УДК 004.942

М. В. Синьков, Я. А. Калиновский
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Представления экспонент в изоморфных гиперкомплексных числовых системах

Показана связь представлений экспоненциальных функций в изоморфных гиперкомплексных числовых системах и даны примеры представлений для систем различных размерностей.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, экспонента, базис.*

Вступление

Все более широкое применение гиперкомплексных числовых систем (ГЧС) требует разработки методов повышения эффективности как вычислительных процедур при моделировании с использованием гиперкомплексных чисел, так и синтеза самих математических моделей. С этой точки зрения широкие возможности предоставляет использование принципа изоморфизма гиперкомплексных числовых систем. Он позволяет получить достаточно весомые результаты в обоих обозначенных выше направлениях. Так, например, при использовании ГЧС для проектирования рекурсивных цифровых фильтров [1] использование изоморфизма позволяет снизить объем вычислений, необходимый для функционирования математической модели фильтра, что дает возможность повысить тактовую частоту фильтра. В работе [2] показано, что с помощью изоморфных переходов значительно упрощается процесс построения матричных представлений в ГЧС, что повышает эффективность построения алгоритмов функционирования математических моделей. В данной работе принцип изоморфизма применяется для упрощения построения класса таких важных нелинейностей как экспонента от гиперкомплексного переменного.

Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений

Пусть рассматривается ГЧС $\Gamma(e,n)$ размерности n с базисом $e=(e_1,...,e_n)$.

Будем в дальнейшем обозначать гиперкомплексные числа большими латинскими буквами:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,, \; M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i \,, \tag{1}$$

а вектор-столбцы, составленные из компонентов гиперкомплексных чисел, — большими латинскими буквами с чертой:

$$\overline{X} = (x_1,...,x_n)^T \,, \; \overline{M} = (m_1,...,m_n)^T \,. \tag{2}$$

Тогда основные положения вышеназванного метода построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений, которые подробно изложены в [1], состоят в следующем.

Представление экспоненты в системе $\Gamma(e,n)$ от числа $M \in \Gamma(e,n)$, которое будем обозначать $Exp(M)$, есть частное решение гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения

$$\dot{X} = MX \tag{3}$$

при начальном условии

$$Exp(0) = \varepsilon \,, \tag{4}$$

где ε — единичный элемент системы $\Gamma(e,n)$.

Для построения решения гиперкомплексного линейного дифференциального уравнения (3) его необходимо представить в векторно-матричной форме. При этом

$$\dot{\overline{X}} = (\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)^T \,, \tag{5}$$

а вектор-столбец $\overline{MX}$, полученный из гиперкомплексного числа MX, можно представить в виде матричного произведения некоторой матрицы M размерами $n \times n$, элементы которой есть линейные комбинации компонентов гиперкомплексного числа M, на вектор-столбец $\overline{X}$:

$$\overline{MX} = \mathrm{M}\overline{X} \,. \tag{6}$$

Тогда гиперкомплексное уравнение (3) превратится в систему из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая называется ассоциированной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\overline{X}} = \mathrm{M}\overline{X} \,. \tag{7}$$

Далее необходимо найти характеристические числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ матрицы М, т.е. решить характеристическое уравнение

$$\mathrm{M} - \lambda E = 0\,. \tag{8}$$

Таким образом, характеристические числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ будут зависеть от гиперкомплексного числа *M*.

После этого нужно построить общее решение, зависящее от n^2 произвольных постоянных, из которых $n^2 - n$ линейно зависимы от n свободных переменных. Для получения этих линейных зависимостей необходимо решить систему линейных уравнений [1], после чего можно получить общие решения (7), зависящие от n произвольных постоянных — $\overline{X}(t, C_1,...,C_n)$. Значения произвольных постоянных устанавливаются с помощью начального условия (4). Компоненты вектор-столбца решения $\overline{X}$ и будут компонентами экспоненты от гиперкомплексного числа *M*:

$$Exp(M) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i e_i\,. \tag{9}$$

Метод построения представлений экспоненты от гиперкомплексного переменного с помощью ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений довольно легко формализуется для построения алгоритмов и программ в системах символьных вычислений. Примеры построения представлений показаны в [1, гл. 8]. Однако он содержит ряд трудоемких процедур, таких, как, например, решение в символьном виде уравнений типа (8), или систем линейных уравнений и т.д. Поэтому весьма актуальным является поиск более эффективных методов построения представлений экспонент, особенно для ГЧС больших размерностей.

Построение представлений экспоненты по ее представлению в другой ГЧС и линейному преобразованию изоморфизма между этими системами

В некоторых задачах целесообразно использовать пары изоморфных ГЧС, одна из которых имеет сильно заполненную таблицу умножения, а вторая — слабо заполненную и имеющую диагональный вид. Последнее означает, что на главной диагонали таблицы умножения этой ГЧС размерности $n \geq 1$ стоит m подтаблиц размерности n_m, так что $\sum_{i=1}^{m} n_m = n$, а все остальные элементы таблицы — нули. Фактически обе эти ГЧС являются прямыми суммами систем вещественных чисел *R*, комплексных чисел C и неразложимых радикалов.

Изоморфизм двух ГЧС означает существование такого линейного преобразования базисов, детерминант которого не равен нулю, что для операций сложения и умножения образ результата выполнения этих операций равен результату выполнения операции над операндами. Поэтому любое выражение с конечным числом операций преобразуется этим же линейным преобразованием. В таком случае вычисления целесообразно выполнять в той ГЧС, в таблице умножения которой больше нулей. В идеале наибольший эффект дает использование ГЧС диагонального вида, если, конечно, она существует для второй ГЧС пары.

Целью данной работы является построение представления экспоненты в одной ГЧС путем использования изоморфного перехода из другой ГЧС, в которой представление экспоненты известно.

Весьма важным обстоятельством является то, что построить представление в ГЧС диагонального типа очень просто. Как показано в [1, гл. 8], представление экспоненты от гиперкомплексного числа, которое принадлежит прямой сумме гиперкомплексных числовых систем, равно сумме представлений экспонент от слагаемых этого числа, которые принадлежат всем компонентам прямой суммы.

Однако необходимо показать, что изоморфное преобразование представления экспоненты от числа в одной ГЧС приведет к представлению экспоненты от образа этого числа в другой ГЧС.

Действительно, пусть даны две изоморфные ГЧС: $\Gamma_1(e,n)$ и $\Gamma_2(f,n)$ и линейное изоморфное преобразование L:

$$\Gamma_1(e,n)\overset{L}{\simeq}\Gamma_2(f,n), \tag{10}$$

$$L: e_k=\sum_{j=1}^{n} l_{kj} f_j;\quad k=1,\ldots,n. \tag{11}$$

Посмотрим, во что превратится число $X=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \Gamma_1(e,n)$ при переходе к системе $\Gamma_2(f,n)$ с помощью изоморфизма L:

$$\begin{aligned}
X=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n \Leftrightarrow x_1(l_{11}f_1+l_{12}f_2+\ldots+l_{1n}f_n)+\\
+x_2(l_{21}f_1+l_{22}f_2+\ldots+l_{2n}f_n)+\ldots+x_n(l_{n1}f_1+l_{n2}f_2+\ldots+l_{nn}f_n)=\\
=(x_1l_{11}+x_2l_{21}+\ldots+x_nl_{n1})f_1+(x_1l_{12}+x_2l_{22}+\ldots+x_nl_{2n})f_2+\\
+\ldots+(x_1l_{1n}+x_2l_{2n}+\ldots+x_nl_{nn})f_n=y_1f_1+\ldots+y_nf_n\in\Gamma_2(f,n),
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$y_i=x_1l_{1i}+x_2l_{2i}+\ldots+x_nl_{ni}. \tag{13}$$

Тогда

$$\overline{Y}=L^T\overline{X}, \tag{14}$$

т.е. компоненты гиперкомплексного числа $Y\in\Gamma_2(f,n)$ (вектор-столбец $\overline{Y}$) получаются умножением слева вектор-столбца $\overline{X}$ на транспонированную матрицу оператора изоморфного преобразования L^T.

Значит, если к экспоненте от гиперкомплексного числа X в ГЧС $\Gamma(e,n)$ применить линейное преобразование изоморфизма L, то получится экспонента от гиперкомплексного числа $Y \in \Gamma_2(f,n)$, являющегося образом числа X:

$$Exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \overset{L}{\Leftrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^k}{k!} = Exp(Y) \in \Gamma_2(f,n). \tag{15}$$

Таким образом, подвергая изоморфному преобразование экспоненту в одной ГЧС, можно получить экспоненту в изоморфной ГЧС от чисел-образов. То же самое можно сказать и о представлениях экспонент, поскольку их построение по степенному ряду даст единственное представление.

Сформулируем главный результат: ***если есть две изоморфные системы (10) и изоморфизм (11), то по представлению экспоненты в одной из ГЧС, подвергнув ее изоморфному преобразованию, можно построить представление экспоненты в другой ГЧС.***

При этом отпадает необходимость в решении ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений.

Построение представлений экспонент в прямых суммах

Пусть задана гиперкомплексная числовая система Γ размерности n, которая является прямой суммой k числовых систем Γ_i:

$$\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{k} \Gamma_i, \tag{16}$$

причем, если размерность гиперкомплексной числовой системы Γ_i обозначить d_i, то выполняется соотношение:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = n.$$

Тогда гиперкомплексное число $M \in \Gamma$, можно представить в виде суммы k слагаемых

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i e_i = \sum_{m=1}^{k} m^{(i)}$$

в соответствии со схемой

$$m = \underbrace{m_1 e_1 + \ldots + m_{d_1} e_{d_1}}_{m^{(1)} \in \Gamma_1} + \underbrace{m_{d_1+1} e_{d_1+1} + \ldots + m_{d_1+d_2} e_{d_1+d_2}}_{m^{(2)} \in \Gamma_2} + \ldots +$$
$$+ \underbrace{m_{\sum_{i=1}^{s-1} d_i + 1} e_{\sum_{i=1}^{s-1} d_i + 1} + \ldots + m_{\sum_{i=1}^{s} d_i} e_{\sum_{i=1}^{s} d_i}}_{m^{(s)} \in \Gamma_s} + \ldots + \underbrace{m_{\sum_{i=1}^{k-1} d_i + 1} e_{\sum_{i=1}^{k-1} d_i + 1} + \ldots + m_n e_n}_{m^{(k)} \in \Gamma_k}. \tag{17}$$

Так как произведение двух базисных элементов, которые входят в разные слагаемые $m^{(i)}$ представления гиперкомплексного числа (17), равно нулю, то все нелинейные операции над этими гиперкомплексными числами сводятся к таким нелинейным действиям отдельно с каждыми слагаемыми в своих гиперкомплексных числовых системах. А это означает, в частности, такое правило возведения числа в целую степень:

$$m^r = (\sum_{i=1}^{k} m_i e_i)^r = \sum_{m=1}^{k} (m^{(i)})^r ,$$

и поэтому формула определения экспоненты преобразуется так:

$$Exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = \sum_{i=1}^{m} (E_i + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(m^{(i)})^s}{s!}) \tag{18}$$

или

$$Exp(M) = \sum_{i=1}^{k} Exp(m^{(i)}) . \tag{19}$$

Таким образом, можно сформулировать такое правило: ***представление экспоненты от гиперкомплексного числа, которое принадлежит прямой сумме гиперкомплексных числовых систем, равно сумме представлений экспонент от слагаемых этого числа, которые принадлежат всем компонентам прямой суммы.*** При этом нумерация компонентов слагаемых и соответствующих базисных элементов должна соответствовать схеме (17).

Примеры построения представлений экспонент в изоморфных ГЧС

Рассмотрим примеры построения представлений экспонент в гиперкомплексных числовых системах разной размерности по представлениям в изоморфных им системах.

1. Алгебра двойных чисел.

Рассмотрим изоморфные ГЧС W и W_1 с таблицами умножения:

$$W: \begin{array}{|c|cc|} \hline & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_2 & e_1 \\ \hline \end{array} \qquad W_1: \begin{array}{|c|cc|} \hline & f_1 & f_2 \\ \hline f_1 & f_1 & 0 \\ f_2 & 0 & f_2 \\ \hline \end{array} \tag{20}$$

Изоморфизм между этими ГЧС устанавливается следующими взаимно обратными линейными преобразованиями:

$$e_1 = f_1 + f_2, = \qquad f_1 \quad (e_1 + e_2)/2,$$
$$e_2 = f_1 - f_2. = \qquad f_2 \quad (e_1 - e_2)/2. \tag{21}$$

Посмотрим, как преобразуются числа при переходе от одной системы к другой. Пусть $M = m_1 f_1 + m_2 f_2 \in W_1$. Тогда, подставляя вместо базиса f его выражение через базис e, получим:

$$M = m_1 f_1 + m_2 f_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)e_1 + \frac{1}{2}(m_1 - m_2)e_2 =$$
$$= n_1 e_1 + n_2 e_2 = N \in W. \tag{22}$$

Из (22) имеем выражение компонентов числа $M \in W_1$ через компоненты числа $N \in W$:

$$m_1 = n_1 + n_2,$$
$$m_2 = n_1 - n_2. \tag{23}$$

Так как $W_1 = R \oplus R$, то для $M = m_1 f_1 + m_2 f_2$ в соответствии со сформулированным выше правилом

$$Exp(M) = e^{m_1} f_1 + e^{m_2} f_2. \tag{24}$$

Используя соотношения (21), (23) и формулу

$$e^{\alpha} = ch\alpha + sh\alpha,$$

получаем цепочку преобразований:

$$Exp(M) = e^{m_1} f_1 + e^{m_2} f_2 \Leftrightarrow e^{m_1}\frac{1}{2}(e_1 + e_2) + e^{m_2}\frac{1}{2}(e_1 - e_2) =$$
$$= \frac{1}{2}(e^{n_1+n_2} + e^{n_1-n_2})e_1 + \frac{1}{2}(e^{n_1+n_2} - e^{n_1-n_2})e_2 = \tag{25}$$
$$= e^{n_1}(ch(n_2)\cdot e_1 + sh(n_2)\cdot e_2) = Exp(n_1 e_1 + n_2 e_2) = Exp(N) \in W.$$

Таким образом, получено представление экспоненты в ГЧС W по ее представлению в системе W_1 (24) без построения и решения ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений (7):

$$Exp(n_1 e_1 + n_2 e_2) = e^{n_1}(ch(n_2)\cdot e_1 + sh(n_2)\cdot e_2).$$

2. Система триплексных чисел T .

Система триплексных чисел T является неканонической ГЧС. Как известно, она изоморфна ГЧС диагонального типа $R\oplus C$ — прямой сумме систем вещественных и комплексных чисел. Таблицы умножения их следующие:

$$T:\begin{array}{|c|ccc|}\hline & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_2 & (e_3-e_1/2) & -e_2 \\ e_3 & e_e & -e_2 & e_1 \\ \hline \end{array} \qquad R\oplus C:\begin{array}{|c|ccc|}\hline & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline f_1 & f_1 & 0 & 0 \\ f_2 & 0 & f_2 & f_3 \\ f_3 & 0 & f_3 & -f_1 \\ \hline \end{array}$$

Изоморфизм между этими ГЧС устанавливается следующими взаимно обратными линейными преобразованиями:

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1+f_2, \\ e_2 &= f_3, \\ e_3 &= f_1-f_2. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_1 &= \frac{e_1+e_3}{2}, \\ f_2 &= \frac{e_1-e_3}{2}, \\ f_3 &= e_2. \end{aligned}$$

Пусть

$$N = n_1e_1+n_2e_2+n_3e_3 \in T\,,$$
$$M = m_1f_1+m_2f_2+m_3f_3 \in R\oplus C\,.$$

Тогда компоненты чисел преобразуются по правилам [1]:

$$\begin{aligned} m_1 &= n_1+n_3, \\ m_2 &= n_1-n_3, \\ m_3 &= n_2. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему пункту получаем:

$$Exp(M) = e^{m_1}f_1+e^{m_2}(\cos m_3\cdot f_2+\sin m_3\cdot f_3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{m_1}+e^{m_2}\cos m_3)e_1+\frac{1}{2}(e^{m_1}-e^{m_2}\cos m_3)e_3+e^{m_2}\sin m_3\cdot e_2 =$$
$$=\frac{1}{2}(e^{n_1+n_3}+e^{n_1-n_3}\cos n_2)e_1+e^{n_1-n_3}\sin n_2\cdot e_2+\frac{1}{2}(e^{n_1+n_3}-e^{n_1-n_3}\cos n_2)e_3.$$

Таким образом, получено представление экспоненты в ГЧС T по ее представлению в системе $R\oplus C$:

$$Exp(M) = Exp(m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3) =$$
$$= \frac{1}{2}(e^{n_1+n_3} + e^{n_1-n_3}\cos n_2)e_1 + e^{n_1-n_3}\sin n_2 \cdot e_2 + \frac{1}{2}(e^{n_1+n_3} - e^{n_1-n_3}\cos n_2)e_3.$$

3. Пример ГЧС 8-й размерности.

Рассмотрим гиперкомплексную систему 8-й размерности $\Gamma_1(e,8) = Д(W(h,2), K(g,4))$, полученную умножением размерности ГЧС двойных чисел $W(h,2)$ размерности 2 системой квадриплексных чисел $K(g,4)$ размерности 4. Это будет ГЧС размерности $n = 8$ со следующей таблицей умножения:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$	e_6	$-e_5$	e_8	$-e_7$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	e_8	$-e_7$	$-e_6$	e_5
e_5	e_5	e_6	e_7	e_8	e_1	e_2	e_3	e_4
e_6	e_6	$-e_5$	e_8	$-e_7$	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_7	e_7	e_8	$-e_5$	$-e_6$	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_8	e_8	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

(26)

Ей изоморфна ГЧС $\Gamma_2(f,8) = Д(W_1(h,2), C \oplus C(g,4))$ со слабо заполненной таблицей умножения диагонального вида, полученная умножением размерности ГЧС двойных чисел $W_1(h,\ 2)$ размерности 2 системой бикомплексных чисел $C \oplus CK(g,4)$:

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	f_1	f_2	0	0	0	0	0	0
f_2	f_2	$-f_1$	0	0	0	0	0	0
f_3	0	0	f_3	f_4	0	0	0	0
f_4	0	0	f_4	$-f_3$	0	0	0	0
f_5	0	0	0	0	f_5	f_6	0	0
f_6	0	0	0	0	f_6	$-f_5$	0	0
f_7	0	0	0	0	0	0	f_7	f_8
f_8	0	0	0	0	0	0	f_8	$-f_7$

Их изоморфизм определяется следующим линейным преобразованием элементов базисов:

$$e_1 = f_1 + f_3 + f_5 + f_7, \qquad e_5 = f_1 + f_3 - f_5 - f_7,$$
$$e_2 = -f_2 + f_4 - f_6 + f_8, \quad e_6 = -f_2 + f_4 + f_6 - f_8,$$
$$e_3 = -f_2 - f_4 - f_6 - f_8, \quad e_7 = -f_2 - f_4 + f_6 + f_8,$$
$$e_4 = -f_1 + f_3 - f_5 + f_7, \quad e_8 = -f_1 + f_3 + f_5 - f_7$$

и обратным:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{4}(e_1 - e_4 + e_5 - e_8), \quad f_5 = \frac{1}{4}(e_1 - e_4 - e_5 + e_8),\\
f_2 &= \frac{1}{4}(-e_2 - e_3 - e_6 - e_7), \quad f_6 = \frac{1}{4}(-e_2 - e_3 + e_6 + e_7),\\
f_3 &= \frac{1}{4}(e_1 + e_4 + e_5 + e_8), \quad f_7 = \frac{1}{4}(e_1 + e_4 - e_5 - e_8),\\
f_4 &= \frac{1}{4}(e_2 - e_3 + e_6 - e_7), \quad f_8 = \frac{1}{4}(e_2 - e_3 - e_6 + e_7).
\end{aligned} \tag{27}$$

Пусть

$$N = \sum_{k=1}^{8} n_k e_k \in \Gamma_1, \qquad M = \sum_{k=1}^{8} m_k f_k \in \Gamma_2 .$$

Тогда компоненты чисел преобразуются по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
N = \sum_{k=1}^{8} n_k e_k \Leftrightarrow\ & n_1(f_1 + f_3 + f_5 + f_7) + n_2(-f_2 + f_4 - f_6 + f_8) +\\
& + n_3(-f_2 - f_4 - f_6 - f_8) + n_4(-f_1 + f_3 - f_5 + f_7) +\\
& + n_5(f_1 + f_3 - f_5 - f_7) + n_6(-f_2 + f_4 + f_6 - f_8) +\\
& + n_7(-f_2 - f_4 + f_6 + f_8) + n_8(-f_1 + f_3 + f_5 - f_7) =\\
& = (n_1 - n_4 + n_5 - n_8) f_1 + (-n_2 - n_3 - n_6 - n_7) f_2 +\\
& + (n_1 + n_4 + n_5 + n_8) f_3 + (n_2 - n_3 + n_6 - n_7) f_4 +\\
& + (n_1 - n_4 - n_5 + n_8) f_5 + (-n_2 - n_3 + n_6 + n_7) f_6 +\\
+ (n_1 + n_4 - n_5 - n_8) f_7 &+ (n_2 - n_3 - n_6 + n_7) f_8 = \sum_{k=1}^{8} m_k f_k = M \in \Gamma_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$m_1 = n_1 - n_4 + n_5 - n_8, \quad m_2 = -n_2 - n_3 - n_6 - n_7,$$
$$m_3 = n_1 + n_4 + n_5 + n_8, \quad m_4 = n_2 - n_3 + n_6 - n_7,$$
$$m_5 = n_1 - n_4 - n_5 + n_8, \quad m_6 = -n_2 - n_3 + n_6 + n_7,$$
$$m_7 = n_1 + n_4 - n_5 - n_8, \quad m_8 = n_2 - n_3 - n_6 + n_7.$$

Используя (19), (27), после преобразований получим представление экспоненты в ГЧС (26):

$$Exp(M)=\sum_{k=1}^{4} e^{m_{2k-1}}(\cos m_{2k}\cdot f_{2k-1}+\sin m_{2k}\cdot f_{2k})\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{4}\{[e^{n_1-n_4+n_5-n_8}\ (\cos(-n_2-n_3-n_6-n_7)+e^{n_1+n_4+n_5+n_8}\cos(n_2-n_3+n_6-n_7)+\\
&+e^{n_1-n_4-n_5+n_8}\cos(-n_2-n_3+n_6+n_7)+e^{n_1+n_4-n_5-n_8}\cos(n_2-n_3-n_6+n_7)]e_1+\\
&+[-e^{n_1-n_4+n_5-n_8}\sin(-n_2-n_3-n_6-n_7)+e^{n_1+n_4+n_5+n_8}\sin(n_2-n_3+n_6-n_7)-\\
&-e^{n_1-n_4-n_5+n_8}\sin(-n_2-n_3+n_6+n_7)+e^{n_1+n_4-n_5-n_8}\sin(n_2-n_3-n_6+n_7)]e_2+\\
&+[-e^{n_1-n_4+n_5-n_8}\sin(-n_2-n_3-n_6-n_7)-e^{n_1+n_4+n_5+n_8}\sin(n_2-n_3+n_6-n_7)-\\
&-e^{n_1-n_4-n_5+n_8}\sin(-n_2-n_3+n_6+n_7)-e^{n_1+n_4-n_5-n_8}\sin(n_2-n_3-n_6+n_7)]e_3-\\
&+[-e^{n_1-n_4+n_5-n_8}\cos(-n_2-n_3-n_6-n_7)+e^{n_1+n_4+n_5+n_8}\cos(n_2-n_3+n_6-n_7)-\\
&-e^{n_1-n_4-n_5+n_8}\cos(-n_2-n_3+n_6+n_7)+e^{n_1+n_4-n_5-n_8}\cos(n_2-n_3-n_6+n_7)]e_4+\\
&+[e^{n_1-n_4+n_5-n_8}\cos(-n_2-n_3-n_6-n_7)+e^{n_1+n_4+n_5+n_8}\cos(n_2-n_3+n_6-n_7)-\\
&-e^{n_1-n_4-n_5+n_8}\cos(-n_2-n_3+n_6+n_7)+e^{n_1+n_4-n_5-n_8}\cos(n_2-n_3-n_6+n_7)]e_5+\\
&[-e^{n_1-n_4+n_5-n_8}\sin(-n_2-n_3-n_6-n_7)+e^{n_1+n_4+n_5+n_8}\sin(n_2-n_3+n_6-n_7)+\\
&+e^{n_1-n_4-n_5+n_8}\sin(-n_2-n_3+n_6+n_7)-e^{n_1+n_4-n_5-n_8}\sin(n_2-n_3-n_6+n_7)]e_6+\\
&+[-e^{n_1-n_4+n_5-n_8}\sin(-n_2-n_3-n_6-n_7)-e^{n_1+n_4+n_5+n_8}\sin(n_2-n_3+n_6-n_7)+\\
&+e^{n_1-n_4-n_5+n_8}\sin(-n_2-n_3+n_6+n_7)+e^{n_1+n_4-n_5-n_8}\sin(n_2-n_3-n_6+n_7)]e_7+\\
&+[-e^{n_1-n_4+n_5-n_8}\cos(-n_2-n_3-n_6-n_7)+e^{n_1+n_4+n_5+n_8}(\cos(n_2-n_3+n_6-n_7)+\\
&+e^{n_1-n_4-n_5+n_8}(\cos(-n_2-n_3+n_6+n_7)-e^{n_1+n_4-n_5-n_8}(\cos(n_2-n_3-n_6+n_7)]e_8\}.
\end{aligned}$$

Выводы

При изоморфизме двух ГЧС, зная представление экспоненты в одной ГЧС, можно построить представление в другой ГЧС. При этом отпадает необходимость в построении и решении ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений.

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Ю.Е. Бояринова, Я.А. Калиновский. — К.: Инфодрук, 2010. — 388 с.

2. *Синьков М.В.* Матричные представления изоморфных гиперкомплексных числовых систем / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2010. — Т. 12, № 4. — С. 43–53.

Поступила в редакцию 08.06.2011