

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА СИГНАЛОВ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ F-СТАТИСТИКИ**Введение**

Обнаружение сигналов и оценивание их числа (обнаружение-оценивание) в зашумленных наблюдениях является одной из актуальных задач практики использования многоканальных радиотехнических систем с программируемыми вычислительными мощностями при мониторинге окружающей среды [1, 2, 3].

Известные тесты обнаружения (максимального правдоподобия и правила, вытекающие из решения оптимизационных задач по критерию Неймана - Пирсона) теряют свою значимость, если дисперсия аддитивных помех неизвестна [1].

Указанные факторы существенно ограничивают рамки использования традиционных алгоритмов в реальных условиях многоканального приема.

В работе решение задачи обнаружения-оценивания количественного состава сигналов с неизвестными параметрами в условиях помеховой неопределенности проведено при использовании F-критерия. Синтезирована удобная в вычислительном отношении технология обработки информации, которая обеспечивает оперативность получения результата при априорной помеховой неопределенности, возможность использования табулированной статистики и управление величиной ошибки первого рода.

Изложение основного материала

Пусть апертура пеленгационной системы выполнена в виде M -элементной антенной решетки (АР). Фазовые центры приемных элементов расположены на оси Ox эквидистантно в точках $0, d, 2d, \dots, (M-1)d$. Тогда для некоторой совокупности N независимых источников излучения пространственная выборка комплексных огибающих узкополосных сигналов на выходах приемных трактов антенной системы в k -й момент времени может быть задана M -мерным вектором $u(k)$:

$$u(k) = A^N s^N(k) + n(k). \quad (1)$$

Здесь $u(k) = [\dot{u}_1(k), \dot{u}_2(k), \dots, \dot{u}_M(k)]^T$, $\dot{u}_m(k)$ – отсчет в k -й момент времени комплексной огибающей сигнала на выходе m -го приемного элемента ($m = \overline{1, M}$); $A^N = [A_1, A_2, \dots, A_N]$, $A_n = [1, \dot{\lambda}_n, \dot{\lambda}_n^2, \dots, \dot{\lambda}_n^{M-1}]^T$ – амплитудно-фазовое распределение поля n -го источника ($n = \overline{1, N}$) излучения, которое определяется угловыми координатами Θ_n :

$$\dot{\lambda}_n = \exp\{j2\pi \frac{d}{\lambda} \Theta_n\} \quad (2)$$

и геометрией решетки, $\Theta_n = \sin Q_n$, Q_n – угол между направлением на n -й источник и нормалью к апертуре АР, λ – рабочая длина волны; $s^N(k) = [\dot{s}_1(k), \dot{s}_2(k), \dots, \dot{s}_N(k)]^T$, $\dot{s}_n(k)$ – комплексная амплитуда сигнала от n -го источника в k -й момент времени; $\varepsilon(k) = [\dot{\varepsilon}_1(k), \dot{\varepsilon}_2(k), \dots, \dot{\varepsilon}_M(k)]^T$, $\dot{\varepsilon}_m(k)$ – гауссовский случайный процесс (шум, вносимый каналами решетки) с характеристиками $\langle \dot{\varepsilon}_m(k) \rangle = 0$, $\langle \dot{\varepsilon}_m(k_1) \dot{\varepsilon}_m^+(k_2) \rangle = \sigma^2 I_M \delta(k_1 - k_2)$, $m = \overline{1, M}$, „+” и „T” – символы (соответственно) сопряжения по Эрмиту и транспонирования,

δ – символ Кронекера, I_M – единичная матрица размерности $M \times M$, σ^2 – мощность помехи. Требуется разработать процедуру, позволяющую на основании выборки $u^K = [u(1), u(2), \dots, u(K)]$, определить число N сигналов при отсутствии априорных сведений об их форме, угловых параметрах, интенсивности и мощности канальных шумов.

Решение задачи проведем по критерию отношения правдоподобия (К.О.П.). Для этого введем в изложение гипотезу H_{l-1} о наличии в наблюдаемом процессе (1) $(l-1)$ сигналов с неизвестными комплексными амплитудами $\dot{E}_n(k)$ и угловыми параметрами Q_n ($n = \overline{1, l-1}$). При указанных исходных данных функция правдоподобия $P(u^K / H_{l-1}, A^{l-1}, s^{(l-1), K}, \sigma^2)$ выборки u^K , полученной после приема пачки из K независимых импульсов, относительно сложной гипотезы H_{l-1} и фиксированных $s^{(l-1), K} = [s^{(l-1)}(1), s^{(l-1)}(2), \dots, s^{(l-1)}(K)]^T$, A^{l-1} , σ^2 , записывается так:

$$P(\dots) = (\pi\sigma^{2MK})^{-1} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^K \frac{[u(k) - A^{l-1}s^{l-1}(k)]^+ \times [u(k) - A^{l-1}s^{l-1}(k)]}{\sigma^2} \right\}. \quad (3)$$

Критерий отношения правдоподобия для проверки H_{l-1} при сложной альтернативе H_l определяется статистикой T_{l-1} [1]:

$$T_{l-1} = \frac{\sup_{H_{l-1}, A^{l-1}, s^{(l-1), K}, \sigma^2} P[u^K / H_{l-1}, A^{l-1}, s^{(l-1), K}, \sigma^2]}{\sup_{H_l, A^l, s^{l, K}, \sigma^2} P[u^K / H_l, A^l, s^{l, K}, \sigma^2]} = \left(\frac{RSS_{H_l}}{RSS_{H_{l-1}}} \right)^{MK}. \quad (4)$$

Здесь

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m, s^{mK}} \left\{ \frac{1}{MK} \sum_{k=1}^K [u(k) - A^m s^m(k)]^+ \times [u(k) - A^m s^m(k)] \right\} - \quad (5)$$

минимальное значение нормированной невязки, соответствующее гипотезе H_m ($m = l-1, l$).

В статистике (5) прежде всего найдем точную нижнюю грань по вектору комплексных амплитуд сигналов $s^m(k)$. Известно [3, 4], что единственная экстремальная точка по $s^m(k)$ квадратичной функции, стоящей в фигурных скобках соотношения (5), достигается при

$$\hat{s}^m(k) = [(A^m)^+ A^m]^{-1} (A^m)^+ u(k). \quad (6)$$

Тогда, подставляя (6) в (5), после тождественных преобразований получаем

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m} \left\{ \frac{1}{MK} \sum_{k=1}^K u^+(k) P_{m\perp} u(k) \right\}, \quad (7)$$

где

$$P_{m\perp} = I_m - P_m = I_m - A^m [(A^m)^+ A^m]^{-1} (A^m)^+ - \quad (8)$$

эрмитова идемпотентная матрица; P_m – проектор, заданный при помощи векторного базиса $\{A_q, q = \overline{1, M}\}$.

Для нахождения минимума по A^m невязки (7) воспользуемся спектральным разложением ортогонального проектора $P_{m\perp}$ [4, 5]:

$$P_{m\perp} = C_M \nu C_M^+ . \quad (9)$$

Здесь $\nu = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_M)$, а унитарная матрица $C_M = (C_1, C_2, \dots, C_M)$ составлена из n -мерных собственных векторов C_j , соответствующих ν_j , ($j = \overline{1, M}$), причем $C_M C_M^+ = I_M$.

С учетом (9) правую часть равенства (7) приводим к виду

$$RSS_{H_m} = \inf_{A^m} \left\{ \frac{1}{M} Sp(\nu C_M R C_M^+ \nu) \right\}. \quad (10)$$

При выводе последнего соотношения введено обозначение

$$R = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K u(k) u^+(k) - \quad (11)$$

выборочная корреляционная матрица вектора $u(k)$.

Теорема Релея-Ритца утверждает: минимум (2.10) достигается, когда столбцы матрицы C_M совпадают с ортонормированными собственными векторами C_j , отвечающими $(M - m)$ минимальным собственным значениям λ_j ($j = \overline{m+1, M}$) матрицы R [4]. Как следствие: если верна гипотеза H_m и выполнены условия ортонормированности, то

$$RSS_{H_m} = \sum_{j=m+1}^M \lambda_j . \quad (12)$$

Подставив (12) в соотношение (4), получаем выражение для критической статистики T_{l-1}

$$T_{l-1} = \left(\frac{\sum_{j=l+1}^M \lambda_j}{\sum_{j=l}^M \lambda_j} \right)^{MK} . \quad (13)$$

Согласно К.О.П. гипотеза H_{l-1} отвергается при $T_{l-1} < \Pi_\alpha$, где порог Π_α выбирается по заданному уровню значимости α , и принимается в противном случае.

В практической работе целесообразно перейти от статистики T_{l-1} с помощью монотонного преобразования к хорошо табулированной статистике F_{l-1} [4]

$$F_{l-1} = \frac{2(M-l-1)}{2} \left(\frac{-\frac{1}{T_{l-1}^{MK}} - 1}{-1} \right) = (M-l-1) \frac{\lambda_l}{\sum_{i=l+1}^M \lambda_i}, \quad (14)$$

которая при выполнении H_{l-1} подчиняется F -распределению с 2 и $2(M-l-1)$ степенями свободы.

Таким образом, в рамках критерия отношения правдоподобия гипотеза H_{l-1} принимается при $F_{l-1} \leq \Pi_{l-1,\alpha}$ и отвергает H_{l-1} , если $F_{l-1} > \Pi_{l-1,\alpha}$. Порог $\Pi_{l-1,\alpha}$ определяется из таблиц F -распределения по заданному уровню значимости α (ошибка первого рода) и указанному числу степеней свободы.

Из приведенного следует, что технология обработки наблюдаемого процесса для принятия квалификационного решения о числе источников излучения сводится к следующим операциям. По принятым антенной решеткой пространственно-временным сигналам формируют по правилу (11) выборочную ковариационную матрицу R . Затем определяют совокупность λ_j ($j = 1, M$) ее собственных значений и переходят к последовательной проверке сложных гипотез H_{l-1} ($l = 1, 2, \dots$). Для этого вычисляют критическую статистику F_{l-1} и сравнивают ее с порогом $\Pi_{l-1,\alpha}$. При $F_{l-1} > \Pi_{l-1,\alpha}$ гипотеза H_{l-1} отвергается. Тогда переходят к проверке следующей гипотезы H_l . Если на некотором шаге, например, $m-1$, впервые $F_{m-1} \leq \Pi_{m-1,\alpha}$, то выносится решение: наблюдаемый процесс обусловлен сигналами от $(m-1)$ источников излучения. Процедура проверки на этом прекращается.

Экспериментальное моделирование

Для исследования качественных показателей предложенной технологии и синтезированного теста были проведены численные статистические эксперименты. Моделировался прием девятиэлементной эквидистантной антенной решеткой с изотропными элементами сигналов от одинаковых по мощности, слабо разнесенных по углу точечных источников излучения, находящихся в дальней зоне. Межэлементное расстояние d задавалось равным λ , а случайные во времени комплексные амплитуды сигналов и собственные шумы в элементах генерировались с помощью гауссовского генератора комплексных чисел и задавались некоррелированными между собой и во времени.

Моделировались три сигнальные ситуации, отличающиеся друг от друга числом источников излучения и их угловыми разносами ΔQ : 1) $N = 1$, 2) $N = 2$. В каждой сигнальной ситуации для конкретного значения отношения сигнал/шум μ проводилось 100 независимых испытаний, а выборочная ковариационная матрица оценивалась по 100 временным выборкам входной реализации. При экспериментальных исследованиях максимальное число сигналов было принято равным 5. Под отношением сигнал/шум μ понималась величина $\mu = \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}$, где σ_i^2 – мощность i -го источника излучения в приемном канале АР. Материал моделирования сведен в табл. 1 - 3.

Таблица 1

Рабочие характеристики технологии при $N = 1$, $\frac{d}{\lambda} = 1$, $\alpha = 1\%$

μ	\hat{N}						Q
	0	1	2	3	4	5	
10	0	100	0	0	0	0	0
1	0	100	0	0	0	0	
0.9	0	100	0	0	0	0	
0.8	0	100	0	0	0	0	
0.7	0	100	0	0	0	0	
0.6	20	80	0	0	0	0	
0.5	92	8	0	0	0	0	
0.4	100	0	0	0	0	0	
0.3	100	0	0	0	0	0	

Таблица 2

Рабочие характеристики технологии при $N = 2$, $\frac{d}{\lambda} = 1$, $\alpha = 1\%$

μ	\hat{N}						Q
	0	1	2	3	4	5	
10	0	0	100	0	0	0	0,+5
1	0	8	92	0	0	0	
0.9	1	22	77	0	0	0	
0.8	18	41	41	0	0	0	
0.7	56	35	9	0	0	0	
0.6	90	9	1	0	0	0	
0.5	100	0	0	0	0	0	

Таблица 3

Рабочие характеристики технологии при $N = 2$, $\frac{d}{\lambda} = 1$, $\alpha = 1\%$

μ	\hat{N}						Q
	0	1	2	3	4	5	
10	0	0	100	0	0	0	-5,+5
1	0	3	97	0	0	0	
0.9	3	15	82	0	0	0	
0.8	17	26	57	0	0	0	
0.7	60	11	29	0	0	0	
0.6	98	0	2	0	0	0	
0.5	100	0	0	0	0	0	
0.4	100	0	0	0	0	0	
0.1	100	0	0	0	0	0	

Выводы

Проведенные теоретические и экспериментальные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- синтезированное правило проверки сложных гипотез при оценке числа сигналов может работать в условиях параметрической априорной неопределенности;
- технология, реализующая тест, использует табулированную статистику и стандартные вычислительные операции, позволяет управлять величиной ошибки первого рода.

Список литературы: Богданович, В. А. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов / В. А. Богданович, А. Г. Вострецов. - М. : Физматлит, 2004. - 320 с. 2. Волосюк, В. К. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации / В. К. Волосюк, В. Ф. Кравченко. - М. : Физматлит, 2008. - 704 с. 3. Литинская, Е. А. ФАР с механоэлектрическим сканированием / Е. А. Литинская, В. С. Панько, С. В. Пеленга, Ю. П. Соломатов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2015. – №1. – С. 24-27. 4. Кендалл, М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стюард. - М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. - 899 с. 5. Справочник по математике / Г. П. Корн, Г. Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

Национальный аэрокосмический университет
имени Н.Е. Жуковского "ХАИ"

Поступила в редколлегию 15.10.2015