_1(t) = -p_1(t)$. Характеристичне рівняння матиме вид $s^2 + 1 = 0$, корені якого $s_{1,2} = \pm j1$. Розв'язок запишеться як $p_1(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Тоді, відповідно до першого рівняння, диференціюючи $p_1(t)$ один раз за часом, знайдемо функцію $p_2(t)$: $p_2(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t$.

Суму синусоїди та косинусоїди можна представити однією синусоїдою: $p_2(t) = a \sin(t + \varphi)$. Тоді з урахуванням (11) оптимальне керування матиме вид

$$u(t) = 1 \cdot \text{sign}\{a \sin(t + \varphi)\}. \quad (13)$$

На рис. 2 показано вид функції $p_2(t)$ та відповідного керування $u(t)$.

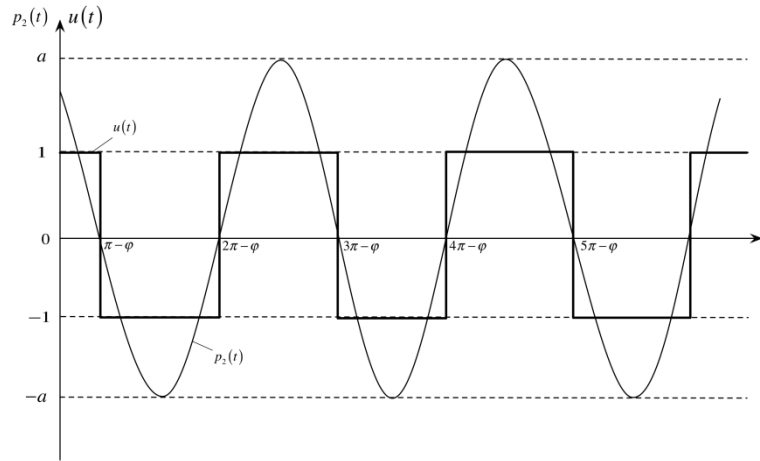


Рис. 2. Графік перемикань оптимального за швидкодією керування

Важливими висновками з аналізу поведінки функції $p_2(t)$ є те, що:

- а) оптимальне керування може залишатися незмінним не довше, ніж π одиниць часу;
- б) кількість перемикань оптимального керування необмежена.

Перший висновок буде використаний при побудові лінії перемикання, а другий доводить, що теорема про n -інтервалів для об'єктів з комплексними власними числами не справедлива.

Подальше рішення задачі виконуватимемо за допомогою фазового портрету об'єкту керування. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + u. \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння на друге та знайдемо розв'язок отриманого диференційного рівняння при постійному керуванні:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{-x_1 + u} &\Leftrightarrow x_2 dx_2 = (-x_1 + u) dx_1; \\ \frac{1}{2} x_2^2 = -\frac{1}{2} x_1^2 + u x_1 + C &\Leftrightarrow x_2^2 = -x_1^2 + 2u x_1 + C; \\ x_1^2 - 2u x_1 + u^2 + x_2^2 &= C + u^2; \\ (x_1 - u)^2 + x_2^2 &= C + u^2. \end{aligned}$$

Очевидно, що отримане рівняння описує кола з центрами у точці $(u, 0)$ та радіусами $\sqrt{C + u^2}$, $\forall C \geq -u^2$.

При $u = +1$ рівняння кіл матиме вид $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = C + 1$, а при $u = -1$ — $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = C + 1$. На рис. 3 зображено фазовий портрет об'єкту керування. Суцільні кола

представляють траєкторії при $u = +1$, пунктирні – при $u = -1$. Напрямок зміни станів з плином часу за часовою стрілкою.

Як видно з рис. 3, в початок координат можна потрапити тільки за двома колами, при $C = 0$, рівняння яких при $u = +1$: $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$, при $u = -1$: $(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1$.

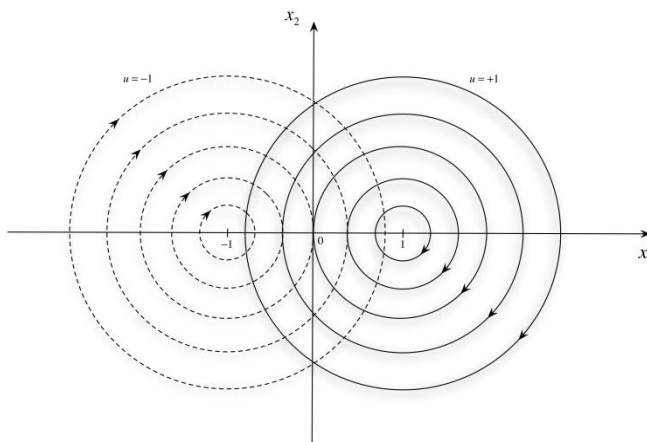


Рис. 3. Фазовий портрет об'єкту керування

На рис. 4 вони зображені окремо.

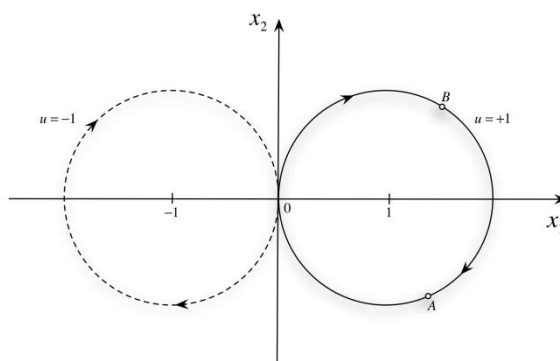


Рис. 4. Фрагмент фазового портрету об'єкту

З рис. 4 видно, що керування $u = +1$ переводить точку А в початок координат швидше ніж за π одиниць часу (кут, який спирається на дугу Ао менший за π). На переведення в початок координат точки В необхідно більше ніж π одиниць часу, що протирічить попередньому висновку про те, що керування не може залишатися постійним довше ніж π одиниць часу. Таким чином, півколо на якому лежить точка В не може бути частиною оптимального шляху в початок координат. Аналогічно можна показати, що для керування $u = -1$ нижнє напівколо не є частиною оптимального шляху. Таким чином лінія перемикання матиме вид, зображений на рис. 5.

Запишемо рівняння лінії перемикання. Напівколо при $u = +1$ має рівняння $x_2 = -\sqrt{1 - (x_1 - 1)^2}$, а при $u = -1$ – рівняння $x_2 = \sqrt{1 - (x_1 + 1)^2}$. Тоді, об'єднуючи в одну лінію перемикання, отримаємо суму двох графіків $x_2 = -\sqrt{1 - (x_1 - 1)^2} + \sqrt{1 - (x_1 + 1)^2}$, або у неявному виді

$$x_2 + \sqrt{1 - (x_1 - 1)^2} - \sqrt{1 - (x_1 + 1)^2} = 0. \quad (14)$$

З рис. 5 зрозуміло, що для того, щоб потрапити у початок координат, зображуюча точка має лежати всередині кола з центром в точці (0;0) та радіусом два (рис. 6, траєкторія 1). Тоді,

рухаючись за траєкторією відповідно до початкових умов, зображуюча точка потрапить на лінію перемикання, а за нею – у початок координат. Якщо зображуюча точка має початкове положення А, то вона не може потрапити на лінію перемикання та буде рухатись по замкнутій траєкторії 2. Щоб цього не сталося, лінію перемикання необхідно доповнити. Це виконується на основі висновку про тривалість інтервалу керування не більше ніж π одиниць часу.

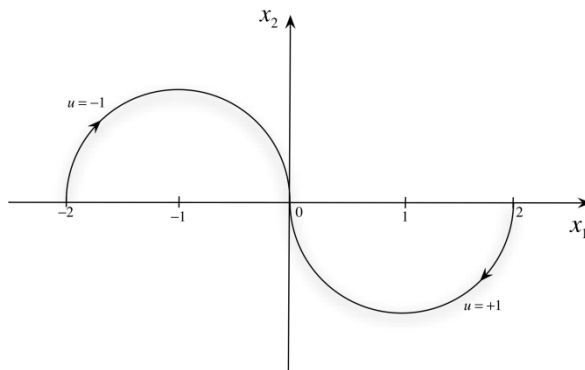


Рис. 5. Лінія перемикання

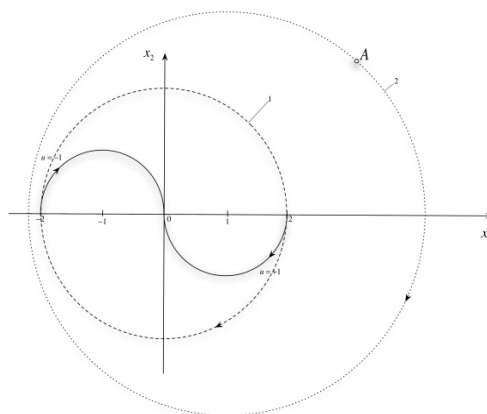


Рис. 6. До побудови лінії перемикання

Від кожного напівкола лінії перемикання проводять частини траєкторій, за якими може рухатися об'єкт керування, тривалістю π одиниць часу, як зображено на рис. 7.

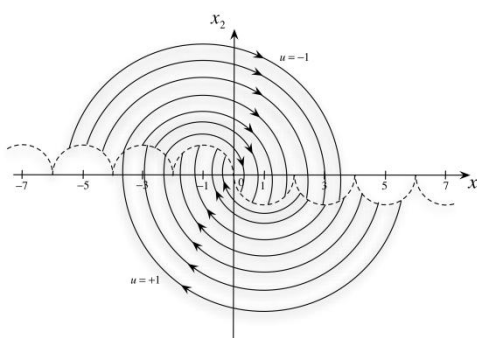


Рис. 7. Доповнення лінії перемикання

В результаті кінці цих траєкторій утворюють нові ділянки лінії перемикання і, таким чином, результуюча лінія перемикання являє собою криву, що складається з напівкіл одиничних радіусів, як зображено на рис. 8.

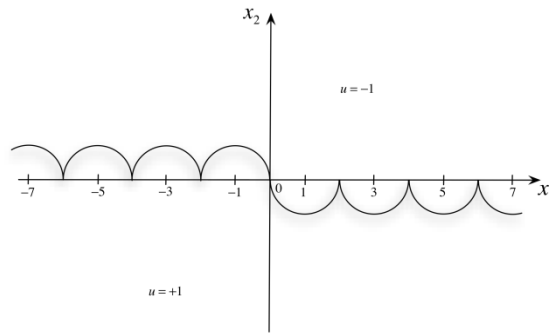


Рис. 8. Вид лінії перемикавання

Отримана лінія перемикавання аналітично, на основі (14), може бути записана як

$$\begin{aligned}
 & x_2 + \sqrt{1-(x_1-1)^2} - \sqrt{1-(x_1+1)^2} + \sqrt{1-(x_1-3)^2} - \sqrt{1-(x_1+3)^2} + \dots \\
 & + \sqrt{1-(x_1-(2j+1))^2} - \sqrt{1-(x_1+(2j+1))^2} + K = 0 \Leftrightarrow \\
 & x_2 + \sum_j \sqrt{1-(x_1-(2j+1))^2} - \sum_j \sqrt{1-(x_1+(2j+1))^2} = 0, \quad j = 0,1,2,\dots
 \end{aligned}$$

Якщо початкове положення зображуючої точки вище лінії перемикавання, тоді вона буде рухатись по колу з центром у $(-1;0)$ під дією керування $u = -1$. Якщо ж початкове положення зображуючої точки нижче лінії перемикавання, вона буде рухатись по колу з центром у $(+1;0)$ під дією керування $u = +1$.

На основі цього можна остаточно записати закон оптимального за швидкодією керування для гармонічного осцилятора:

$$\bar{u}(t) = -1 \cdot \text{sign} \left\{ x_2 + \sum_j \sqrt{1-(x_1-(2j+1))^2} - \sum_j \sqrt{1-(x_1+(2j+1))^2} \right\}, \quad j = 0,1,2,\dots \quad (15)$$

У момент зустрічі з кожним з напівкіл лінії перемикавання керування буде змінювати свій знак і зображуюча точка буде продовжувати рух за відповідною цьому керуванню траєкторією. Це продовжуватиметься доти, доки зображуюча точка не перетне півкола, що дотичні до початку координат. Тоді керування змінить знак востаннє і траєкторія руху зображуючої точки співпаде зі вказаним півколом лінії перемикавання. Це є особливістю об'єктів з комплексними коренями: тільки два півкола, що дотичні до початку координат, є частинами оптимальних траєкторій, в той час як у об'єктів з дійсними коренями вся лінія перемикавання співпадає з траєкторіями, оптимальними за швидкодією.

Моделювання

Розроблена модель системи у MATLAB/Simulink представлена на рис. 9.

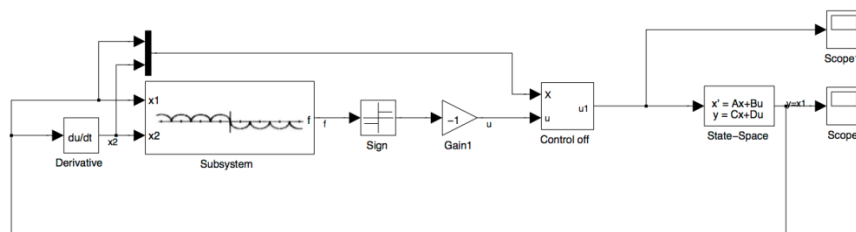


Рис. 9. Модель системи у MATLAB/Simulink

Нелінійність, що представляє собою лінію перемикання (15), реалізована у підсистемі *Subsystem*, що розкрита на рис. 10.

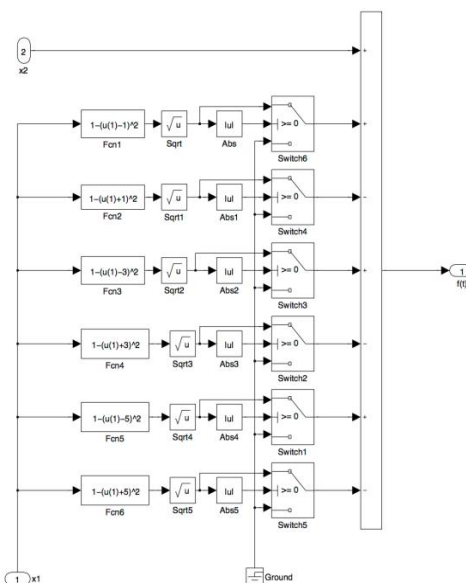


Рис. 10. Реалізація лінії перемикання

Як видно з рис. 10, реалізовано шість напівкіл лінії перемикання, що достатньо для забезпечення працездатності моделі з обраними початковими станами об'єкту керування.

На рис. 11 зображено вихід системи, траєкторію руху у просторі станів від початкової точки $x(0) = [-2 \ 2]^T$ та вид керуючого впливу.

Після досягнення об'єктом керування кінцевого стану (початку координат), керування можна вимкнути. Це виконує підсистема *Control off*.

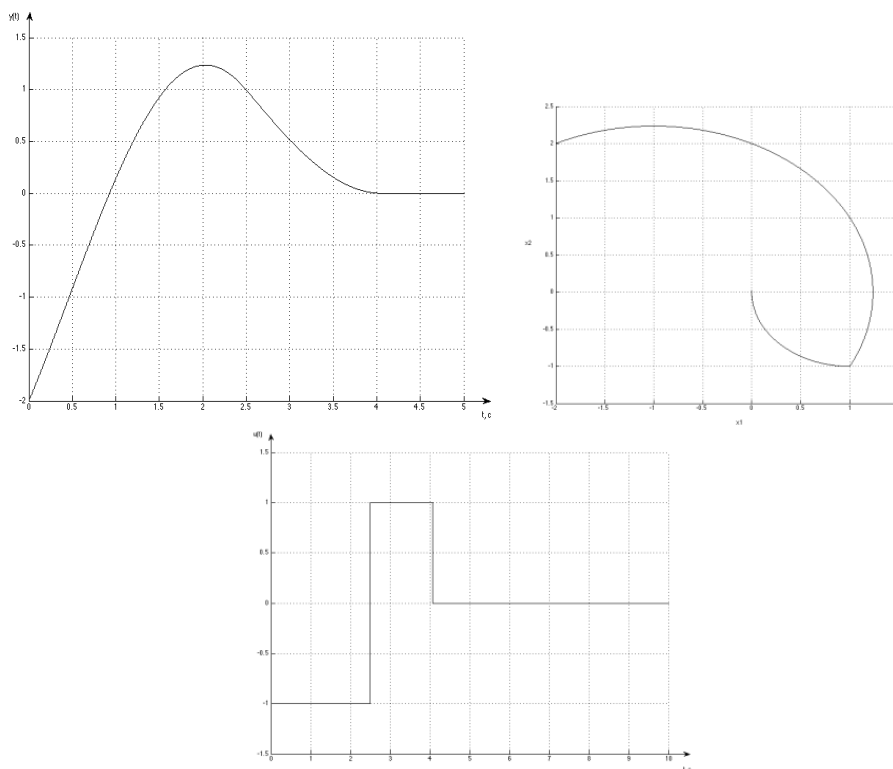


Рис. 11. Результати моделювання

За графіком мінімальний час для досягнення початку координат з початкової точки $x(0)$ складає 4 с.

Для ілюстрації поведінки системи наведемо поєднання траєкторій руху при різних початкових умовах, лінії перемикавання та фазового портрету об'єкту керування (рис. 12). Точками $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ позначені моменти перемикавання керування. Так, наприклад, об'єкт з початкового стану $x(0) = \begin{bmatrix} -4 \\ 4.5 \end{bmatrix}$ починає рухатися дугою кола з центром у точці $(-1; 0)$ під дією керування $u = -1$. Коли траєкторія перетинає лінію перемикавання (а саме її частину з центром у $(3; 0)$) у точці J керування змінює знак на $u = +1$. Об'єкт починає рухатися траєкторією, що є частиною кола з центром у $(1; 0)$, доки не потрапить у точку C , де керування знову змінить знак на $u = -1$. Під дією цього керування зображуюча точка потрапить на півколо лінії перемикавання, яке є частиною оптимальної траєкторії, оскільки вона приводить зображуючу точку у початок координат.

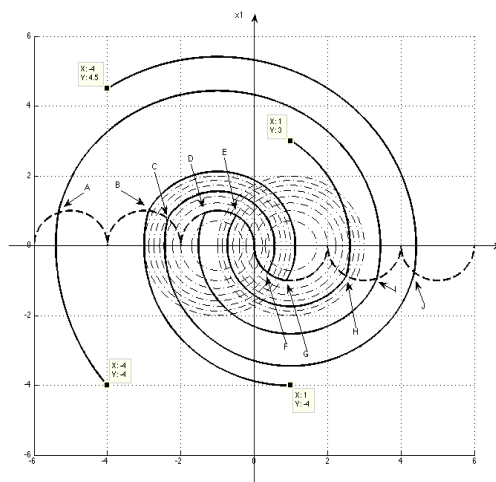


Рис. 12. Оптимальні траєкторії при різних початкових станах об'єкту керування

Таким чином, для вказаного початкового стану необхідно тричі виконати перемикавання керуючого впливу, щоб досягти початку координат. Для решти зображених траєкторій міркування аналогічні. Слід підкреслити, що оптимальне за швидкодією керування гармонічним осцилятором, на відміну від об'єктів з дійсними коренями, не вимагає найменшої кількості перемикань, оскільки не може зберігати постійне значення довше ніж π одиниць часу.

Висновки

Наведено результати теоретичного та практичного, за допомогою комп'ютерного моделювання, дослідження оптимального за швидкодією керування консервативною системою. Побудовано оригінальні моделі оптимальної за швидкодією системи керування консервативним об'єктом та реалізовано засобами MATLAB/Simulink нелінійність, що відповідає лінії перемикавання в просторі станів. Результати моделювання повністю відповідають очікуваним теоретичним висновкам.

Список літератури: 1. *Теория оптимизации систем автоматического управления* / Под ред. К.А. Пупкова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с. 2. *Чураков Е.П.* Оптимальные и адаптивные системы. – М. : Энергоиздат, 1987. – 256 с. 3. *Атанс М., Фалб Н.* Оптимальное управление. – М. : Машиностроение, 1968. – 764 с. 4. *Иванов В.А., Кожевников С.А.* Задача оптимального быстродействия для систем второго порядка общего вида // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 3. – С.76