

**МЕТОД ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА КОНЕЧНОМ МЕТАМАТЕРИАЛЕ
НА ОСНОВЕ РАЗОМКНУТЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РАМОК**

Введение

Структуры на основе периодически расположенных разомкнутых рамок являются классическим примером метаматериала [1 – 3]. Для исследования их свойств предложено множество методов. Однако большинство методов позволяет рассматривать лишь бипериодические бесконечные вдоль обоих направлений системы. К сожалению, такие модели не учитывают влияние краев структуры и, поэтому, обладают рядом недостатков. Например, при сравнении численных (теоретических) и экспериментальных результатов, наблюдается смещение резонансных частот вдоль частотной оси [3]. Кроме того, бесконечные структуры не дают представления об уровне боковых лепестков в диаграмме направленности. Другая группа методов позволяет рассматривать конечные структуры в которых объем, содержащий неоднородности, мал по сравнению с длиной волны.

Используемый в данной работе метод гиперсингулярных интегральных уравнений [4], с одной стороны, позволяет исследовать конечную решетку, тем самым учитывается влияние краев. С другой стороны, позволяет значительно быстрее решать соответствующую граничную задачу за счет использования более высокого порядка особенности в подынтегральных функциях (гиперсингулярный интеграл), по сравнению с широко применяемыми методами. Кроме того, еще одним преимуществом используемого метода является то, что он позволяет аналитически учесть условие излучения в отличие от чисто численных методов, таких как метод конечных элементов или сеток.

Цель данной работы – построение математической модели и исследование электродинамических свойств конечной системы одинаковых прямоугольных рамок. Каждая рамка имеет разрыв. Решетка расположена в свободном пространстве.

Постановка задачи

Рассмотрим плоскую решетку, схематическое изображение которой представлено на рис. 1. Обозначим область на плоскости $z = 0$ занятую металлом как S . Представим электромагнитное поле при помощи двух потенциалов ψ^E и ψ^H . Тогда для волн электрического типа поле выражается в виде [6, 7]

$$\vec{E} = \text{rotrot}(\psi^E \vec{z}),$$

$$\vec{H} = -ik \text{rot}(\psi^E \vec{z}),$$

а для волн магнитного типа –

$$\vec{E} = ik \text{rot}(\psi^H \vec{z}),$$

$$\vec{H} = \text{rotrot}(\psi^H \vec{z}),$$

где k – волновое число, \vec{z} – орт оси Oz .

Предположим, что на решетку из области $z > 0$ падает плоская волна единичной амплитуды, для которой электрический вектор Герца имеет вид

$$\psi^E(x, y, z) = \frac{\exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r})}{|k_{0\perp}|}, \tag{1}$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус вектор точки в простран-

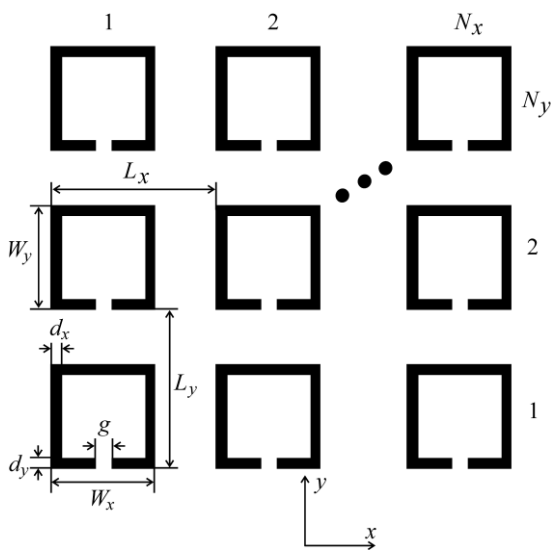


Рис. 1

стве, $\vec{k}_0 = (k_{0x}, k_{0y}, k_{0z}) = (k \cos(\varphi_0) \sin(\theta_0), k \sin(\varphi_0) \sin(\theta_0), -k \cos(\theta_0))$ – волновой вектор падающей волны, $\vec{k}_{0\perp}$ – проекция вектора \vec{k}_0 на плоскость xOy , $\vec{k}_0 = \vec{k}_{0\perp} + \vec{z}k_{0z}$, (θ, φ) – углы сферической системы координат. Угол θ отсчитывается от положительного направления оси Oz в плоскости xOz , угол φ – от положительного направления оси Ox в плоскости xOy . В случае ортогонального падения необходимо ввести вектор поляризации $\vec{p} = (p_x, p_y, 0)$:

$$\vec{E} = \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \vec{p} = \exp(-i \cos(\theta_0) z) \vec{p}.$$

Для рассеянного решеткой поля потенциалы ψ^E и ψ^H можно записать в форме [4, 5]

$$\psi^E(x, y, z) = \int_{R^2} \frac{C_{\pm}^E(\xi)}{|\xi|} \exp(i(\vec{\xi} \cdot \vec{\rho} \pm z\gamma(\xi))) d\xi, \quad (2)$$

$$\psi^H(x, y, z) = \int_{R^2} \frac{C_{\pm}^H(\xi)}{|\xi|} \exp(i(\vec{\xi} \cdot \vec{\rho} \pm z\gamma(\xi))) d\xi, \quad (3)$$

где $\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_y)$, $|\xi| = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$, $\vec{\rho} = (x, y)$ – радиус-вектор в плоскости $z = 0$, $\gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi_x^2 - \xi_y^2}$, $\text{Re}(\gamma) \geq 0$, $\text{Im}(\gamma) \geq 0$, знак “+” при $z > 0$, знак “-” при $z < 0$. У аргумента функции знак вектора здесь и далее опустим, т.е. $C_{\pm}^{E,H}(\xi) = C_{\pm}^{E,H}(\xi_x, \xi_y)$, а также $d\xi = d\xi_x d\xi_y$. Модуль или длину вектора будем обозначать как $|\bullet|$.

Неизвестные функции $C_{\pm}^{E,H}(\xi)$ можно определить в результате решения соответствующей граничной задачи для уравнения Гельмгольца. Заметим, что потенциалы в виде (2), (3) уже удовлетворяют этому уравнению и условию излучения. Остается потребовать выполнения граничных условий в плоскости $z = 0$.

Гиперсингулярное интегральное уравнение

Запишем гиперсингулярное интегральное уравнение относительно преобразования Фурье неизвестных амплитуд поля для потенциалов (2), (3). Из условия непрерывности касательных компонент электрического поля при $z = 0$ следует, что

$$C_-^E(\xi) = -C_+^E(\xi) = C^E(\xi),$$

$$C_-^H(\xi) = C_+^H(\xi) = C^H(\xi),$$

где $C^E(\xi)$ и $C^H(\xi)$ – неизвестные спектральные функции. В случае волн электрического типа для падающего поля в виде можно показать (1), что граничные условия будут выполнены, если неизвестные функции удовлетворяют парным интегральным уравнениям

$$\int_{R^2} C_j(\xi) \exp(i\vec{\xi} \cdot \vec{\rho}) d\xi = f_j(\rho), \quad \vec{\rho} \in S, \quad (5)$$

$$\int_{R^2} C_j(\xi) \exp(i\vec{\xi} \cdot \vec{\rho}) d\xi = 0, \quad \vec{\rho} \notin S, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

где $C_1(\xi) = \xi_x / |\xi| C^E(\xi)$, $C_2(\xi) = \xi_y / |\xi| C^E(\xi)$, $f_1(\rho) = -k_{0x} k_{0z} / |k_{0\perp}| \exp(i\vec{k}_{0\perp} \cdot \vec{\rho})$, $f_2(\rho) = -k_{0y} k_{0z} / |k_{0\perp}| \exp(i\vec{k}_{0\perp} \cdot \vec{\rho})$. Уравнения (5), (6) представляют собой два независимых парных интегральных уравнения относительно функции $C^E(\xi)$. Причем, для однозначного определения функции $C^E(\xi)$ достаточно решить одно из них при $j = 1$ или $j = 2$. Однако в этом случае могут возникнуть трудности при вычислении значения $C^E(0)$, так как необходимо будет вычислять предел функции, заданной на дискретном множестве значений. Для того чтобы избежать эти трудности, приведены именно два парных уравнения. Тогда

$$(C^E(\xi))^2 = (C_1(\xi))^2 + (C_2(\xi))^2.$$

Для сведения парных интегральных уравнений (5), (6) к гиперсингулярному интегральному уравнению воспользуемся схемой, представленной в работах [4, 5].

Введем функцию $u_j(\eta)$ по формуле ($\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$)

$$u_j(\eta) = \int_{R^2} C_j(\xi) \exp(i\vec{\xi} \cdot \vec{\eta}) d\xi, \quad \vec{\eta} \in R^2.$$

Из уравнения (6) следует, что $u_j(\eta) = 0$, $\vec{\rho} \notin S$. Тогда

$$C_j(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_S u_j(\xi) \exp(-i\vec{\xi} \cdot \vec{\eta}) d\eta.$$

Гиперсингулярное интегральное уравнение относительно функции $u_j(\eta)$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{u_j(\eta)}{|\eta - \rho|^3} + \frac{k^2}{4\pi} \int_S \frac{u_j(\eta)}{|\eta - \rho|} + \frac{k^4}{2} \int_S K(\eta - \rho) u_j(\eta) d\eta = -f_j(\rho), \quad \vec{\rho} \in S, \quad (7)$$

где [4] $K(\eta) = 2\pi |\eta| \int_0^\infty J_0(t) / (t - i\sqrt{k^2 |\xi|^2 - t^2}) dt$, $J_0(t)$ – функция Бесселя порядка 0.

Первый интеграл в (7) понимается в смысле конечной части по Адамару.

Для решения гиперсингулярного интегрального уравнения (7) применим метод, предложенный в работе [8]. Разобьем область S на прямоугольники $S^1 = \bigcup_{l=1}^M S_l$, где ступенчатая область S^1 приближает исходную область S . Будем рассматривать уравнение (7) на S^1 . Обозначим центр l -го прямоугольника как $\eta_l \in S^1$, $l = 1, \dots, M$. Функцию $u_j(\eta)$ будем искать в виде постоянной на каждом прямоугольнике S_l ,

$$u_j(\eta) = u_j(\eta_l), \quad \eta \in S_l, \quad l = 1, \dots, M.$$

Тогда первый и второй интеграл в (7) вычисляются аналитически на S_l .

Численные результаты

С использованием предложенного алгоритма исследовались зависимости коэффициента отражения от частоты и поле в дальней зоне. Коэффициент отражения равен отношению усредненного по времени потока энергии рассеянной на решетке волны к усредненному по времени потоку энергии волны, падающей на одиночный элемент решетки площадью s :

$$\rho = \frac{\pi^2}{(ks)^2 \sin \theta_0} \iint_{|\xi| < k} |C^E(\xi)|^2 \sqrt{k^2 - |\xi|^2} d\xi,$$

Диаграмма направленности вычисляется по формуле

$$D(\varphi, \theta) = 2\pi k (C^E(k \cos(\varphi) \sin(\theta), k \sin(\varphi) \sin(\theta)) \cos(\theta))^2.$$

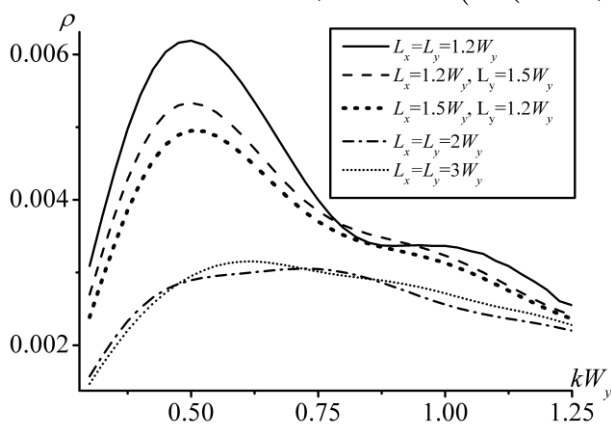


Рис. 2

На рис.2 представлена зависимость коэффициента отражения от волнового числа для решетки при $N_x \times N_y = 7 \times 7$, $g = d_x = d_y = 0.18W_y$, $W_x = 1.14W_y$. Плоская конечная периодическая решетка с 7 элементами отличается от бесконечной периодической плоской решетки не более чем на 12 % процентов по характеристикам излучения [9]. Этого вполне достаточно для того, чтобы предсказать свойства решетки с достаточно большим числом элементов. При малых

значениях периода наблюдается ярко выраженный максимум при $kW_y \approx 0,5$. Это объясняется сильным взаимодействием элементов решетки друг с другом. По мере увеличения значения расстояния между элементами, их взаимодействие ослабляется и кривые стремятся к горизонтальной линии.

На рис. 3 приведены нормированные диаграммы направленности при параметрах рис. 2, $kW_y = 0,5$. Нормирование осуществляется на максимум рис. 2, б. Наблюдается один главный лепесток. Уровень боковых лепестков незначителен и не превышает 3 % от уровня главного лепестка. Диаграмма направленности является практически осесимметричной при $L_x = L_y$. Следует отметить и тот факт, что при уменьшении величины периода, рост ρ происходит не за счет увеличения максимума главного лепестка, а за счет увеличения ширины диаграммы направленности, т.е. перераспределения энергии отраженного поля по углам.

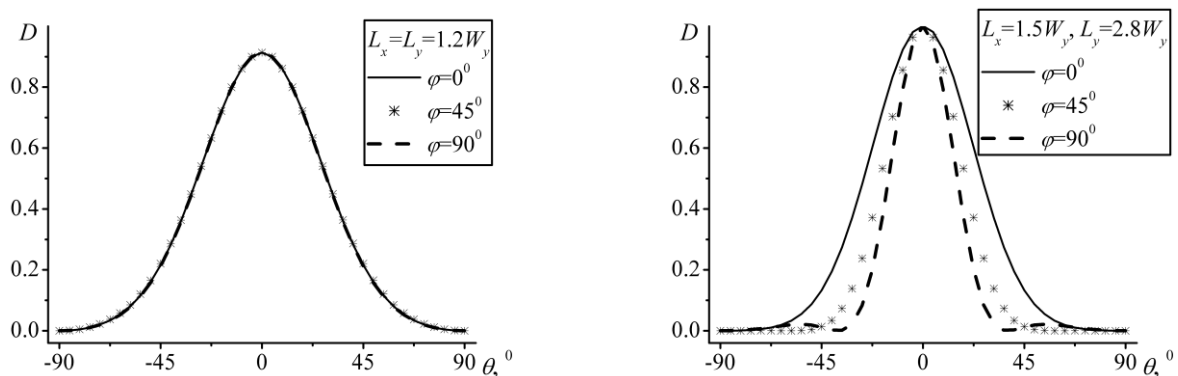


Рис. 3

Выводы

Рассмотрена задача дифракции электромагнитных волн на конечном плоском метаматериале, состоящем из разомкнутых прямоугольных рамок. Получено гиперсингулярное интегральное уравнение относительно преобразования Фурье спектральной функции поля. Благодаря возможности размещения в одиночной ячейке структуры проводника, длина которого превышает диаметр ячейки, могут возникать резонансы полного отражения, невозможные у решеток из прямых лент. В ходе проведенных численных исследований рассмотрены такие резонансы и показана возможность управления частотными характеристиками структуры в зависимости от периода размещения элементов.

Список литературы: 1. Xiaobing Cai, Gengkai Hu. Grating effect in negative permeability meta-material // Physics letters. – 2007. – А. 327. – Р. 2692-2695. 2. Goussetis G., Feresidis A. P., Wang S., Guo Y., Vardaxoglou J. C. Uniplanar left-handed artificial metamaterials // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2005. – Р. S44-S50. 3. Ucar M. H. B., Sondas A., Erdemli Y. E. Switchable split-ring frequency selective surfaces // Progress in Electromagnetics Research B. – 2008. – Vol. 6. – Р. 65–79. 4. Гандель Ю. В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Междунар. симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». – Херсон, 2003. – С. 53-58. 5. Гандель Ю. В., Мищенко О. В. Псевдодифференциальные уравнения электромагнитной дифракции на плоскопараллельной структуре и их дискретная модель // Вісник Харківського національного університету. – 2006. – № 733. – С. 58-75. Сер. Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. Вип. 6. 6. Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Математические задачи теории дифракции. – М.: МГУ, 2010. – 200 с. 7. N. Marcuvitz. Waveguide Handbook. – New York: Peter Peregrinus, 1985. 427 p. 8. Антонец А. В., Гандель Ю. В. Численный анализ гиперсингулярного интегрального уравнения задач дифракции на плоском экране // Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2003. – № 590. – С. 9-14. Сер. Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. Вип. 1. 9. Воробьев С. Н., Кузмичев И. К. Экспериментальное исследование резонансного отражения плоской электромагнитной волны от редкой ленточной решетки // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68. № 5. – С. 138-140.

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Поступила в редколлегию 25.11.2012