

Об основаниях системодинамики

Аверин Г.В.

Донецкий национальный технический университет
 averin@cs.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Averin G. "The grounds of systemdynamics" The peculiarities of method and mathematic apparatus of thermodynamics as special methodology of modeling physical nature processes were researched. On general conclusion of empiric appropriateness of toxicology the possibility of use this methodology to non physical nature processes was shown. A new direction of process modeling – system dynamics – is developing on the general theory positions. The beginning is formulating and principals of building mathematic apparatus system dynamics are considered.

Keywords: systemdynamics, thermodynamics, methodology of modeling processes.

Введение

Еще в 1959 году академик П.Л. Капица писал [1, стр. 420]: «Почему даже в наше время, которое многими называется временем научно-технической революции, общественные науки так слабо развиваются?... Ответ ясен: в науке об обществе нет объективного подхода. До тех пор, пока не удастся его создать, общественные науки будут развиваться с большим трудом. Этим, мне кажется, объясняется тот разительный контраст, который сейчас существует в масштабах развития естественных и социальных наук». Прошло пятьдесят лет. За это время мы пережили бурное развитие вычислительной техники, наблюдаем не менее бурное становление телекоммуникационных систем и информационных технологий, есть революционные открытия в физике, биологии, генетике, значительно продвинулись в развитии экономические науки, где появились целые новые научные направления, например, экономфизика, синергетическая экономика. Однако, до установления единых законов развития общества, о которых в свое время писал П.Л. Капица, еще далеко.

В современном понимании объективный подход предполагает использование методов, которые не зависят от воли и желаний субъекта, обеспечивают формализацию научного познания в области предмета исследования и применяют адекватные модели для описания объективных закономерностей реальности, а также дают инструменты для опытной проверки научных фактов и последующей их апробации на практике.

В целом ряде научных областей много внимания уделяется созданию универсальных методов моделирования. На повестке дня разработка общей методологии моделирования процессов различной природы, т.е. создание единой системы теорий разных областей знаний. Еще не ясно, где будет образовано необходимое качество, которое обеспечит прорыв в решении этой важной научной задачи.

Сейчас сложились три основных направления в развитии методологии моделирования. Здесь необходимо отметить, что изначально данная универсальная методология должна быть применима как к процессам физической, так и нефизической природы.

Сегодня в физике актуальной задачей является построение новой картины мира – общей теории, способной охватить многие виды взаимодействий. Это поле исследований квантовой и ядерной физики, астрофизики и близких наук. Другая важная область исследований – представление мира самоорганизующимся как в целом, так и на многих уровнях своего существования, и здесь «правят балом» синергетика, теория самоорганизации и физика неравновесных процессов. Третье направление – это использование естественнонаучных методов в описании живой и неживой природы, поиск общей теории, применимой во многих областях знаний – биологии, экологии, экономике, развитию человеческого потенциала, научном предвидении будущего и т.д. Именно это направление, связанное с системным анализом и общей теорией систем, является, наверное, наиболее перспективным путем к новой парадигме моделирования. Вполне очевидно, что в рамках одной научной области, охватывающей только физические или, например, только биологические науки, создание универсальной теории невозможно.

«Несомненно, что общая теория систем открывает перед нами новые горизонты, однако ее связь с эмпирическими данными пока еще остается весьма скудной» – отмечалось в работе Берталанди [2]. Прошло сорок лет с момента выхода в свет этой статьи, а качественного прорыва в формировании универсальной методологии общей теории систем не произошло, несмотря на надежды, что синтез знаний различных научных дисциплин может открыть широкие возможности в моделировании систем. Последнее время стало

очевидно, что отрыв от эмпирической базы стал усиливаться. Это привело к тому, что в общей теории систем стали развиваться философские направления и вакуум отсутствия базовой методологии, ориентированной на обобщение эмпирических фактов из различных областей знаний, стал заполняться общими рассуждениями. Основная причина этого связана с тем, что, пытаясь бессистемно охватить необъятное, общей теории систем становится все труднее устанавливать логические связи между процессами и объектами различной природы. Развитие эмпирической базы научных дисциплин формируется существенно более медленными темпами, чем устремления исследователей в построении теоретических моделей, причем не всегда подтвержденных практикой. Разрыв между теорией и экспериментом является симптомом серьезных нарушений нормального развития науки. Очевидно, что один из путей выхода из тупика – это создание крупных информационных баз данных по научным направлениям, что позволяет применить современные методы поиска закономерностей путем использования информационных технологий («Data mining/ интеллектуальный анализ данных»). Во многих областях знаний сегодня начинает развиваться это направление. Другой путь, который можно считать классическим – это поиск перспективных направлений в развитии методологии общей теории систем. В этом плане следует вспомнить, что все новое – это хорошо забытое старое, и, что старый друг лучше новых двух. Афоризм Я.И. Френкеля: «Не надо искать старое в новом, а надо находить новое в старом», как нельзя лучше характеризует суть данной статьи.

Здесь хотелось бы сказать, что в науке есть теория, претендующая на универсальность. Для этого приведем одно высказывание А.Эйнштейна: «Теория производит тем большее впечатление, чем проще её предпосылки, чем разнообразнее явления, между которыми она устанавливает связи, чем обширнее область её применения. Отсюда глубокое впечатление, которое произвела на меня термодинамика. Это единственная физическая теория универсального содержания, относительно которой я убежден, что в пределах применимости ее основных понятий она никогда не будет опровергнута». Однако, следует признать, что в своем современном виде, несмотря на основательность, теория термодинамики не является полной, многие ее аспекты противоречивы и запутаны, а ряд положений не имеет логической ясности. Тем не менее, термодинамика – это универсальная теория с большим потенциалом для развития.

Использование естественнонаучных методов в науках с абсолютно разными

объектами и предметами исследования является актуальной задачей общей теории систем. В этом плане хотелось бы в качестве примера показать возможности использования термодинамического метода в другой области знаний и, в первую очередь, в науке, в основе которой не лежит физическая теория. Если две абсолютно разные области знаний могут иметь общие теоретические подходы, то реализация этих подходов возможна и в третьей области, а дальше недалеко уже и до обобщений. Применение термодинамического метода лучше всего продемонстрировать на примере, и для этого в данной статье выбрана достаточно далекая от термодинамики область – токсикология.

Почему изначально в данной статье предметом изучения термодинамики выбраны факты токсикологии, а не, например, фактические данные экологии, социологии, экономики или информатики? Наверное, это было бы не принципиально, но есть веские причины – доступность и достаточность опытных данных, позволяющих получать обобщенные закономерности на феноменологическом уровне, и наглядность первого применения аппарата термодинамики в качественно другой области научных исследований. Кроме этого есть еще несколько важных причин. Во-первых, хотя термодинамика и токсикология – это очень далекие друг от друга науки, но они имеют одно общее – громадный экспериментальный материал в области анализа свойств веществ, накопленный в процессе проведения именно активных, а не пассивных экспериментов. В этих науках эмпирическая база формируется непосредственно исследователями, а не пассивно отслеживается во времени. Во-вторых, эксперимент в токсикологии – это работа с живыми объектами и в основу этой науки положена нефизическая теория, в исследованиях используется биология, химия и медицина, хотя присутствуют элементы и математики, и физики. В-третьих, в токсикологии основной параметр состояния любой системы – это время. Эта наука оперирует с категориями “жизнь” и “смерть”, что пока невозможно в термодинамике.

И последнее, наиболее важное: в чем краеугольное отличие токсикологического эксперимента от термодинамического? Токсикология – это одна из тех немногих наук, где в опыте возможна непосредственная оценка вероятностей. И, в отличие от термодинамики, это делается экспериментально, а не путем теоретического применения статистических методов. К сожалению, в течение десятилетий за это знание заплачено миллионами жизней животных при проведении токсикологических экспериментов. В этих экспериментах живые

объекты, в основном белые мыши и крысы, выполняли функцию “измерительных приборов” (своего рода “термометров”), т.к. других достоверных способов оценки опасностей человечество пока не знает.

Именно указанные выше две последние особенности токсикологии (как бы странно это не звучало) в будущем могут методически «обогащать» термодинамику и дать импульс развитию общей теории систем на основе синтеза методологий.

Истоки подобного синтеза следует искать в теории термодинамики. Однако сегодня в ее методологии есть две нерешенные методологические проблемы. С одной стороны, классическая термодинамика уникальна: это единственный раздел физики, в основах теории которого не содержится время. Величина времени вводится в термодинамику противоречивым образом, через соотношение Гиббса. А без тщательного анализа парадигмы времени невозможно дальнейшее развитие термодинамики [3]. Сегодня уже ясно, что этот вопрос зашел в тупик, и основные причины проблемы связаны с отсутствием опытных данных в сфере изучения времени как термодинамической категории, а также методических идей в этой области. С другой стороны, статистическая механика и термодинамика – науки в чем-то родственные. Мостом между ними является соотношение, связывающее энтропию и термодинамическую вероятность системы. Законность указанной связи была доказана Н-теоремой Больцмана для идеального газа, где вероятности состояний для частей системы принимались независимыми, что экспериментально никак не было обосновано. Границы применимости этой гипотезы для других термодинамических систем также не были установлены. Никогда в термодинамике не ставился вопрос эмпирического определения вероятности состояния систем в том виде, как это делается в токсикологии – на основе оценки вероятности возникновения характерных событий, свойственных системе. На протяжении почти сотни лет вероятности состояний токсикологических систем и их связи с параметрами этих систем определялись на основе экспериментов, и этот опыт может быть очень ценным для методологии. В области развития понятия состояния системы, оценки его вероятности по характерным событиям и связи состояний с качествами и свойствами могут лежать ответы на вопросы: в чем суть отличия живого от неживого; на каком уровне организации живой системы возможно возникновение сознания; реально ли создание искусственного интеллекта? В долгосрочной перспективе именно на эти вопросы и должна

дать ответы общая теория систем.

Таким образом, развитие термодинамического метода или аналогичных ему подходов в других областях знаний является актуальной задачей при изучении сложных систем. Однако метод термодинамики не должен буквально переноситься в другую область исследований, идейно должна использоваться только логическая схема построения моделей, принятая в термодинамике. Концептуально пока не ясно, термодинамика – это явно физическая теория, или нечто большее – а именно, применение некой общей методологии моделирования к объектам физической природы. Это станет ясно только по мере устранения указанных выше методологических проблем термодинамики, накопления эмпирических фактов и развития универсальных методов моделирования в других областях знаний.

Построение любой теории основано на систематизации опытных данных, установлении базовых эмпирических закономерностей, а также разработке методологии, использующей математический аппарат. Математический аппарат термодинамики представляется достаточно простым по сравнению, например, с математическим аппаратом некоторых разделов теоретической физики. Основополагающая теория не должна быть слишком сложной. Поэтому, если математический аппарат термодинамики будет успешно применен в науках с абсолютно разными объектами и предметами исследования, то это даст возможность в будущем развить общую теорию систем до уровня «теории универсального содержания». Название такой теории возникает само собой и уже широко встречается в литературе – это *системная динамика или системодинамика*.

Логическая схема моделирования и метод термодинамики

В области термодинамики сегодня написаны тысячи книг. Считается, что это наука о закономерностях превращения энергии. Применение термодинамики необъятно – она фундамент множества прикладных наук. Термодинамические методы и идеи лежат в основе физики, глубоко проникают в химию и биологию. Последнее время появилось много работ, где термодинамические идеи формально переносятся в область социологии, экономики, экологии и т.д. Обоснование этих подходов встречает серьезные идейные и логические трудности. Во многих нефизических науках объем экспериментальных данных не дает возможности провести обобщения на феноменологическом уровне, а построение математических теорий «буксует» еще на этапе

выработки общих терминов и понятий и формулировки закономерностей. Однако процесс конвергенции наук уже идет и это требует от термодинамики непрерывного развития, т.к. термодинамический метод является одним из основных универсальных методов построения теорий.

Во многих источниках отмечается, что название «термодинамика» не совсем точно передает цель и предмет исследования этой науки. Классическая термодинамика изучает свойства равновесных физических систем. В основу термодинамики положены три основных закона (*начала термодинамики*), установленные опытным и практическим путем. Первый закон термодинамики представляет собой качественное и количественное выражение закона сохранения энергии. Хотя закон сохранения энергии применим только к физическим формам движения и не применим к другим высшим формам движения материи, считается, что этот закон имеет всеобщий естественно-научный характер. Второй закон устанавливает качественную сторону (направленность) процессов, происходящих в физических системах, и отражает весь опыт человечества, связанный с изучением различных явлений и процессов в природе. Третье начало термодинамики определяет, что при температурах, стремящихся к абсолютному нулю, равновесные изотермические процессы происходят без изменения энтропии. Используя эти законы, уравнения состояния и другие эмпирические соотношения можно получить все основные выводы термодинамики [4]. В отличие от многих областей физики и химии, термодинамика не связана с представлением о структуре вещества. Однако она построена так, что применение термодинамического метода в виде общей методологии позволяет учесть все феноменологические закономерности и макроскопические свойства вещества.

На фоне значительного количества опубликованных книг, в термодинамике мало работ, посвященных изучению ее методологии и основных теоретических основ. Процесс формирования основ термодинамики, ее первоначального становления, как особой системы научных знаний, находит полное отражение в работах Карно, Клаузиуса и Томсона. Своим последующим стремительным движением вперед термодинамика обязана многим другим выдающимся ученым, и в первую очередь Гиббсу [5]. Превратившись в систему научных знаний, термодинамика стала фундаментальной, но в тоже время в чем-то и консервативной наукой. В ее истории имеются и впечатляющие достижения и до сих пор до конца не проясненные парадоксы [6]. Именно основы термодинамики часто становятся

предметом глубоких обсуждений, т.к. у многих ученых возникают вопросы, связанные с неполной логической ясностью изложения некоторых основных положений ее теории. Особенно это касается положений неравновесной термодинамики [3, 5 – 7]. В свое время Фальк отмечал, что продуктивное исследование логической структуры термодинамики не в том, чтобы привести обычное построение теории в более строгую форму, а в отыскании новых путей.

В этом плане одним из наиболее важных направлений считается задача аксиоматизации учения об энтропии, которая не потеряла актуальности и в наше время [8]. Здесь следует отметить основополагающий труд в этой области [9] и последующие работы Борна и Ланде, которые существенно содействовали распространению новых идей в учении об энтропии [10], а также известную работу [11]. В свете данной статьи интересной является также работа [5], посвященная изучению логической структуры термодинамики и обсуждению исходных идей и основных принципов. Однако, следует признать, что сегодня в термодинамике отсутствует полная, замкнутая и логически ясная система аксиоматизации учения об энтропии.

Другая, пока не разрешимая проблема, формулируется как *время и классическая термодинамика*. Данной теме уделялось и уделяется много внимания, но из-за отсутствия продуктивных идей решения проблемы, эту брешь в теоретическом фундаменте термодинамики пока ликвидировать не удалось. Дуализм других серьезных проблем термодинамической науки, которые можно сформулировать в виде: «равновесность – неравновесность», «энтропия – время», «обратимость – необратимость», «классическая вероятность – термодинамическая вероятность» и т.д., определяет необратимый процесс генезиса термодинамики [3–7, 12, 13]. До решения этих проблем нельзя говорить о существовании единой непротиворечивой парадигмы термодинамики.

Если рассматривать возможность применения методологии термодинамики к процессам нефизической природы, то важным является максимальная формализация подходов и аппарата термодинамики, а также обобщение идей, формирующих систему основных понятий этой науки. В этом плане попытаемся выстроить структурно-логическую схему моделирования в термодинамике, выделяя наиболее важные этапы и элементы и по возможности отвлекаясь от физической сути процессов, при этом вполне понимая нетривиальность данной задачи.

На первом этапе в термодинамике выделяется смысловое содержание основных

элементов понятийно-категорийного аппарата, подлежащих в дальнейшем формализации в процессе построения моделей. Наиболее важные определения, имеющие значение в рамках данной статьи, приведены ниже.

Так как термодинамика изучает макросистемы – физические тела конечных размеров, то базовым понятием является определение термодинамической системы.

Термодинамическая система – это совокупность макроскопических тел и полей физической природы, которые могут представлять собой целостный объект и обмениваться энергией и веществом, как между собой, так и с внешней средой.

В термодинамическую систему обычно не включается внешняя среда, которая лежит за пределами границ рассматриваемой системы.

Состояние системы – это мгновенная оценка совокупности значений свойств, характерных для данной системы и называемых термодинамическими параметрами. Параметром может быть любое свойство, если оно количественно определено и рассматривается как независимая переменная, определяющая вместе с другими переменными состояние системы.

Состояния термодинамических систем могут быть *равновесными* и *неравновесными*. Если состояние системы не изменяется во времени, то считают, что система находится в равновесном состоянии. В термодинамике имеются явные отличия между понятиями равновесия и стационарности [5], однако останавливаться подробно на этом не будем, отсылая за пояснениями к указанной книге.

Переходы из одного состояния в другое определяют поведение системы и именуются *процессами*. Если хотя бы один из параметров состояния изменяется, то меняется в целом и состояние системы. Переход из одного равновесного состояния в другое является *неравновесным* процессом. Определенный период времени, за который осуществляется данный переход, называется *временем релаксации*. Условно считают, что если время релаксации бесконечно большое и в процессе перехода система проходит последовательный ряд равновесных состояний, то в системе протекает *равновесный* процесс. Введение понятия равновесного процесса является определенной умышленной «идеализацией» действительности, чтобы изначально отойти от сложности неравновесных процессов и не оперировать полями термодинамических величин, имеющими пространственное и временное распределение. Следует отметить, что, скорее всего, именно здесь заложен корень проблем, связанный с последующим противоречивым введением времени в

неравновесную термодинамику. С использованием понятия равновесного процесса на этапе становления термодинамики была исключена необходимость теоретического и экспериментального изучения особенностей протекания термодинамических процессов во времени. А многие экспериментальные положения классической термодинамики получены при проведении опытов с явно выраженной нестационарностью процессов [14].

Далее, термодинамические процессы могут быть *обратимыми* и *необратимыми*. Процессы, в результате совершения которых в прямом и обратном направлениях, термодинамическая система возвращается в исходное состояние называются обратимыми. Для необратимых процессов это утверждение неверно. Все естественные самопроизвольные процессы необратимы, обратимых процессов в природе не существует. С понятием обратимости в термодинамике связан ряд парадоксов, для знакомства с которыми отсылаем к работе [3].

Термодинамические величины бывают двух видов. Если изменение величины в каком-либо процессе не зависит от характера процесса и однозначно определяется начальным и конечным состоянием системы, то говорят, что данная величина является функцией состояния (функцией точки). Дифференциал любой функции состояния является полным дифференциалом. Если изменение термодинамической величины зависит от пути, по которому осуществляется термодинамический процесс, то говорят, что величина является функцией процесса (функцией линии). Дифференциал такой функции не является полным дифференциалом.

Наиболее важным в термодинамике является понятие *энергии*. В большинстве источников это понятие вводится параллельно с трактовкой первого закона термодинамики. Типичные определения сводятся к следующим формулировкам:

- теплота и работа являются формами передачи энергии;
- взаимодействие окружающей среды и термодинамической системы осуществляется путем подвода (отвода) к последней энергии в форме теплоты или работы;
- внутренняя энергия системы является суммой кинетической и потенциальной энергий микрочастиц (атомов и молекул);
- энергия является однозначной функцией состояния системы;
- любое взаимодействие имеет своим необходимым следствием изменение внутренней энергии системы на величину, равную количеству воздействия.

Благодаря историческим опытам Джоуля была установлена эквивалентность тепла и работы. Этот эмпирический факт стал первым шагом к формулировке закона сохранения энергии. Однако из большинства определений видно, что общее понятие энергии в термодинамике вводится через понятие видов энергии или ее форм. Общефилософское определение понятия энергии имеет вид: *энергия* – это общая мера различных форм материального движения. Исторически концепция энергетического взаимодействия сформулирована для физических систем и физических форм движения материи. Энергетический принцип является незыблемой основой научного мировоззрения в физике. Однако вопрос применимости этой концепции к нефизическим системам сегодня пока остается открытым. То, что должна существовать универсальная мера движения материи в любых системах, – не подвергается сомнению, но сводится ли эта мера только к формам обмена энергией – крайне непростой вопрос, также как и вопрос о всеобщности этой меры для различных форм движения материи.

Достаточно важным для дальнейших сопоставлений и обобщений является понятие фазы в термодинамике. Термодинамическая система называется *гетерогенной*, если она состоит из качественно различных по своим свойствам частей, разграниченных поверхностями раздела. При переходе через поверхность раздела хотя бы одно термодинамическое свойство изменяется скачкообразно: лед – вода, вода – пар и т.д. Система, в которой нет поверхностей раздела, называется *гомогенной*. Гомогенные системы однородны, но иногда бывают и неоднородными, что обусловлено непрерывным изменением свойств в пространстве. Части гетерогенной системы, разделенные поверхностями раздела, называются *фазами*. То есть гетерогенная система может состоять из гомогенных частей. Фазам присущи существенные, чаще всего качественные различия. Наиболее сильные и отчетливо выраженные фазовые различия характерны для агрегатных состояний вещества – твердого, жидкого и газообразного. Практически все вещества могут находиться в этих агрегатных состояниях. Таким образом, понятие фазы тесно связано с качественными признаками состояния систем. Данные состояния обладают существенными отличиями и могут меняться под действием внешних условий.

Уравнения, которые связывают между собой термодинамические параметры системы z_k в равновесном состоянии, называются *уравнениями состояния*. Данные уравнения записываются в виде:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0. \quad (1)$$

Уравнения состояния имеют эмпирический характер. Законы Чарльза и Гей-Люссака, объединенные с гипотезой Авогадро, дали известный газовый закон $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$, который явился, возможно, первой важной зависимостью для свойств веществ в термодинамике. Отклонения от закона идеального газа, часто очень малые, были связаны с природой молекул. Уравнение Ван-дер-Ваальса, вириальное уравнение, а также другие уравнения состояния, которые количественно выражают эти отклонения, сильно повлияли на прогресс в развитии термодинамики [15]. Уравнения состояния обобщают опытные данные и являются в термодинамике связывающим звеном между теорией и экспериментом, причем эта связь осуществляется на уровне использования эмпирических закономерностей.

Базовым принципом в термодинамике является принятие гипотезы о существовании *энтропии*. Удивительно, но единого общепринятого определения энтропии в термодинамике нет. Можно привести более десятка известных определений, которые даны классиками термодинамики и различными авторами. Гипотеза о существовании энтропии в термодинамике – неоспоримый факт, тесно связанный со вторым началом, это один из «китов», на котором стоит «здание» этой науки. Объем опытных данных, которыми располагает термодинамика, оказывается достаточным для того, чтобы при их анализе на основе закона сохранения энергии сформировалась отчетливо выраженная гипотеза существования энтропии. Однако при современном уровне знаний принцип существования энтропии рассматривается как отдаленное логическое следствие закона сохранения энергии. Сегодня в термодинамике существование энтропии не постулируется в качестве самостоятельного принципа. Здесь согласимся с утверждением автора работы [5, с. 371], что такое решение проблемы в общепринятой системе изложения основ термодинамики ни в какой мере не подготовлено и не оправдано. Эта система даже не располагает понятиями и терминами, с помощью которых можно было бы кратко и ясно сформулировать самостоятельный принцип существования энтропии. Именно этот факт множественности определений энтропии, скорее всего, и приводит к вопросам, связанным с неполной ясностью в этой области.

Возможность существования равновесных состояний характеризуется *термодинамической вероятностью*. Здесь тоже не просто дать однозначное определение, так как оно тесно связано с методами оценки и подсчета этой величины. Причем, при

использовании понятия термодинамической вероятности нет явно выраженной связи с наблюдаемыми событиями, как это принято в теории вероятности. Данную вероятность в термодинамике определяют на основе использования теоретических методов статистической физики и «увязывают» с энтропией системы (уравнение Больцмана). Необходимость теоретического определения вероятностей состояний систем в равновесных условиях вызвана отсутствием возможности опытной оценки этой величины. В экспериментальной термодинамике ее можно косвенно оценить вычислением энтропии по температурному ходу теплоемкости на основе теплового закона Нернста. Однако, справедливость соотношения Больцмана в виде уравнения (8) для других термодинамических систем, кроме идеального газа, остается открытым вопросом, который без привлечения эмпирических данных не может быть решенным.

В термодинамике имеется также значительное количество других определений, однако они выходят за область исследований данной статьи и рассматриваться не будут, за исключением некоторых понятий, о которых будет сказано ниже.

На следующем этапе в термодинамике вводится ряд важных эмпирических и теоретических соотношений и закономерностей, имеющих существенный характер для ее методологии и последующей разработки математического аппарата.

На первое место в этом плане выходит закон сохранения и превращения энергии (первое начало термодинамики). Это универсальный закон, являющийся одним из краеугольных камней всего естествознания. Общий термодинамический метод, лежащий в основе исследования взаимодействий системы с окружающей средой [5], предполагает, что каждому взаимодействию особого рода приводится в соответствие некоторая физическая величина – координата состояния z_k . Общему покою системы (равновесию) отвечает постоянство координат состояния. Соответствующей координате отвечает одна степень свободы системы. Каждому воздействию данного рода и, следовательно, каждой координате, устанавливают в соответствие также некоторую физическую величину – потенциал взаимодействия P_k . Равенство потенциалов внешней среды и системы является необходимым и достаточным условием для равновесия. В условиях неравновесного взаимодействия потенциалы внешней среды и системы имеют различные значения. Таким образом, изменение координаты при воздействии возможно только

при наличии разности потенциалов. В каждом термодинамическом состоянии система обладает строго определенными свойствами и этому состоянию отвечает совокупность вполне определенных значений потенциалов и координат, которые являются, в свою очередь, также параметрами состояния системы. Среди множества всех процессов не все переходы из одного состояния системы в другое возможны.

Соответствующие координаты и потенциалы в виде уравнения $dE_k = P_k dz_k$ определяют вид переносимой энергии и входят в закон сохранения и превращения энергии в качестве параметров. Принятое в термодинамике определение энергии носит всеобщий характер. Различают следующие виды энергии: механическая, тепловая, внутренняя, электромагнитная, гравитационная, химическая, ядерная и т.д.

Основное уравнение для определения изменения внутренней энергии (U) системы в качестве фундаментального закона через потенциалы и координаты представляется в следующем виде:

$$dU = \sum_{k=1}^n P_k dz_k . \quad (2)$$

Понятие внутренней энергии в термодинамике имеет глубокий физический и математический смысл. Следствием этого является факт того, что существует однозначная функция координат состояния, полный дифференциал которой равен сумме всех элементарных количеств воздействий разного рода. Если внутренняя энергия известна как функция координат, т.е. определен вид зависимости $U = U(z_1, z_2, \dots, z_n)$, то потенциалы могут быть выражены через уравнения состояния:

$$P_k = P_k(z_1, z_2, \dots, z_n) = \left(\frac{\partial U}{\partial z_k} \right)_{z_i} . \quad (3)$$

При выводе термодинамических уравнений в качестве координат используются объем, масса, энтропия, а в качестве потенциалов – давление, химический потенциал, температура. Координаты обычно являются аддитивными величинами. Потенциалы в такой трактовке, в отличие от обычных термодинамических потенциалов (энергии, энтальпии, свободной энергии), не являются аддитивными величинами. В классическом виде уравнение сохранения и превращения энергии в термодинамике записывается в дифференциальной форме:

$$\delta Q = dU + p \cdot dV + \sum_{k=1}^n P_k dz_k , \quad (4)$$

где δQ – элементарное изменение количества тепла, поступившего в процессе изменения состояния системы; dU – полный дифференциал энергии системы; $\delta A = p \cdot dV$ – элементарная работа, совершенная в процессе изменения состояния системы; $dE_k = P_k dz_k$ – составляющие других определенных видов переносимой энергии.

Часто первое начало в термодинамике приводят в виде различных формулировок. Среди них можно выделить следующие варианты изложения первого начала:

- энергия не исчезает и не возникает вновь, она лишь переходит из одного вида в другой в различных физических и химических процессах;
- осуществление вечного двигателя первого рода невозможно;
- энергия является однозначной функцией состояния и не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое;
- бесконечно малое изменение внутренней энергии является полным дифференциалом.

В современном представлении, несмотря на простоту, глубокое содержание первого закона термодинамики нелегко сформулировать ясно и кратко [16]. Это основная причина того, что различные авторы по-разному формулируют первое начало. Более того, если математическая формулировка закона в классическом виде, связывающая теплоту, энергию и работу ($dQ = dU + dA$), является непосредственным обобщением опытных данных по тепловым взаимодействиям, то в принятом современном виде (4) – это уже результат логического обобщения всех имеющихся в физике экспериментальных данных и накопленного практического опыта.

В свое время Э. Нётер (теорема Нётер) показал существование связи между свойствами симметрии физической системы и законами сохранения, когда независимости свойств системы от выбора начала отсчета времени соответствует закон сохранения энергии. Физик А. Пуанкаре указывал на то, что выбор функции, которую называют энергией, оказывается условным и, единственная возможная формулировка первого закона для физических систем формулируется в виде «существует нечто остающееся постоянным». Данная формулировка охватывает как закон сохранения энергии, так и закон сохранения массы. Это «нечто» представляет собой математическую функцию, физический смысл которой интуитивно до конца не ясен [12, 17].

В свете использования метода термодинамики в нефизических науках, эта

формулировка закона сохранения выглядит наиболее общей.

Следующим фундаментальным законом термодинамики является ее второе начало. Содержание второго начала также невозможно определить сжатой формулировкой. В работе [7] дается анализ 18 важнейших формулировок этого закона, в работе [40] – 16 формулировок. Среди них выделим следующие наиболее распространенные изложения второго начала:

- невозможен процесс, имеющий единственным своим результатом превращение тепла в работу;
- теплота не может сама собой переходить от более холодного тела к более нагретому (Клаузиус);
- осуществление вечного двигателя второго рода невозможно (Оствальд);
- наибольший коэффициент полезного действия тепловой машины не зависит от природы рабочего тела и вполне определяется предельными температурами, между которыми машина работает (Карно);
- любой реальный самопроизвольный процесс является необратимым;
- энтропия всякой изолированной системы стремится к максимуму (Клаузиус);
- природа стремится от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным (Больцман);
- энтропия является однозначной функцией состояния и не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое;
- бесконечно малое изменение тепла при равновесном процессе, деленное на абсолютную температуру тела, является полным дифференциалом энтропии;
- уравнение для бесконечно малого изменения теплоты в равновесных процессах вида (4) при любом числе независимых параметров состояния всегда голономно, причем интегрирующим делителем является абсолютная температура;
- в любой окрестности произвольно заданного начального состояния имеются состояния, которые нельзя как угодно точно аппроксимировать адиабатическими изменениями состояния (аксиома Каратеодори).

Для равновесных процессов второе начало термодинамики математически выражается уравнением энтропии:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (5)$$

при этом для любого равновесного термодинамического процесса справедливо уравнение:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (6)$$

Здесь T – абсолютная температура.

Для неравновесных процессов содержание второго начала определяется неравенствами:

$$dS > \frac{\delta Q}{T} \text{ и } \oint \frac{\delta Q}{T} < 0. \quad (7)$$

Следует отметить, что одно из основных соотношений термодинамики, полученное Больцманом и связывающее термодинамическую вероятность W с энтропией системы S вида

$$S = k \cdot \ln W, \quad (8)$$

имеет фундаментальное значение для понимания многих процессов в общей теории систем. Соотношение (8) указывает на то, что существует некоторая однозначная аддитивная функция состояния, получаемая с помощью нелинейного преобразования распределения вероятностей состояния системы. В частном случае для идеального газа подобное преобразование имеет вид уравнения (8).

Для оценки термодинамической вероятности системы вводятся понятия макросостояний и микросостояний. Вероятность макросостояния (некоторого состояния системы) определяется по числу тех микросостояний, которые реализуют данное макросостояние [4, 7]. Термодинамическая вероятность в состоянии равновесия системы достигает максимальных значений.

Обычно за термодинамическую вероятность принимают относительную вероятность $W = P/P_0$, указывающую во сколько раз математическая вероятность P рассматриваемого макросостояния больше, чем математическая вероятность P_0 другого стандартного макросостояния, а именно такого макросостояния, которому отвечает только одно микросостояние. Принципом, позволяющим строго обосновать понятие термодинамической вероятности, является положение, что все микросостояния являются равновероятными с математической точки зрения. Это приводит к *эргодической гипотезе* – с течением времени система должна пройти через все микросостояния, отвечающие заданным макроскопическим условиям.

Для подсчета термодинамической вероятности существуют разные подходы. Известны способы определения этой величины по методам Больцмана, Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака, основанные на комбинаторной статистике [7]. Например, по методу Больцмана, если в системе N элементов (молекул), то число всех возможных перестановок как внутри групп элементов, так и между группами по теории сочетаний равно $N!$. Для определения термодинамической вероятности необходимо исключить все перестановки, которые происходят внутри групп элементов:

$$W = \frac{N!}{\prod_i N_i!}, \quad (9)$$

где N – общее число элементов системы; i – количество групп элементов в системе; N_i – количество элементов в i -той группе.

Однако главное место в статистической физике занимает метод ансамблей, предложенный Гиббсом. При использовании метода ансамблей рассматривают одновременно весьма большое число тождественных термодинамических систем, состояния которых отображаются в гиббсовом фазовом пространстве точками, а термодинамическую вероятность связывают с элементарным объемом фазового пространства и дифференциалом энергии.

В свое время Эйнштейн также предложил метод определения термодинамической вероятности, использующий общепринятые основы статистики. В этом случае под термодинамической вероятностью понимают отношение длительности осуществления данного макросостояния τ_i к общей длительности наблюдения τ , при условии, что общая длительность наблюдения чрезвычайно велика. Данный подход в термодинамике не получил математического развития, т.к. оказалось, что без дополнительных гипотез, исходя из обычной механической характеристики системы, невозможно вычислить термодинамическую вероятность по Эйнштейну. Такая оценка вероятностей широко используется в случаях, когда существует возможность длительного наблюдения за поведением системы. Подобный подход нашел распространение в социальных, экологических и экономических науках, а также в промышленной и экологической безопасности, где вероятность состояния системы оценивается по характерным событиям.

Методы определения термодинамической вероятности основаны на умозрительных гипотезах распределения молекул по фазовому пространству, отвечающих основным термодинамическим представлениям о существовании и поведении вещества.

В свое время Ф. Верле [18] отмечал явные недостатки понятия термодинамической вероятности. Практически термодинамическая вероятность сводится к определению числа благоприятных случаев, в то время как классическая вероятность представляет собой отношение наблюдаемых в опыте благоприятных исходов к общему числу всех возможных исходов. Исключение числа возможных исходов из расчетов оправдано только тогда, когда это число постоянно. Это как раз и имеет место в равновесном идеальном

газе. Поэтому при использовании понятия термодинамической вероятности нет явно выраженной связи с наблюдаемыми событиями, как это принято в теории вероятности.

Существование энтропии является фундаментальным принципом термодинамики, определяющим связь свойств и состояний системы. Следует отметить, что между множеством формулировок второго начала нет принципиальных различий и коренных противоречий. Все это – различные попытки изложения некоторого общего закона природы.

Если выходить за рамки термодинамики, то видно, что применение понятия энтропии необязательно [12, 19, 20]. Анализ состояния исследований в этой области указывает на то, что природа энтропии до конца пока не ясна, т.к. нет однозначного мнения по этому вопросу. Различные точки зрения на содержание понятия энтропии исходят из того, что она является: некоторой субстанцией, связанной с ходом времени; свойством, характеризующим процессы; характеристикой математической модели процесса; информационным параметром процесса [20]. Причины роста энтропии в изолированных системах также имеют несколько трактовок. Следствием этого является то, что авторы по-разному определяют смысл энтропии – мера необратимости процессов; мера структурированности системы; мера сложности системного описания объекта; мера неопределенности ситуации; мера разнообразия, хаотичности и т.д. Все это говорит о том, что второй закон термодинамики является отражением некоторого общего закона природы, который по аналогии с высказыванием А. Пуанкаре может быть сформулирован в следующем виде: в природе существует «нечто» неубывающее при осуществлении и моделировании процессов во времени.

Законы термодинамики, а также приведенные выше соотношения, дополненные методами определения термодинамической вероятности и целым рядом эмпирических закономерностей и уравнений состояний, образуют математический аппарат термодинамики. Теоретической базой большинства дифференциальных уравнений термодинамики является теория дифференциальных пфаффовых форм и соотношения дифференцирования для уравнений нескольких переменных [21]. Вытекающие как следствия дифференциальные соотношения являются основным инструментом термодинамического анализа.

Применение подобной общей методологии моделирования в других областях знаний является актуальной задачей при изучении сложных систем.

Эмпирические закономерности в токсикологии

Перед тем как перейти к развитию математических методов в токсикологии, обобщим основные эмпирические закономерности, которые имеются в этой науке и необходимы будут в дальнейшем.

Здесь по аналогии с предыдущим разделом вначале определим содержание основных элементов понятийно-категорийного аппарата, который будет использоваться для формализации в процессе построения моделей. В простейшем варианте токсикология оперирует сложными системами, в которые входит опасная среда и живой объект, находящийся под влиянием среды. Длительное или интенсивное действие опасной среды обычно приводит к необратимым последствиям у живого объекта. В данном случае опасная среда воздействует на живой объект через опасные факторы, в связи с чем у объекта могут появляться негативные эффекты и последствия в виде различных нарушений, заболеваний и смерти. Используем следующие определения из области опасности и риска, которые возьмем из работы [22].

Окружающая среда – совокупность химических, физических, биологических и др. условий, в которых находится живой объект.

Опасный фактор – химические, физические и биологические компоненты и условия окружающей среды, обладающие опасными свойствами и способные вызвать негативные эффекты и последствия у объектов воздействия при реализации опасности.

Объект воздействия – живые объекты, на которые воздействует опасный фактор окружающей среды.

Воздействие – действие опасного фактора окружающей среды на уровне, создающем негативные эффекты и последствия у объектов воздействия.

Таким образом, опасность окружающей среды реализуется через опасный фактор, который обладает определенными вредными для живого объекта свойствами и может характеризоваться несколькими параметрами.

Исходя из вышесказанного, сформулируем для нашего случая понятие опасной системы в следующем виде.

Опасная система – концептуальная совокупность окружающей среды, формирующей опасность, и объекта воздействия, находящегося под действием опасных факторов среды, которые с течением времени приводят к появлению у объекта негативных эффектов и последствий.

В общей теории систем, в отличие от термодинамики, принято, что состояния сложных систем определяются целым набором

свойств, которые характеризуются параметрами и динамически меняются во времени, поддерживая тем самым устойчивое состояние гомеостаза. Динамика гомеостаза в принципе не предусматривает возможности существования равновесных состояний. Известно, что гомеостаз представляет собой устойчивое динамическое равновесие, или, иначе, динамически относительное постоянство состава и свойств системы. В этом уже видно существенное концептуальное отличие рассматриваемых нами сложных систем от термодинамических систем.

Однако под действием опасного фактора относительное постоянство свойств системы может обладать трендом – изменяться во времени в сторону формирования у объекта воздействия негативных эффектов.

Далее будет показано, что в токсикологии можно построить теорию, учитывающую всю совокупность опытных результатов без разделения состояний системы на различные категории. Именно по этой причине в дальнейшем не используются понятия равновесных и неравновесных состояний. Это указывает на то, что в термодинамике разделение состояний на равновесные и неравновесные использовано для облегчения обоснования понятия обратимости, что в токсикологии в принципе не наблюдаемо.

Возникновение негативных эффектов характеризуется определенной вероятностью, которая в общем случае называется риском.

Риск – вероятность существования особых состояний сложной системы, при которых у объекта воздействия под действием опасного фактора возникают негативные эффекты и последствия.

В токсикологии оценку вероятностей состояний сложной системы основывают на проведении “активных” экспериментов. В этом случае изучают поведение ряда одинаковых по общим показателям живых объектов в искусственно созданных опасных условиях окружающей среды и сравнивают это поведение с поведением группы таких же объектов в обычных условиях (сравнение с контрольной группой или фоном):

$$W_i = \frac{i}{m}, \quad (10)$$

где i – число объектов, у которых наблюдаются негативные эффекты в опасных условиях, m – общее число объектов в опыте.

Например, при оценке ингаляционных токсических воздействий, подобный опыт проводится следующим образом [24]. Выбираются определенные концентрации вредного вещества C_1, C_2, \dots, C_p . В боксах создаются условия для поддержания воздушной

среды с такими концентрациями вещества. В каждый из боксов помещается группа однотипных живых объектов (биологический вид, род, возраст, вес и т.д.) и периодически во времени оценивается количество объектов, у которых возникают устойчивые негативные эффекты определенной степени тяжести. При этом рассматриваются следующие категории тяжести эффекта: “нет эффекта”, “слабый эффект”, “умеренный эффект”, “выраженный эффект”. Параллельно для оценки фоновых уровней проводится опыт с контрольной группой животных в безопасных условиях окружающей среды. Это позволяет в опыте оценить вероятности состояния системы по целой группе объектов путем регистрации характерных событий. При этом появление негативных эффектов не является равновероятным. В токсикологии, в отличие от термодинамики, статистическая оценка вероятностей состояний по характерным событиям проводится эмпирически на основе соотношения (10) без привлечения различных гипотез о взаимосвязи микро- и макросостояний.

Благодаря специальным методикам и масштабным опытам по анализу воздействий веществ на животных в токсикологии накоплен большой эмпирический материал по оценке вероятностей опасных событий.

Обычно опасность воздействия вещества характеризуется одним свойством среды (например, концентрацией вещества) и временем действия среды на объект. Время, как опасный параметр воздействия, присутствует во всех случаях реализации опасности.

Обработка опытных данных опасных воздействий на живой организм осуществляется для различных категорий токсических эффектов, имеющих разную степень тяжести последствий. Чаще всего – это хроническое, острое несмертельное или смертельное воздействие. При этом тяжесть эффектов связана с параметрами опасного фактора.

Опыт практической деятельности и анализ данных, характеризующих токсические воздействия, позволили выработать общую методику оценки опасности воздействий в токсикологии (см. рис. 1). Построение эмпирических моделей риска обычно проводится в координатах *пробит*- $\ln C$ или *пробит*- $\ln \tau$. Инверсное преобразование рисков в пробит-функции выполняется с учетом уравнения (11), которое определяет функцию нормального распределения:

$$W_k(\text{Pr}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\text{Pr}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (11)$$

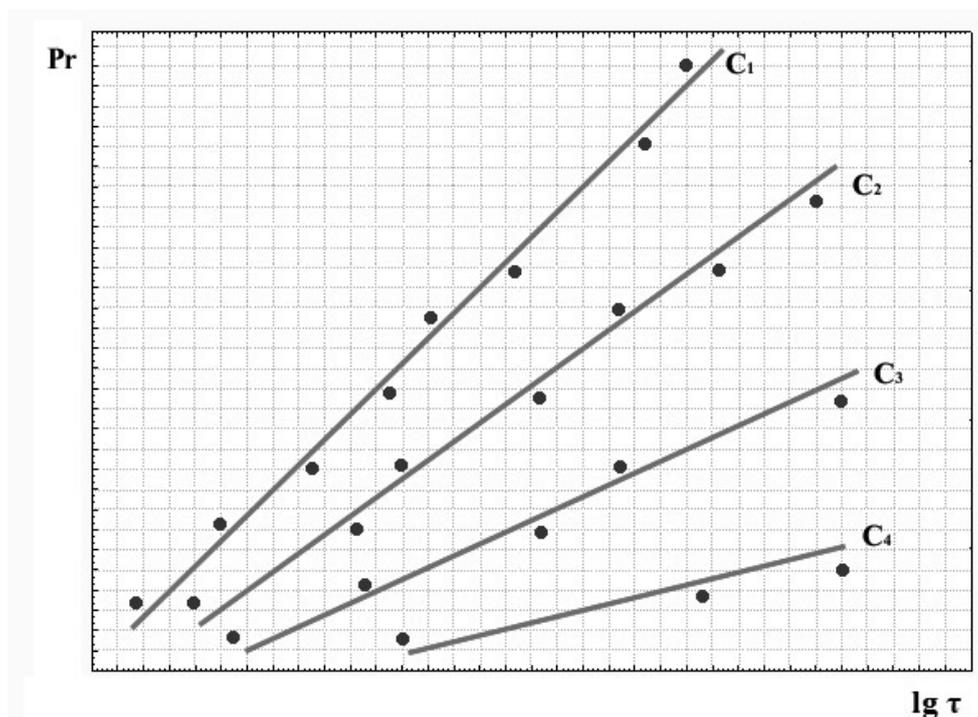


Рисунок 1. – Обработка опытных данных при оценке рисков негативных воздействий в токсикологии

Например, данная методика при обработке опытных данных позволяет получить линейные уравнения в преобразованной системе координат, где по оси ординат откладывается значение пробит-функции Pr , определенное через эмпирическое значение вероятности W_i , а по оси абсцисс – логарифм времени воздействия $\ln \tau$. Линейные зависимости строятся для разных значений концентраций вредных веществ (см. рис. 1).

Методика подобной обработки данных учитывает базовую эмпирическую закономерность, свойственную опасным процессам при воздействии химических веществ, которая имеет логарифмически-нормальное распределение вероятностей возникновения неблагоприятных событий.

Таким образом, при обработке данных широко применяется понятие комплексного показателя опасности, который задается пробитом.

Пробит эмпирически связывают с параметрами фактора опасности в виде [23]:

$$Pr = \alpha + \beta_\tau \cdot \ln C + \beta_c \cdot \ln \tau, \quad (12)$$

где C – концентрация, τ – время воздействия вредного вещества, β_τ и β_c – эмпирические константы.

Использование комплексного показателя опасности в виде (12) обосновано эмпирической закономерностью, суть которой заключается в том, что произведение концентрации, возведенной в степень, на время воздействия

есть величина постоянная при получении эффекта определенной степени тяжести [23]:

$$C^n \cdot \tau = const, \quad (13)$$

где n – характерный показатель степени для определенного опасного вещества.

Построение зависимостей вида (12) при воздействии вредных веществ на животных (см. рис. 1) осуществляется отдельно для каждой категории тяжести эффекта. Это связано с различиями в методах обработки данных по рискам негативных воздействий в хроническом, подостром и остром опыте [24].

Если рассматривать области хронического, острого несмертельного и смертельного воздействий, где значения времени воздействия и концентрации вредного вещества существенно отличаются, то напрашиваются определенные аналогии с фазами в термодинамике.

Вся область возможных воздействий от слабых до смертельных эффектов разбивается на фазовые области, где системе присущи существенные, в данном случае качественные различия. Однако, в отличие от термодинамики, которая изучает свойства веществ в различных агрегатных состояниях, фазовые области не имеют явно выраженных поверхностей фаз.

Покажем, что на основе использования приведенных эмпирических закономерностей вида (10) – (13) и математического аппарата термодинамики можно получить целый ряд новых закономерностей общего характера.

Основные соотношения и дифференциальные уравнения системодинамики для токсикологии

Данный раздел посвятим выводу основных соотношений и дифференциальных уравнений системодинамики для токсикологии, которые являются логическими аналогами соответствующих закономерностей в термодинамике. Этим на практике покажем реальную возможность применения метода термодинамики в науке, в основе которой лежит нефизическая теория. Все обобщения попытаемся сделать в следующем разделе, чтобы не усложнять изложение материала.

Эмпирические данные свидетельствуют о том, что токсикологические системы при внешних воздействиях и различных значениях параметров свойств в состояниях для которых справедливо условие $W = const$, обладают одним качеством – заданной категорией тяжести эффекта с четко определенной вероятностью возникновения этого эффекта. Данная вероятность находится согласно (10) по частоте возникновения характерных событий.

Такие состояния токсикологической системы согласно (11) и (12) характеризуются следующим тождеством:

$$Pr = \alpha + \beta_\tau \cdot \ln C + \beta_c \cdot \ln \tau = const. \quad (14)$$

Покажем, что в основе состояний системы с постоянной вероятностью эффекта лежит также и закономерность (13), где особенности категории тяжести эффекта (хроническое, острое несмертельное или смертельное) определены постоянными уравнения (12). Будем считать, что закономерность (13) имеет универсальный характер для этих категорий, а комплексный показатель опасности Pr существует, и ему присуща закономерность аддитивности в виде:

$$Pr(X) = Pr(\tau) + Pr(C), \quad (15)$$

где величина X является мультипликативной функцией длительности воздействия τ и концентрации вредного вещества C для определенной категории тяжести эффекта. В этом случае функциональный вид величины Pr определяется из решения уравнения вида [4]:

$$Pr''(X) \cdot X + Pr'(X) = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) получают путем дифференцирования зависимости (15) по τ и C с учетом закономерности (13). Согласно [4] решение (16) представляется в виде:

$$Pr = \alpha + \beta \cdot \ln X.$$

Тогда на линии, образованной движением фигуративной точки, которая обладает свойством постоянной вероятности состояния системы и при выполнении условия (13), функция Pr будет иметь вид:

$$Pr = \alpha + n \cdot \beta_c \cdot \ln C + \beta_c \cdot \ln \tau = const. \quad (17)$$

Из полученного результата следует, что существование показателя опасности вида (12) уже определяется закономерностью (13). Аналогичным образом в термодинамике уравнение адиабаты вида $p \cdot v^k = const$ определяет вид функции энтропии, которая является аддитивной величиной и также описывается логарифмической функцией относительно термодинамических параметров [4, 7]. В работе [7, стр. 29] представлен аналогичный вывод зависимостей, определяющих закономерности адиабатного процесса в термодинамике. Поэтому, если в каком-либо процессе изменения состояний системы устанавливается общая закономерность вида $z_1^n \cdot z_2 = const$, то для описания поведения этой системы может быть использован аналогичный математический аппарат.

Закономерность (13) определена однозначностью функции вероятности состояния системы при условии, что $W = const$. Если принять гипотезу, что существует однозначная функция вероятности для всех состояний системы, характеризующихся одной категорией тяжести эффекта, следующего вида

$$W = W_i(Pr), \quad (18)$$

то зависимость вида (14) следует из принципа, что при заданных условиях система не может одновременно находиться в двух разных состояниях. Это обосновано опытными данными и следует из эмпирической закономерности (11), где заданной вероятности состояния системы соответствует определенное значение пробита Pr , которое, в свою очередь, связано с параметрами системы согласно зависимости (12).

Вероятность состояний системы, определенная по характерным событиям, и её связь с параметрами состояния через эмпирическую функцию состояния Pr – это та основа, на базе которой могут быть получены основные соотношения. В этом плане следует ориентироваться на общую формулировку второго закона термодинамики, данной в свое время Больцманом: природа стремится от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным.

Функция Pr является полным дифференциалом, т.к. учитывая (12) получим:

$$dPr = \beta_\tau \cdot \frac{dC}{C} + \beta_c \cdot \frac{d\tau}{\tau}. \quad (19)$$

На основе признака Эйлера для пфаффовых форм имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\beta_\tau}{C} \right)_C = \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{\beta_c}{\tau} \right)_\tau = 0.$$

Смысл того, что величина dPr является полным дифференциалом (функцией состояния) заключен в том, что получение определенного

негативного эффекта для объекта воздействия не зависит от пути перехода объекта из состояния 1 в состояние 2. В качестве примера – смертельный эффект для заданных условий с определенной вероятностью (состояние 2) может быть достигнут разными путями перехода системы из состояния 1 в состояние 2.

Непосредственно измерить комплексный показатель опасности Pr нельзя, однако его можно определить расчетным путем через эмпирическое значение вероятности состояния. Для оценки опасности процессов представляет интерес не абсолютное значение показателя Pr , а его изменение при воздействиях. Поэтому необходимо пользоваться относительным значением Pr , заданным от некоторой произвольно выбранной точки отчета.

Если известно значение $Pr_0 = Pr_0(C_0, \tau_0)$ для начальной области той или иной категории эффекта, то комплексный показатель опасности с другими параметрами (например, при концентрации вредного вещества C и длительности воздействия τ) может быть определен из следующего соотношения:

$$Pr(\tau, C) = Pr_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\frac{\partial Pr}{\partial \tau} \right)_C d\tau + \int_{C_0}^C \left(\frac{\partial Pr}{\partial C} \right)_{\tau} dC. \quad (20)$$

Первый интеграл в правой части этого уравнения представляет собой величину показателя опасности при изменении времени воздействия от τ_0 до τ . Второй интеграл представляет собой величину показателя опасности при изменении значения концентрации опасного вещества от C_0 до C . При этом для областей воздействий, которые характеризуют одну категорию эффекта, справедливы следующие уравнения:

$$\left(\frac{\partial Pr}{\partial C} \right)_{\tau} = \frac{\beta_{\tau}}{C} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial Pr}{\partial \tau} \right)_C = \frac{\beta_C}{\tau}. \quad (21)$$

В этом случае изменение комплексного показателя опасности, с учетом (12), будет иметь следующий вид:

$$Pr - Pr_0 = \beta_{\tau} \cdot \ln \frac{C}{C_0} + \beta_C \cdot \ln \frac{\tau}{\tau_0}, \quad (22)$$

где C_0 , τ_0 – некоторые начальные значения концентрации и времени воздействия, характеризующие получение определенной категории тяжести эффекта с заданной вероятностью, например, смертельный эффект с вероятностью 5%. Таким образом, в качестве величины Pr_0 можно задавать значение этого показателя для определенных порогов воздействия соответствующей категории тяжести эффекта.

Из данных результатов следуют определенные аналогии с термодинамическими методами расчета энтропии вещества. По

крайней мере, при определении комплексного показателя опасности Pr может быть использована аналогичная логическая схема расчетов. Однако мы умышленно не ставим знак равенства между величиной Pr и энтропией, так как это пока преждевременно. Обратим внимание на то, что в показатель Pr входит величина времени, а также на то, что Pr – величина безразмерная.

Рассмотрим теперь всю область возможных воздействий на живой объект $\Psi(0 \leq \tau < \tau_0; 0 \leq C < \infty)$, где τ_0 – средняя продолжительность жизни биологического вида. Предположим существование на всей области определения концентрации и времени воздействия однозначной функции вероятности состояния системы, которая комплексно охватывает все категории тяжести неблагоприятных эффектов.

Так как уравнения вида (12) задаются для определенной категории тяжести эффекта, возникает необходимость построения более общих уравнений, например, уравнений следующего вида:

$$Pr = \alpha(\theta) + \beta_{\tau}(\theta) \cdot \ln C + \beta_C(\theta) \cdot \ln \tau. \quad (23)$$

В этом случае возможна оценка вероятности состояния системы по характерным событиям, наблюдаемым на всей области определения переменных τ и C , например, по смертельным эффектам. На основе такой оценки возможно установление соответствия между различными видами эффектов.

Введем уравнение (23) формально. При этом предположим, что величина Pr может иметь размерность. В данном случае переменная θ представляет собой относительный количественный показатель, комплексно характеризующий уровень опасности среды при воздействии. Логическим аналогом этого показателя в термодинамике является температура. Для того, чтобы описать на всей области возможных воздействий Ψ возникновение определенного качества (категории эффекта) необходимо принять гипотезу о существовании такого показателя, характеризующего уровень опасности при воздействии. К этому отметим, что смертельный эффект может наблюдаться также при безопасных концентрациях, но при времени, соизмеримом с максимальным биологическим возрастом вида. Даже при значениях $C = 0$ и $\tau = 0$ (момент рождения) существует определенная вероятность смерти объекта (перинатальная смертность), которая может быть эмпирически оценена.

Введение температуры дало возможность заменять одним измерением всю совокупность измерений всех величин, характеризующих состояние термодинамической системы. Если температура тела меняется, то должен

изменяться помимо температуры еще хотя бы один параметр состояния системы. Это приводит к теореме о существовании уравнения состояния, т.е. к утверждению, что для любой физической системы всегда существует некоторая функциональная зависимость между температурой и остальными параметрами, характеризующими состояние этой системы. Подобный логический подход может быть реализован и в токсикологии.

Таким образом, при создании теории мы подошли к необходимости построения на основе опытных данных уравнения состояния токсикологической системы и введения некоторого показателя, обобщенно характеризующего *уровень* опасности при воздействии. Так как этот вопрос сам по себе достаточно обширен, то его пришлось проработать отдельно в другой статье. Поэтому здесь примем факт существования такого показателя и соответствующих уравнений состояния токсикологической системы. Для ознакомления с методикой шкалирования опасности и построения таких уравнений отправляем к статье «Построение уравнений состояний сложных токсикологических систем», помещенной в этом сборнике.

Для дальнейших выводов используем простейшее эмпирическое уравнение состояния токсикологической системы, которое было получено в упомянутой статье в виде:

$$C \cdot \tau = R_i \cdot \theta. \quad (24)$$

В рамках данного исследования мы подошли к построению некоторого уравнения сохранения, которое может быть определено по аналогии с термодинамикой, как первое начало. Пока не делаем никаких предположений относительно этого уравнения и попробуем вывести его из имеющихся эмпирических соотношений.

Определим с учетом уравнений (19) и (24) количество воздействия в следующем виде:

$$dQ = \theta \cdot dPr = \theta \cdot \left(\beta_\tau \cdot \frac{dC}{C} + \beta_c \cdot \frac{d\tau}{\tau} \right) = \\ = \frac{1}{R_i} (\beta_\tau \cdot \tau \cdot dC + \beta_c \cdot C \cdot d\tau). \quad (25)$$

Преобразуя данное уравнение, получим следующее соотношение:

$$dQ = dU + C \cdot d\tau, \quad (26)$$

где величина dU равна:

$$dU = \frac{1}{R_i} (\beta_\tau \cdot \tau \cdot dC + \beta_c \cdot C \cdot d\tau) - C \cdot d\tau.$$

Применяя к последнему уравнению признак Эйлера для пфаффовых форм, получим, что dU является полным дифференциалом (функцией состояния) при выполнении следующего условия:

$$\beta_c - \beta_\tau = R_i. \quad (27)$$

Легко показать, что в этом случае $dU = \beta_\tau \cdot d\theta$, $d(U + C \cdot \tau) = \beta_c \cdot d\theta$ и $n = \beta_\tau / \beta_c$. То есть величины dU и $d(U + C \cdot \tau)$ зависят только от показателя уровня опасности θ .

В результате в нашем случае получен логический аналог уравнения Майера в термодинамике. Отметим, что на основе опытных данных всегда можно построить уравнения (12) и (24) так, что условие (27) будет выполняться с определенной степенью приближения.

Это возможно или путем определения регрессионных зависимостей вида (12), или за счет построения уравнения (24) и нахождения коэффициентов n в закономерности (13).

Далее в упомянутой выше статье этого сборника определяются величины R_i , n , β_τ и β_c для основных опасных веществ.

Обратим внимание, что мы пока умышленно не вводим никаких новых определений, так как суть величин U и $(U + C \cdot \tau)$ далека от соответствующих аналогов (энергия и энтальпия) в термодинамике. Например, размерности этих величин задаются как $[мг \cdot мин / м^3]$, а уравнение (26) является определенной формой закона сохранения массы и определяет интенсивность поглощения вредного вещества живым объектом.

Известно, что для каждого биологического вида имеются характерные показатели, отличающие данный вид от других видов. При оценке риска ингаляционных воздействий широко используют осредненные для живых объектов одного вида такие показатели как скорость дыхания V [$м^3 / мин$] и масса живого объекта M [$кг$], а также средняя продолжительность жизни биологического вида τ_0 [$мин$]. Стандартные значения этих величин приведены, например, в [23]. Умножив (26) на постоянную величину $\gamma = V/M$, представим уравнение (26) в виде закона сохранения дозы:

$$d\bar{Q} = d\bar{U} + \bar{I} \cdot d\tau, \quad (28)$$

где $\bar{Q} = Q \frac{V}{M}$, $\bar{U} = U \frac{V}{M}$, $\bar{I} = C \frac{V}{M}$, при этом \bar{Q} и \bar{U} имеют размерность дозы [$мг / кг$], а \bar{I} – интенсивности дозы [$мг / (кг \cdot мин)$].

После того, как показана справедливость уравнения (26), легко вывести целый ряд других дифференциальных соотношений. Например, логические аналоги термодинамических уравнений Максвелла в токсикологии могут быть получены из уравнений $dU = \theta \cdot dPr - C \cdot d\tau$, $d(U + C \cdot \tau) = \theta \cdot dPr + \tau \cdot dC$ и др. в виде:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)_{Pr} = -\left(\frac{\partial C}{\partial Pr}\right)_{\tau}; \left(\frac{\partial \theta}{\partial C}\right)_{Pr} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial Pr}\right)_{C};$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \theta}\right)_{\tau} = \left(\frac{\partial Pr}{\partial \tau}\right)_{\theta}; \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right)_{C} = -\left(\frac{\partial Pr}{\partial C}\right)_{\theta}. \quad (29)$$

Из соотношения (12) с учетом (24) можно получить следующие уравнения:

$$Pr = \alpha' + \beta_{\tau} \cdot \ln \theta + (\beta_c - \beta_{\tau}) \cdot \ln \tau, \quad (30)$$

$$Pr = \alpha'' + \beta_c \cdot \ln \theta - (\beta_c - \beta_{\tau}) \cdot \ln C, \quad (31)$$

где α' и α'' – некоторые постоянные. Из уравнений (30) и (31) можно получить:

$$\beta_{\tau} = \theta \cdot \left(\frac{\partial Pr}{\partial \theta}\right)_{\tau} \text{ и } \beta_c = \theta \cdot \left(\frac{\partial Pr}{\partial \theta}\right)_{C}. \quad (32)$$

Дальше легко получить все другие логические аналоги уравнений термодинамики, которые изложены, например, в [21].

Из приведенного выше материала видны определенные системные аналогии в построении моделей в термодинамике и токсикологии. Нами практически построен математический аппарат токсикологии на основе использования эмпирической зависимости (12) применительно к вероятности состояний системы, а также простейшего уравнения состояния вида (24). Однако в данном примере некоторые положения были применены формально, исходя из аналогии с принятыми подходами в термодинамике. В дальнейшем обоснуем это более строго.

Сформулируем основные определения для полученных величин и приведем их размерности. При этом нам придется дать новые названия некоторым величинам. Используемые в статье величины сведены в таблицу 1.

Показатель уровня опасности при токсикологическом воздействии θ назван *вирулентурой* – от слова вирулентный (*лат. virulentus* – ядовитый), что означает болезнетворный, способный вызвать заболевание или смерть. Данный показатель является индексом, он определяет уровень опасности среды по комплексу опасных свойств и его шкала строится путем градации возможной области воздействия. Градация – это постепенный переход от одной ступени (этапа, эффекта) к другому, расчленение переходного процесса на последовательно расположенные области. Единица измерения показателя θ – градус опасности (*gradus* – ступень).

Каждый живой организм в заданном состоянии обладает внутренней мерой, определяющей его жизнеспособность, говоря простым языком «жизненной силой». Для оценки опасности это может быть общая мера жизнеспособности, относительное изменение которой следует вести от состояния «смерть объекта». Поэтому назовем эту меру *вирулентностью*, и определим ее как общую меру жизненной активности объекта.

Таблица 1. – Основные используемые величины и их размерности

Величина	Обозначение	Размерность
Концентрация	C	$мг/м^3$
Время	τ	$мин$
Масса биологического объекта	M	$кг$
Скорость дыхания объекта	V	$м^3/мин$
Биопоказатель вида	$\gamma = V/M$	$м^3/(мин \cdot кг)$
Вирулентура – уровень опасности при воздействии	θ	$^{\circ}\Gamma$, <i>градус опасности</i>
Пробит (размерный)	Pr	$мг \cdot мин / (м^3 \cdot ^{\circ}\Gamma)$
Вирулентность	\bar{U}	$мг/кг$
Количество воздействия	\bar{Q}	$мг/кг$
Доза	$\bar{I} \cdot \tau$	$мг/кг$
Интенсивность дозы	\bar{I}	$мг/(кг \cdot мин)$
Удельная вирулентность	$U = \bar{U}/\gamma$	$мг \cdot мин / м^3$
Удельное воздействие	$Q = \bar{Q}/\gamma$	$мг \cdot мин / м^3$
Вируемкость	$B = d\bar{Q}/d\theta$	$мг/(кг \cdot ^{\circ}\Gamma)$
Вируемкость при постоянном времени	B_{τ}	$мг/(кг \cdot ^{\circ}\Gamma)$
Вируемкость при постоянной концентрации	B_c	$мг/(кг \cdot ^{\circ}\Gamma)$
Удельная вируемкость	$\beta = B/\gamma$	$мг \cdot мин / (м^3 \cdot ^{\circ}\Gamma)$
Удельная вируемкость при постоянном времени	$\beta_{\tau} = B_{\tau}/\gamma$	$мг \cdot мин / (м^3 \cdot ^{\circ}\Gamma)$
Удельная вируемкость при постоянной концентрации	$\beta_c = B_c/\gamma$	$мг \cdot мин / (м^3 \cdot ^{\circ}\Gamma)$
Индивидуальная токсическая постоянная вещества	R_i	$мг \cdot мин / (м^3 \cdot ^{\circ}\Gamma)$

Вирулентность \bar{U} может комплексно характеризовать состояние живого объекта при токсическом воздействии. Как было показано выше, вирулентность является функцией состояния и величина $d\bar{U}$ представляет собой полный дифференциал. Поэтому изменение вирулентности $\Delta\bar{U}$ в каком-либо токсическом процессе зависит только от ее значений в начальном \bar{U}_1 и конечном \bar{U}_2 состояниях и не

зависит от характера этого процесса или от значений вирулентности в промежуточных состояниях данного процесса.

Химическое воздействие опасной окружающей среды на живой объект осуществляется путем поглощения им определенной дозы вредного вещества. Доза – это форма переноса вирулентности между живым объектом и опасной средой.

Поглощение дозы вредного вещества приводит к изменению вирулентности живого объекта. Доза является функцией токсического процесса и определяется произведением интенсивности дозы \bar{I} на время воздействия.

Не всякое поглощение дозы может привести к явно выраженному негативному воздействию на живой организм. В данном случае наличие воздействия мы понимаем как изменение негативного эффекта, то есть необратимый дрейф состояния живого объекта в шкале качеств и увеличение вероятности появления негативных эффектов. В этом случае дифференциал пробита положителен и отличен от нуля, а количество негативного воздействия определено соотношением $dQ = \theta \cdot dPr$. Поэтому второй формой изменения вирулентности является количество воздействия \bar{Q} , приводящее к изменению наблюдаемого негативного эффекта у объекта.

Таким образом, воздействие и доза не являются видами вирулентности, а представляются формами ее переноса. Первая величина определяет получение негативного эффекта объектом и, следовательно, нанесение ему ущерба, а вторая величина характеризует влияние внешних условий на живой объект.

Производная от количества воздействия \bar{Q} по вирулентуре, в каком-либо токсическом процессе названа *вируемкостью*:

$$V = dQ/d\theta.$$

Логическим аналогом этой величины в термодинамике является теплоемкость. Все другие определения сведены в таблицу 1.

В заключение раздела сформулируем начала системодинамики для токсикологии. В этом случае первый закон вида (28), определяющий количественную сторону процессов в токсикологии, имеет фундаментальное значение и гласит:

- вирулентность является однозначной функцией состояния и ее изменение не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое;

- бесконечно малое изменение вирулентности является полным дифференциалом.

Второй закон, определяющий качественную сторону процессов в

токсикологии, можно сформулировать в виде:

- необратимость токсических процессов определена необратимостью времени;

- пробит является однозначной функцией состояния и его изменение не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое;

- бесконечно малое изменение количества воздействия в токсическом процессе, деленное на вирулентуру, является полным дифференциалом пробита.

Таким образом, путем логической аналогии на основе применения термодинамического метода нами построен понятийно-категорийный и математический аппарат для описания токсических воздействий на живые объекты. Предложена система обоснования первого и второго начала в токсикологии. При этом существующий аппарат термодинамики открывает значительные возможности для математического описания токсикологических процессов.

Законы и постулаты системодинамики

«Истинная логика нашего мира –
правильный подсчет вероятностей»
Дж. К. Максвелл

Определим системодинамику как науку о закономерностях процессов развития и изменения сложных систем во времени.

Системодинамика будет рассматривать сложную систему в виде концептуальной совокупности окружающей среды и объектов воздействия, находящихся под действием факторов среды, которые обеспечивают при воздействии появление у объектов некоторых наблюдаемых изменений.

Изначально не делаем предположений о том, является ли изучаемая сложная система живой или не живой. Накладываем только ограничение, что данная система подвержена медленным и непрерывным (эволюционным) изменениям во времени. Нет ограничений на количество элементов, составляющих объект, а также условия их взаимодействия между собой и с окружающей средой. Однако исключены любые мгновенные и скачкообразные (революционные) изменения системы во времени.

Сформулируем теоретические основы системодинамики, исходя из фундаментальных закономерностей природы, которые можно представить в виде трех принципов.

Первый принцип – это объективность законов природы и относительность проводимых в процессе познания измерений, которые позволяют количественно описать закономерности, определяющие процессы

развития и изменения систем.

Второй принцип – эмпирический факт устойчивости частот для наблюдаемых природе событий.

Третий принцип – возможность количественной оценки качеств и свойств сложных систем.

Данные закономерности нашей действительности для большинства объектов, процессов и явлений подтверждены всем практическим опытом человечества.

Теперь нам предстоит переосмыслить содержание таких понятий как состояние системы, качества и свойства системы, вероятность состояния и энтропия, а также некоторых других величин.

Исходя из приведенного в предыдущем разделе примера видно, что основные закономерности поведения токсикологических систем могут быть получены из эмпирических зависимостей, определяющих формирование свойств и изменение вероятности характерных событий. Так как на основе экспериментальных данных о вероятности событий, связанных с состояниями токсикологической системы, нам удалось построить характерный для этой системы закон сохранения, то именно в этой области лежат основные принципы и исходные идеи, необходимые для описания поведения сложных систем.

Сегодня ряд авторов, начиная изложение материала в системном анализе и термодинамике, изначально вводят понятие состояния системы, которое определяется совокупностью значений характерных для данной системы величин, называемых параметрами состояния. Другие авторы изначально используют понятие параметров, которые являются характерными свойствами, определяющими состояние системы. Более четкого определения состояния системы нет. В лучшем случае в термодинамике даются пояснения на примере: вещества обычно пребывают в одном из трех основных состояний: в виде газа, жидкости или твердого тела [4]. Уже из этого пояснения видно, что состояния систем связаны с определенными качествами. В свое время Фальк [16] отмечал, что термодинамика занимается системами и их состояниями, и при любом построении теории роль состояния системы становится основным объектом этой теории.

Известно, что каждый предмет (объект) обладает определенным количеством основных свойств, единство которых и является его качеством. Таким образом, качественная определенность системы – это и есть одна из основ для характеристики ее состояния. Второй основой для характеристики состояния является количественная определенность системы,

связанная с ее свойствами.

При воздействии изменение качества системы обычно связано с событиями – соответствующими фактами, которые могут произойти или не произойти. Эти события характеризуют качественную сторону объекта, в отличие от свойств, которые определяют количественную сторону через параметры состояния. Поэтому состояния системы наряду с количественной определенностью, которая обычно подлежит измерению, должны обладать также и качественной определенностью, которая также может быть измерена или оценена. Говоря философским языком, единство определенного качества и количества, т.е. мера, и определяет состояние системы в заданных условиях.

Сделаем предположение, что вероятность характерных событий, которая связана с изменениями в состоянии сложной системы и множеством качественных признаков, будет выступать количественной оценкой состояния системы по классу качеств.

Таким образом, качественные признаки могут иметь количественное измерение, основанное на оценках вероятностей. Изменение этих признаков при воздействии связано с возникновением определенных событий, по частоте появления которых и может оцениваться состояние системы в процессе изменения ее качества при воздействии.

Сразу отметим, что количественная характеристика качественных признаков на основе оценки вероятностей – это не единственный способ определения качественного состояния системы. Существуют и другие величины для характеристики качества, например, различные комплексные показатели и индексы, которые непосредственно связаны с характерными событиями. Об этом более детально будет сказано далее.

Исходя из приведенного выше, изменение состояния системы можно описать следующей схемой: при воздействии внешних факторов изменяются количественные параметры системы, которые характеризуют определенные свойства этой системы. В свою очередь, изменение свойств системы приводит к созданию условий, при которых накапливаются качественные изменения в системе, которые оцениваются по определенным характерным признакам. При этом значимость признаков определяется по частоте возникновения событий или по изменению выбранных комплексных показателей, характеризующих качественную сторону системы.

В ранее рассмотренном нами примере опасное свойство среды при негативном

в пространстве n -измерений. Например, в интеллектуальном анализе данных широко применяются методы кластеризации и деревья классификации, дающие возможность сформулировать некоторые качественные образы среди объектов одного или разных классов. Здесь уже используются специальные алгоритмы, позволяющие установить связи между качествами и свойствами систем на основе анализа больших массивов информации, которая характеризует изучаемые системы. Однако в данной статье подобные подходы рассматривать не будем.

Вначале рассмотрим первый способ оценки качественного состояния систем.

В процессе анализа вероятность состояния системы может оцениваться на основе двух подходов: по одному или нескольким качественным признакам с получением одной общей оценки w_j . Сразу отметим, что для второго случая вероятность состояния системы в конкретный период времени может рассматриваться как вероятность совместных зависимых или независимых сложных событий (чаще всего зависимых), которые характеризуют определенные качественные признаки. Однако, такие оценки вероятностей состояния системы на основе данных опыта проводят редко. Вообще данный вопрос пока изучен крайне слабо и «шкалирование» полной вероятности состояния систем по различным качественным признакам требует отдельного подробного изучения.

На практике более распространен первый подход, когда вероятность состояния системы в опыте оценивают по одному качественному признаку. Следует отметить, что оценки w_j вида (33) могут даваться для различных качественных признаков в опытах на основе отличающихся методик. В этом случае в эксперименте изучают группу одинаковых по общим показателям объектов и определяют вероятность i -того состояния в виде:

$$W_i = \frac{i}{m}, \quad (34)$$

где i – число объектов, у которых при определенных параметрах системы регистрируются характерные события (наблюдаются различные эффекты) по выбранному качественному признаку; m – общее число объектов в опыте.

Так как обычно при подсчете вероятностей рассматривается весьма большое число тождественных сложных систем одного класса (m), то определенные i -ые состояния на всем множестве состояний отображаются фигуративными точками в n -мерном пространстве. При этом состояние системы

определяется n параметрами. Каждая точка характеризуется набором значений параметров и этой точке устанавливается в соответствие вероятность W_i , определенная по всем m системам в соответствии с уравнением (34). Соответствующее количество систем i , находящихся в определенном i -ом состоянии с параметрами $z_k + dz_k$ определяется эмпирически по опытным данным. Оценка вероятности W_i проводится динамически во времени при выбранных значениях показателей z_k до достижения всеми объектами определенного статистически значимого состояния (активный эксперимент) или ведется непрерывно в течении очень длительного времени с регистрацией событий и определением основных показателей (пассивный эксперимент, например, создание базы данных по землетрясениям или базы данных по социально-экономическим показателям стран и регионов). Подобные эксперименты проводятся для каждого качественного признака при определении чисел w_j функции состояния (33).

Сложность данной проблемы в системном анализе состоит в классификации характерных сложных событий, свойственных каждому j -тому качественному признаку, и определении соответствующих вероятностей на множестве большого количества разных событий.

При выводе основных соотношений системодинамики в качестве исходного положения примем предложенное Каратеодори [9] доказательство существования энтропии.

Предположим, что некоторая величина может быть представлена в виде:

$$dQ = Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n, \quad (35)$$

где z_1, z_2, \dots, z_n – параметры состояния системы; Z_1, Z_2, \dots, Z_n – функции этих параметров.

В термодинамике величина Q – это количество теплоты, и возможность представления этой величины в виде (35) обеспечена известным объемом предварительных знаний, связанных с эмпирическими данными.

В нашем случае зададимся предположением, что для процессов различной природы некая аддитивная величина вида (35) может существовать. Данное выражение понимается как уравнение, которое служит для определения величины dQ через параметры системы в условиях некоторого процесса, медленно изменяющегося во времени.

При обосновании существования энтропии Каратеодори поставил вопрос об условиях, при которых возможно представление

dQ в форме $dQ = T \cdot ds$, где T является интегрирующим делителем, а величина ds – полным дифференциалом.

Для этого им была доказана лемма из теории пфаффовых уравнений: *если в окрестности любой точки n -мерного пространства есть точки, не достижимые вдоль кривых, удовлетворяющих уравнению*

$$Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n = 0, \quad (36)$$

то уравнение вида (35) голономно, и для левой части уравнения обязательно существует множитель, обращающий его в полный дифференциал.

Далее, как универсальное свойство всех термодинамических систем постулируется «адиабатическая недостижимость» – существование в окрестности любого состояния точек, не достижимых вдоль кривых, удовлетворяющих уравнению (36). Вместе с доказанной леммой, это эквивалентно утверждению, что уравнение (36) безусловно голономно и для него существует интегрирующий делитель.

В результате была сформулирована вторая аксиома Каратеодори: «В любой окрестности произвольно заданного начального состояния имеются состояния, которые нельзя как угодно точно аппроксимировать адиабатическими изменениями состояния». Данная аксиома является одной из формулировок второго начала термодинамики.

Из самого факта голономности уравнения (35) Каратеодори выводит, что интегрирующим делителем для выражения элементарного количества теплоты является абсолютная температура [9].

В аксиоматическом направлении учения об энтропии задача обоснования существования энтропии в принципе была решена Каратеодори до конца. При этом к соответствующему математическому доказательству никакие физические гипотезы кроме постулата адиабатической недостижимости не привлекались. Считается, что формальный аппарат доказательства отличается безукоризненной строгостью. Однако, в чем физическая суть принципа адиабатической недостижимости Каратеодори не раскрывается.

Как справедливо утверждает в [5] А.Гухманом, система Каратеодори содержит интересную идею. В общем виде она формулируется следующим образом. Если некоторая величина dQ , о природе которой мы ничего не утверждаем, может быть представлена в виде (35), то присоединение постулата «недостижимости» приводит к заключению, что для dQ существует интегрирующий делитель. Другими словами, величина dQ может быть представлена в виде

$dQ = T \cdot ds$, где T является интегрирующим делителем, а величина ds – полным дифференциалом. В этом случае постулат «недостижимости» излагается согласно [5] следующим образом: если при переходе системы из данного состояния в смежное удовлетворяется требование $dQ \neq 0$, то восстановление первоначального состояния, без нарушения условия $dQ = 0$, невозможно.

Разработанная Каратеодори система обоснования математической структуры количества воздействия может быть непосредственно распространена на воздействия любого рода и любые сложные системы. Единственным ограничением является условие квазистатичности процессов. Это определяется тем, что в ходе развития процесса во времени внешние воздействия должны изменяться достаточно медленно. В этом случае состояниям системы присуща определенная однородность и непрерывность свойств и качеств.

Все сказанное выше, а также обобщение эмпирических закономерностей вида (10) – (13) позволяет нам сформулировать для токсикологических систем следующий постулат «недостижимости» – *токсикологические системы обладают свойством адиабатической недостижимости применительно к вероятности состояния этих систем.* Пока при определении мы пользуемся понятием «адиабаты», хотя в термодинамике оно связано с переносом теплоты. Понятие *адиабаты* мы рассматриваем в широком смысле от слова *adiabatos* «непереходимый» (*греч.*). В нашем случае адиабатная недостижимость – это такое свойство, при котором сложная система имеет четко заданную вероятность каждого состояния, зависящую от параметров состояния, в число которых входит время. То есть вероятность состояния системы представляется в виде непрерывной функции $W = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$, которая оценивается по возникновению характерных неблагоприятных событий. Таким образом, в этом определении адиабата – это геометрическое место точек, для которых выполняется условие $W = const$. При этом вероятность связана с качественно определенными состояниями системы.

Теперь рассмотрим второй способ оценки качественного состояния системы с помощью применения различных комплексных показателей.

Обычно количественные знания о свойствах сложных систем представляются в виде уравнений состояния, которые устанавливают зависимости для параметров применительно к реально осуществимым состояниям той или иной системы. Считается,

что подобные уравнения должны существовать для любых систем, независимо от их индивидуальных особенностей. Уравнения состояния связывают свойства системы через параметры и несут эмпирические знания о поведении систем. Данные уравнения строятся исключительно на основе опытных данных, хотя для выбора вида зависимостей могут применяться те или иные теоретические обоснования.

В условиях медленных и постепенных количественных изменений для многих сложных систем как физической, так и нефизической природы, опытным путем установлен факт существования в каждом конкретном случае меры отклонения состояния системы от характерных состояний, которые выбраны в качестве опорных точек. Это позволяет предложить различные эмпирические способы измерения или определения показателей, характеризующих качественное состояние систем на основе метода градации. Опытный факт существования таких показателей приводит к утверждению, что для системы, отличающейся подобием свойств, всегда существует комплексный показатель в виде семейства функциональных зависимостей, связанный с основными свойствами данной системы, вида:

$$\theta = F(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (37)$$

Обратим внимание на то, что чаще всего для ряда квазистационарных физических систем уравнение состояния не зависит от времени, другими словами время по отношению к нему выступает параметром. Это возможно тогда, когда показатели качества состояния системы могут быть явно выражены относительно свойств. В ряде случаев время может выступать и свойством, например $z_0 = \tau$. Это наблюдается тогда, когда качества и свойства системы имеют необратимый дрейф во времени и время как параметр не может быть исключено из уравнения состояния.

В термодинамике в виде комплексного показателя θ выступает температура, шкалы которой привязывают к фазовым точкам состояния вещества, например, точке плавления льда и кипения воды при нормальном атмосферном давлении.

Основой для понятия температуры является эмпирический факт того, что когда два тела находятся в термическом равновесии с третьим, то они также находятся в термическом равновесии между собой [10]. Если одно из тел использовать как *термометр*, то эмпирическая температура определяется значением функции (37), что является опытным фактом существования уравнения состояния системы.

В том или ином виде показатели или индексы вида (37) используются и в других

областях знаний. Применяются разные методы измерения или расчета таких индексов. В упоминаемой ранее статье данного сборника показана возможность построения уравнения состояния и введения такого индекса для сложной нефизической системы. При этом для построения уравнения вида (37) использовалась логическая схема моделирования, принятая в термодинамике, а измерение опасности среды осуществлялось особым видом «термометров» – стандартизированными живыми объектами.

Однако на практике возможно использование и других подходов, которые позволяют ввести меру подобия свойств системы. В экономике широко распространены при анализе ценообразования биржевые индексы (индексы Доу-Джонса, Муди, фондовых бирж, сводные индексы ООН экспортных цен и т.д.). Фондовые индексы выражают в пунктах, а опорные точки привязывают к определенным временным интервалам (например, индекс Уилшир-5000 имеет базисное значение, установленное на 31 декабря 1980 года).

При оценке уровня развития стран эксперты ООН применяют различные индексы человеческого развития (индексы развития человеческого потенциала в целом и по группам доходов, индекс нищеты населения, индексы развития с учетом гендерного фактора и т.д.). Это так называемые методики ООН: ИРЧП, ИНН-1, ИНН-2, ИРГФ, ПРВЖ и другие [27].

В свою очередь, при анализе землетрясений, цунами, ураганов применяются шкалы интенсивности, которые измеряются в баллах; при оценке уровня загрязнения среды вводят различные комплексные индексы; в метеорологии используют бальную оценку явлений согласно специально созданных атласов, а при распознавании образов – индексы, объединяющие до 100 различных свойств объектов, и т.д.

В статье данного сборника «Методы системной динамики при анализе социально-экономического развития стран и регионов» показана возможность построения уравнения состояния вида (37) для описания процессов, определяющих развитие стран мира. В этом случае при построении моделей социально-экономических систем была использована логическая схема моделирования, принятая в термодинамике.

Таким образом, при построении уравнений состояний может использоваться принцип подобия в поведении системы относительно свойств, который устанавливает соответствие различных состояний системы по отношению к выбранным характерным состояниям. Данные состояния могут определяться как точки перехода из одного

качественно отличного состояния системы в другое, приниматься по соглашению или просто привязываться к выделенным во времени состояниям. В термодинамике эти состояния называются фазовыми точками. В философии – это узловые точки изменения меры, а система таких точек представляет собой узловую линию мер. Между двумя ближайшими узловыми точками вводится шкала комплексного показателя, однозначно связанного с основными свойствами системы, параметры которых определяются по показаниям прибора. Используя эти состояния системы как опорные, обычно строится линейная шкала комплексного показателя или индекса, охватывающего множество некоторых качественных состояний. Для этого первому состоянию ставится в соответствие значение, равное, например, 0, а второму состоянию – значение равное 100. Интервал между этими состояниями принимают за отрезок в 100. Специфику и меру воздействия на систему в данной шкале определяют на основании опытных данных. Измерение показателя или индекса может осуществляться в градусах, балах, процентах и т.д. Термодинамические диаграммы для различных веществ не только характеризуют состояние тела путем определения его свойств в создавшихся условиях, но и позволяют дать качественную характеристику – оценить области, где вещество находится в различных агрегатных состояниях. Это один из распространенных методов построения шкалы θ для уравнения (37).

Как указывалось, существует второй, широко применяемый, способ построения шкалы индекса, при котором опорное состояние привязывают к определенной временной дате. Принимая по соглашению определенную методику расчета индекса и устанавливая в соответствие этому состоянию значение равное, например, 100 пунктов, в дальнейшем отслеживают поведение системы с течением времени. Третий способ, используемый в теории безопасности и науках о природе, позволяет «увязывать» опорные состояния с безопасными, пороговыми или часто наблюдаемыми уровнями. Измерение осуществляется в долях предельно допустимых концентраций, процентах, балах, других относительных величинах и т.д.

Таким образом, предположим, что комплексный показатель, также как и вероятность появления характерных событий, может выступать в качестве одного из способов количественной оценки функции состояния системы вида (37). Функция (37) является непрерывной и на нее также может быть распространен принцип адиабатической недостижимости.

Теперь после сделанных выше пояснений перейдем от частных примеров к процессу анализа систем различной природы.

Обобщая все сказанное выше, первый основной постулат системодинамики, который затрагивает качественную и количественную стороны системы, можно сформулировать в следующем виде: *эволюционно развивающаяся сложная система, имеет однозначную непрерывную функцию состояния, которая может быть оценена путем измерения показателей, характеризующих качественные и количественные изменения в системе.*

Так как вероятность состояния системы определяется по характерным событиям, свойственным данному качественному признаку, то единственным ограничением является существование таких событий и наличие условий для их регистрации. При этом одним из основных параметров, используемых при регистрации событий, выступает время. Аналогичным образом, если существует возможность путем процедуры комплексного измерения поставить в соответствие каждому состоянию системы некоторое число, то это также дает возможность определить функцию состояния по факту качественных изменений в системе. В свою очередь предполагаем, что все основные свойства системы количественно измеряемы и могут быть параметризованы. Следствием первого постулата является то, что функция состояния системы вида (33) является дифференцируемой.

Второй постулат системодинамики сформулируем в следующем виде: *в любом процессе, протекающем в окрестности произвольно заданного и качественно однородного состояния, свойства сложной системы эволюционно развивающейся во времени подобны.*

Этим постулатом мы вводим определенное ограничение на поведение изучаемых сложных систем, при котором наблюдается медленное, постепенное и монотонное изменение качеств и свойств системы. То есть революционно развивающиеся системы, для которых при явно выраженных нестационарных процессах можно наблюдать разрывное или скачкообразное изменение качеств и свойств с нарушением однородности, исключаются из рассмотрения.

Третий постулат системодинамики сформулируем в общем виде: *в любой окрестности произвольно заданного состояния качества и свойства сложной системы однозначно связаны через функцию меры.*

Здесь в философском смысле можно сказать, что мера системы, определяющая органическое единство качественной и количественной определенности каждого состояния, должна обладать свойствами непрерывности и однозначности [25]. В процессе

развития переход от одной качественно отличной ступени процесса к другой должен соответствовать существующей узловой линии мер. При этом, как указывалось, процессы, обеспечивающие явно выраженные скачкообразные переходы, при которых нарушается однородность свойств и качеств системы и взаимосвязь между ними, не рассматриваются. Другими словами мы рассматриваем поведение системы между узловыми точками ее развития.

В процессе построения теории предполагаем, что определенному состоянию сложной системы может быть присуще множество различных качеств при одних и тех же свойствах системы, и рассматриваем максимально возможную область определения свойств системы. Считаем, что каждому качеству соответствует свой признак, который может быть связан с характерными событиями, если они наблюдаемы, или некоторыми комплексными показателями, если они измеряемы. При этом вопрос о том, что представляет собой функция меры (т.е. своеобразное «нечто», на которое указывал А.Пуанкаре) временно оставляем открытым.

Пока достаточно определить функцию меры как особый вид функции состояния системы, получаемой из уравнений вида (33) и определяющей органическую связь между качествами и свойствами системы. Тем самым мы предполагаем существование возможности перехода от внешних координат, используемых в (33), к некоторым внутренним координатам, которые и будут определять функцию меры системы.

Рассмотрим оба способа оценки функции состояния, о которых говорилось ранее.

Из первого способа следует существование однозначной, непрерывной и дифференцируемой функции, определяющей вероятность состояния системы и зависящей от параметров. Таким образом, для выделенного качественного признака на всей области определения свойств, характерных для данного признака, будем иметь следующую функцию вероятности состояния:

$$W = W(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (38)$$

где z_k – параметры состояния, $0 \leq W \leq 1$.

Обратим внимание на то, что вероятность состояния W однозначно связана со временем, т.к. определяется процессом возникновения событий. Поэтому в число параметров может входить время, например, $z_1 = \tau$.

Если рассматривать несколько качественных признаков, то в этом случае будем иметь семейство функций вида (38).

Предположим справедливость принципа «адиабатной недостижимости» применительно к

функции вероятности состояния сложных систем, который в дальнейшем определим как принцип *гомеостатической* недостижимости (от греч. *homoiōs* – подобный, одинаковый; *statos* – неподвижный, стоящий). Сформулируем данный принцип в виде: *в любой окрестности произвольно заданного состояния A для функции вероятности состояния сложной системы есть точки, недостижимые без нарушения условия $dW = 0$.*

Как показано в [5, стр. 360; 10, стр. 203], данный принцип свойственен любой функции $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ различных параметров в случае, если соответствующая пфафова форма относительно этих параметров голономна.

Это означает, что если построить пространство S_{n+1} с n независимыми переменными (параметрами функции) и самой функцией в качестве декартовых координат, то полученные результаты можно будет представить в простой форме [5]:

$$\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = C. \quad (39)$$

Следствием этого является то, что в пространстве состояний S_{n+1} каждому уравнению вида (39) отвечает некоторая гомеостатическая гиперповерхность, для которой параметром служит постоянная C . Различные поверхности, очевидно, не могут иметь общих точек. Если изменение состояния системы подчинено уравнению Пфаффа вида (36), где дифференциал функции $d\Phi$ представляется суммой в левой части, то линия процесса нигде не может выйти за пределы той гиперповерхности, к которой принадлежит начальная фигуративная точка. Ниже мы будем изучать процессы лишь в окрестности обыкновенных точек, т.е. особые точки исключаются из рассмотрения [29].

Таким образом, гомеостатическая недостижимость применительно к вероятности состояния – это такое свойство, при котором сложная система имеет четко определенную вероятность каждого состояния, зависящую от параметров состояния z_k . При этом функция вероятности W представима в виде:

$$W(z_1, z_2, \dots, z_n) = C, \quad (40)$$

где C – константа ($0 \leq C \leq 1$) и число таких констант бесконечно велико.

Соотношение (40) определяет для функции вероятности состояния системы уравнение поверхности в многомерном пространстве, которому соответствует семейство не пересекающихся между собой поверхностей. Фигуративная точка $W(z_1, z_2, \dots, z_n)$, соответствующая при своих перемещениях определенному множеству состояний сложной системы, заданных

условием $dW = 0$, может принадлежать только одной такой поверхности. Другими словами функция вероятности $W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ формирует в пространстве S_{n+1} некоторое скалярное поле, для которого могут быть образованы поверхности уровня вида (40). Если через каждую точку пространства S_{n+1} проходит только одна гладкая поверхность уровня, то для любой точки скалярного поля может быть определен градиент функции $W(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Таким образом, если мы покажем, что дифференциал вероятности состояния системы представляется пфаффовым видом (36), то исходные предпосылки будут удовлетворять известной теореме Каратеодори из теории уравнений Пфаффа [9].

Сформулируем важное для системодинамики утверждение, которое изложим следующим образом: *при справедливости принятых постулатов в любом реализуемом процессе дифференциал вероятности состояния сложной системы при произвольном числе независимых параметров состояния всегда может быть представлен в виде суммы дифференциалов этих параметров, умноженных на соответствующие функциональные множители, зависящие от этих параметров.*

Из данного утверждения следует, что функцию вероятности состояния системы, определенную по характерным событиям для выбранного качественного признака, всегда можно представить в виде пфаффового вида:

$$dW = Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n, \quad (41)$$

где Z_1, Z_2, \dots, Z_n – функции параметров состояния системы.

Поясним справедливость этого утверждения на примере токсикологической системы. Предположим, что динамически во времени проводится обычный токсикологический эксперимент, в котором m живых объектов помещены в опасную среду с определенными параметрами z_k . В начальный момент времени τ все объекты здоровы и отвечают заданным критериям [24]. Однако естественно, что объекты обладают свойственными им индивидуальными особенностями, т.к. в природе не может быть двух абсолютно одинаковых живых существ. Поэтому для каждого i -того объекта существует определенная вероятность получения негативного эффекта определенной категории тяжести $W_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$, которая может быть представлена как функция времени $z_1 = \tau$ и параметров системы $z_k = \{z_2, \dots, z_n\}$. Оценить эмпирически эту вероятность за время Λ

можно, например, по методу Эйнштейна через определение вероятности состояния данного объекта по нескольким показателям и характеристикам организма и сравнение этих показателей с нормой или фоном. Однако, в данном случае, нам вполне достаточно предположения, что такая функция существует.

Обычно хронический эксперимент проводится путем нескольких испытаний. По истечении времени Λ_1 осуществляется первое испытание. Одновременно берутся все m объектов, проводятся токсикологические исследования и определяется различие методов существования эффектов определенной степени тяжести. После этого фиксируется количество объектов i_1 , у которых обнаружены негативные эффекты и все объекты возвращаются в опасную среду. Далее через время Λ_2 проводится второе аналогичное испытание и так далее до совершения R испытаний. Каждый раз по результатам эксперимента определяется эмпирическое значение вероятности $W_r = i_r/m$. Таким образом, основное событие испытания (событие A – получение объектами негативного эффекта определенной категории тяжести за период времени Λ_r) может быть представлено в виде комбинации более простых составляющих событий a_i . Данные события a_i – это получение каждым i -объектом в одном испытании негативного эффекта за период времени Λ_r . События a_i являются независимыми событиями с заданной вероятностью W_i . Так как все события a_i совместны, то по теореме умножения вероятностей [26] получим:

$$W_r(A) = \frac{k_r}{m} = W_1(a_1) \cdot W_2(a_2) \cdot \dots \cdot W_{m-1}(a_{m-1}) \times \\ \times W_m(a_m). \quad (42)$$

Если учитывать зависимость вероятности от времени и параметров системы, то для каждого состояния системы в эксперименте будем иметь:

$$W = W_1 \cdot W_2 \cdot \dots \cdot W_{m-1} \cdot W_m, \quad (43)$$

где вероятности зависят от времени τ и других свойств z_k :

$$W = W(z_1, z_2, \dots, z_n); \quad W_i = W_i(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Аналогичным образом, если для какой-нибудь сложной системы в эксперименте оценка вероятности состояния по качественному признаку проводится путем регистрации несовместных событий, то

$$W = \sum_{i=1}^m W_i(z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (44)$$

Подобные зависимости, основанные на

теоремах сложения и умножения вероятностей, можно получить и для случая, когда в эксперименте регистрируются совместные зависимые события и при расчете вероятностей сложных событий учитываются условные вероятности.

Например, в общем случае реализации опасностей для вероятностной оценки событий используют понятие риска. В классическом определении риск представляет собой вероятность реализации сложного события, приведшего к определенному ущербу или негативным последствиям, которая определяется по следующему уравнению:

$$R(j) = \sum_{i=1}^n W_j(I_i) \cdot P_j(I_i), \quad (45)$$

где $W_j(I_i)$ – условная вероятность нанесения вреда человеку (биосистеме, объекту) в случае реализации опасности величиной I_i при наступлении негативных событий j ; $P_j(I_i)$ – вероятность реализации опасности I_i при наступлении негативных событий j ; n – число возможных опасностей одного класса.

Как видно из зависимостей (43) – (45), в общем случае, вероятности состояний сложных систем, как результат реализации сложных событий, представляются аддитивно-мультипликативными соотношениями относительно вероятностей более простых событий. При этом события классифицируются по уровню сложности и в основе подсчета вероятностей лежат теоремы о сложении и умножении вероятностей событий. Эти теоремы являются основополагающими в теории вероятности. Таким образом, можно показать, что из (43) – (45) или аналогичных зависимостей можно получить дифференциал вероятности dW , который всегда представляется в виде уравнения (41). Для нас сейчас представляет интерес сам факт существования в каждом конкретном случае аддитивно-мультипликативных зависимостей для вероятности состояния системы относительно вероятностей более простых событий. Поэтому, согласно принятому принципу гомеостатической недостижимости и теореме Каратеодори, уравнение для дифференциала вероятности состояния системы вида (41) всегда голономно.

Исходя из этого, дифференциал вероятности состояния системы по выбранному качественному признаку может быть представлен в виде:

$$dW = \chi \cdot d\varphi, \quad (46)$$

где χ – интегрирующий делитель для функции вероятности состояния системы, а $d\varphi$ – полный дифференциал. Как видно из

зависимости (46), вероятность состояния системы является функцией процесса (функцией линии), а величина φ – функцией состояния (функцией точки).

Рассмотрим теперь второй способ оценки функции состояния системы вида (33). Для получения аналогичных выводов о существовании некоторой универсальной функции состояния (см. 46) будем использовать второй постулат системодинамики.

Примем гипотезу, что для любой сложной системы, отличающейся подобием свойств, существует показатель (семейство показателей), выступающий мерой отклонения системы по комплексу свойств от уровня, принятого за базовый. Назовем этот показатель *индексом* состояния системы. Индекс, по аналогии с вероятностью состояния системы, вносит эмпирические закономерности в поведение системы. Поэтому обычно индекс состояния однозначно связан с параметрами, характеризующими свойства системы, и, чаще всего, задается в относительных величинах в «привязке» к опорным уровням.

Данный показатель также как и вероятность появления характерных событий позволяет оценивать состояние системы по факту ее качественных изменений и может иметь целый ряд различных шкал измерения.

Таким образом, ко многим сложным системам можно применить второй постулат о подобии свойств, и в этих случаях возможно существование индекса состояния вида (37) и, как следствие этого, уравнения состояния системы.

Естественно распространить принцип гомеостатической недостижимости и на данный показатель. Будем считать, что индекс состояния системы обладает свойством гомеостатической недостижимости, при котором каждому состоянию сложной системы устанавливается в соответствие свое значение индекса θ . При этом, функция $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$, согласно (37), представляется в виде:

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = C, \quad (47)$$

где C – константа, и число таких констант бесконечно велико.

Для рассматриваемого случая данный принцип приведем в следующей формулировке: *в любой окрестности произвольно заданного состояния A для функции индекса состояния сложной системы есть точки, недостижимые без нарушения условия $d\theta = 0$.*

В термодинамике условие постоянства температуры определяет тепловое равновесие. В общем случае будем считать, что равенство индекса определяет условие равновесия в системе по комплексу свойств и качеств или то, что две системы являются тождественными

(похожими) по комплексу свойств и качеств.

Пусть осуществляется процесс, в результате которого при внешнем воздействии на систему можно перейти от любого заданного начального состояния к любому возможному конечному состоянию системы. Опыт построения функций состояния показывает, что свойства систем выражаются обычно в виде функций времени, то есть в процессе изменения состояния задают n функций вида:

$$z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau),$$

где время выступает параметром.

Учитывая все вышесказанное, будем считать, что реально осуществимые состояния системы однозначно определяются следующим уравнением состояния:

$$\theta(\tau) = F(z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau)). \quad (48)$$

Пусть также функция $F(M')$ определена и непрерывна в замкнутой области D и имеет непрерывные частные производные внутри этой области. В момент времени τ_0 происходит некоторый процесс изменения свойств системы, длительность которого составляет $\Delta\tau$. Будем считать, что этот интервал достаточно мал ($\Delta\tau \rightarrow 0$). Рассмотрим две точки из замкнутой области D :

$$A(z_1(\tau_0), z_2(\tau_0), \dots, z_n(\tau_0)) \text{ и} \\ B(z_1(\tau_0 + \Delta\tau), z_2(\tau_0 + \Delta\tau), \dots, z_n(\tau_0 + \Delta\tau)),$$

определяющие два смежных состояния данного процесса, и которые можно соединить линией процесса AB , целиком лежащей в области D . Исходя из принятого постулата подобия свойств будем иметь [28], что для любой точки M' , лежащей на данной линии, справедливо соотношение:

$$\overrightarrow{AM'} = k \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (49)$$

Таким образом, согласно (49), в окрестности точки A n -мерные вектора параметров свойств вдоль линии процесса AB связаны подобным преобразованием, причем отношение подобия k меньше или равно единице. Как известно на основании [28], при подобном преобразовании справедливы следующие формулы для координат вектора:

$$z'_1 - z_{1a} = k \cdot (z_{1b} - z_{1a}), \quad z'_2 - z_{2a} = k \cdot (z_{2b} - z_{2a}), \dots \\ \dots, \quad z'_n - z_{na} = k \cdot (z_{nb} - z_{na}).$$

Таким образом, состоянию A свойственно уравнение $F(z_{1a}, z_{2a}, \dots, z_{na}) = \theta_a$, а состоянию B – аналогичное уравнение $F(z_{1b}, z_{2b}, \dots, z_{nb}) = \theta_b$. Все другие состояния, соответствующие линии процесса AB , будут определены уравнением $F(z'_1, z'_2, \dots, z'_n) = \theta'$.

Если представить отношение k как

$$k = \frac{\tau - \tau_0}{\Delta\tau}, \quad (50)$$

то фигуративная точка M' за время $\Delta\tau$

опишет линию AB , которая характеризует процесс изменения свойств системы. При этом индекс состояния системы определится для данной фигуративной точки как $\theta' = \theta_a + k \cdot (\theta_b - \theta_a)$.

Принимая точку A в качестве опорного состояния и размещая начало декартовой системы координат z_k в этой точке, получим следующую зависимость:

$$k \cdot \theta_b = F(k \cdot z_{1b}, k \cdot z_{2b}, \dots, k \cdot z_{nb}),$$

или, т.к. точка A выбиралась абсолютно произвольно, в общем случае:

$$k \cdot \theta = F(k \cdot z_1, k \cdot z_2, \dots, k \cdot z_n). \quad (51)$$

Из соотношения (51) следует, что в первом приближении функция индекса состояния для системы, которая обладает подобием свойств, в окрестности любого состояния является однородной [29]. При этом предполагается, что существование зависимости (37) является эмпирическим фактом, при котором эта зависимость может быть представлена на основе опытных данных, по крайней мере, в численном виде.

Теперь становится несколько более понятным характер влияния времени на функцию состояния. Так как величина k (см. уравнение 50) является по отношению к уравнению состояния (37) параметром однородной функции, то для определенных классов однородных функций параметрическое представление свойств относительно времени приводит к тому, что эти параметрические кривые образуют функцию состояния системы в явном виде [29]. Другими словами, если в окрестности точки A производные

$\frac{dz_1}{d\tau}, \frac{dz_2}{d\tau}, \dots, \frac{dz_n}{d\tau}$ одновременно не равны нулю,

то кривая в окрестности рассматриваемой точки представима явным уравнением (37), т.к. эта точка не является особой [29]. В конце данной статьи приводится краткий анализ такой возможности. Именно это характерно для уравнений состояний термодинамических систем, составленных для условий квазистационарных процессов.

Известно, что однородная функция, имеющая непрерывные частные производные, удовлетворяет формуле Эйлера [29]:

$$q \cdot \theta = z_1 \cdot F'_{z_1}(z_1, z_2, \dots, z_n) + z_2 \cdot F'_{z_2}(z_1, z_2, \dots, z_n) + \dots \\ \dots + z_n \cdot F'_{z_n}(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (52)$$

где q – степень однородной функции.

Полученные результаты имеют простую геометрическую интерпретацию в случае трех переменных. Зависимость вида $\theta = F(z_1, z_2)$ представляет собой поверхность в трехмерном пространстве относительно координат θ, z_1, z_2 . Уравнение (52) указывает на то, что в

окрестности опорного состояния поверхность, заданная явным уравнением $\theta = F(z_1, z_2)$ и проходящая через точку A , имеет касательную плоскость в этой точке. В данной плоскости лежат касательные ко всем линиям процессов, проведенным по поверхности θ через выбранную опорную точку.

Если продифференцировать уравнение (52), то можно получить следующее соотношение, представляющее собой пфаффову форму:

$$d\theta = Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 + \dots + Z_n dz_n. \quad (53)$$

Таким образом, при принятых исходных положениях индекс состояния системы в окрестности состояния A также можно представить в виде суммы дифференциалов параметров, умноженных на функциональные множители, зависящие от этих параметров.

Принимая во внимание теорему Каратеодори, получим, что уравнение для дифференциала θ вида (53) всегда голономно. Исходя из этого, дифференциал индекса состояния системы может быть представлен в виде:

$$d\theta = \lambda \cdot d\psi, \quad (54)$$

где λ – интегрирующий делитель для функции индекса состояния системы, а $d\psi$ – полный дифференциал.

Как видно из зависимости (54), индекс состояния системы является функцией процесса, а величина ψ – функцией состояния.

Соотношения (46) и (54) были получены нами разными путями. В первом случае использовались теоремы о сложении и умножении вероятностей событий, во втором случае – постулат о подобии свойств. Можно показать, что если для оценки функции состояния системы использовать понятие относительной вероятности $W' = W / W_a$, так как это делается в термодинамике, то постулат о подобии свойств может быть распространен на функцию W' . В этом случае обеспечивается существование величины, выступающей мерой отклонения системы по комплексу свойств от базового уровня. В качестве опорного состояния здесь выступает состояние A с вероятностью W_a . Тогда в окрестности состояния A по отношению вероятности W' сохраняется справедливость вывода соотношений (48) – (52).

Если обобщить все вышесказанное, то можно утверждать, что справедливость представления уравнений $\theta = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ и $W' = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ в виде (52) определяется существованием функций θ и W' и возможностью разложения этих функций в окрестности опорного состояния A в ряд по формуле Тейлора для случая нескольких

переменных. При этом уравнение (52) может рассматриваться в качестве первого приближения, когда всеми слагаемыми с производными вторых порядков и выше пренебрегают [29].

В соотношениях (46) и (54) величины χ и λ являются интегрирующими делителями, которые при умножении на константу k' сохраняют свои свойства, т.е. величины $k' \cdot \chi$ и $k' \cdot \lambda$ также являются интегрирующими делителями. Поэтому, если разделить уравнение (46) на W_a , то справедливость уравнения сохраняется. Другими словами, постулат о подобии свойств и его следствие в виде однородности функции состояния системы может быть распространен на эту функцию независимо от способа оценки этой величины.

Как следует из соотношений (46) и (54) величины φ и ψ являются функциями точки, значение которых при изменении состояния системы в процессе от начального (A) до конечного (B) состояния не зависит от того, по какому пути идет процесс $A-B$. Например, значение величины ψ определяется только разностью значений функции в начальном и конечном состоянии:

$$\int_{a-b}^b d\psi = \int_a^b d\psi = \psi_b - \psi_a. \quad (55)$$

В данном случае мы подошли к необходимости принятия гипотезы об аддитивности функций состояния φ и ψ , определяемых согласно (46) или (54). Обычно под аддитивностью подразумевают свойство, заключающееся в том, что некоторая величина для системы в целом равна сумме аналогичных величин, относящихся к отдельным частям, областям или элементам системы. Не всегда свойство аддитивности справедливо, но, например, для термодинамических систем большой массы нарушениями аддитивности энергии и энтропии пренебрегают. Аналогичным образом будем считать, что если сложная система обладает значительным числом элементов (объектов), то нарушением свойства аддитивности для функции состояния можно пренебречь.

По аналогии с [9] покажем, что в (54) интегрирующий делитель может быть представлен в форме произведения двух сомножителей. Для этого рассмотрим сложную систему, состоящую из двух произвольно выбранных простых подсистем. Условимся величины, относящиеся к подсистемам, отмечать индексами 1 и 2; величины без индексов относятся к системе в целом. Будем считать, что две подсистемы, имеющие равное значение индекса θ , являются тождественно

одинаковыми. Согласно (53) и принципа аддитивности функции состояния ψ , можно записать:

$$d\psi_1 = \frac{d\theta}{\lambda_1(\theta, z_1, \dots, z_n)}; d\psi_2 = \frac{d\theta}{\lambda_2(\theta, z_1, \dots, z_n)};$$

$$d\psi = \frac{d\theta}{\lambda(\theta, z_1, \dots, z_n)}; d\psi = d\psi_1 + d\psi_2. \quad (56)$$

Пусть в произвольном процессе система проходит путь от состояния A до состояния B . Очевидно по условию (так как подсистемы совершают один и тот же процесс), что индекс состояния системы на любом участке пути процесса $A-B$ изменяется на одну и ту же величину. Переходя к переменным θ, ψ_1, ψ_2 и учитывая (56) получим:

$$d\psi = \left(\frac{\lambda(\theta, \psi_1, \psi_2)}{\lambda_1(\theta, \psi_1)} + \frac{\lambda(\theta, \psi_1, \psi_2)}{\lambda_2(\theta, \psi_2)} \right) d\theta.$$

Используя рассуждения, аналогичные [9 с.209; 5 с.365], можно показать, что λ/λ_1 и λ/λ_2 не зависят от величины θ . Откуда следует, что:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right) = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right) = 0 \text{ или}$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta}; \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta}. \quad (57)$$

Согласно (56) отмечаем, что λ_1 не зависит от ψ_2 , а λ_2 от ψ_1 . Поэтому равенства (57) возможны только в случае, если выполняется следующее условие:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\ln \lambda_1) = \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln \lambda_2) = \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln \lambda) = g_1(\theta). \quad (58)$$

Здесь $g_1(\theta)$ – некоторая функция, принимающая тождественное значение для обеих произвольно выбранных подсистем и для системы в целом.

Из уравнения (58) получим:

$$\lambda = \Phi_1(\psi) \cdot \exp \left(\int g_1(\theta) d\theta \right). \quad (59)$$

Следствием данного известного в термодинамике вывода [5, 9, 10] является то, что интегрирующий делитель λ представляет собой произведение двух сомножителей, один из которых является функцией индекса состояния θ , а другой – функцией второго параметра состояния системы ψ .

Окончательно, согласно (59), получим:

$$d\theta = \exp \left(\int g_1(\theta) d\theta \right) \cdot \Phi_1(\psi) d\psi. \quad (60)$$

Рассмотрим теперь уравнение (46). Как уже указывалось ранее, одним из основных законов диалектики является закон перехода количественных изменений в качественные. Согласно этому закону изменение качества объекта происходит тогда, когда накопление количественных изменений достигает

определенного предела. Данный закон вскрывает наиболее общий механизм развития природы и общества. В свою очередь, свойство устойчивости относительных частот – одно из основных проявлений закона перехода количественных изменений в качественные, одна из наиболее характерных вероятностных закономерностей. Относительной частотой события \bar{A} называют отношение числа исходов i , в которых появилось событие \bar{A} , к общему числу проведенных испытаний m :

$$p(A) = \frac{i}{m}.$$

Величину p называют статистической вероятностью события \bar{A} .

Если число испытаний невелико, то никакой закономерности в относительных частотах не существует, они целиком зависят от случая. При значительном увеличении числа испытаний относительная частота становится иной: она подчиняется закономерности, которой и является свойство устойчивости.

Многочисленные наблюдения случайных событий показывают, что для большинства событий существует такое число p (свое для каждого события), что относительная частота при достаточно большом числе испытаний мало отличается от этого числа p .

Таким образом, свойство устойчивости частот формулируют в виде: если проводить серии испытаний, в каждой из которых число однотипных опытов достаточно велико, то относительные частоты появления данного события в различных сериях мало отличаются друг от друга, причем это отличие тем меньше, чем больше испытаний в сериях.

Если серии испытаний привязать к различным однотипным системам, входящим в один класс систем, или частям этих систем, то свойство относительных частот будет присуще всем этим системам (подсистемам). При этом, если случайное событие имеет вероятность, то она одна и та же вне зависимости от способа ее нахождения. Вероятность является объективной числовой характеристикой события, выражающей численную меру степени возможности появления этого события.

Именно в этом заключена основная особенность в оценке вероятности состояния сложной системы по сравнению с общепринятым подходом оценки вероятности состояния термодинамической системы. Термодинамические вероятности состояния системы и ее частей определяются как вероятности совместных независимых сложных событий. Практически рассматриваются разные сложные события. На этом принципе построена зависимость Больцмана вида (8). В нашем случае ведется речь об одном и том же сложном

события, характерном для изучаемого качественного признака.

Исходя из сказанного выше, следует, что уравнение (46) должно быть справедливо для однородных систем одного класса, где вероятность одинаковых событий, характерных для качественного признака, оценивается в различных сериях испытаний. Поэтому, если рассмотреть сложную систему, состоящую из двух произвольно выбранных однородных систем одного класса, то, с учетом зависимости (46) и принципа аддитивности функции состояния, получим:

$$d\varphi_1 = \frac{dW_1}{\chi_1(W_1, z_1, \dots, z_n)}; \quad d\varphi_2 = \frac{dW_2}{\chi_2(W_2, z_1, \dots, z_n)};$$

$$d\varphi = \frac{dW}{\chi(W, z_1, \dots, z_n)}; \quad d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2. \quad (61)$$

При справедливости указанного выше свойства устойчивости относительных частот для произвольного процесса, который одновременно совершают системы, можно записать следующее соотношение:

$$dW \approx dW_1 \approx dW_2.$$

По аналогии с (56) – (58) получим, что интегрирующий делитель в (46) также представляет собой произведение двух сомножителей, один из которых является функцией вероятности состояния системы W , а другой – функцией второго параметра состояния φ , т.е.:

$$\chi = \Phi_2(\varphi) \cdot \exp\left(\int g_2(W)dW\right). \quad (62)$$

Далее получим, что:

$$dW = \exp\left(\int g_2(W)dW\right) \cdot \Phi_2(\varphi) \cdot d\varphi. \quad (63)$$

Таким образом, для двух способов оценки качественных изменений в системе с помощью использования комплексных показателей и вероятности появления характерных событий получены похожие зависимости вида (60) и (63).

Для первого случая по аналогии с [9] представим (60) в виде:

$$d\theta = C_1 \exp\left(\int g_1(\theta)d\theta\right) \cdot \Phi_1(\psi) \frac{d\psi}{C_1} \quad (64)$$

и примем обозначение $\Phi_1(\psi) \frac{d\psi}{C_1} = ds'$,

где s' – энтропия системы, которая определена с точностью до аддитивной постоянной.

Выделим множитель, зависящий от индекса состояния системы (θ), в следующей форме:

$$T = C_1 \cdot e^{\int g_1(\theta)d\theta}. \quad (65)$$

Эта универсальная функция может быть принята в качестве абсолютного индекса состояния системы. Неопределенная константа C_1 находится из условий нормирования этой

величины. Согласно (65) абсолютный индекс в своих измерениях не может переходить через значение, равное нулю, – в зависимости от соглашения, он либо только положительный, либо только отрицательный.

Для второго случая представим (63) в виде:

$$dW = C_2 \exp\left(\int g_2(W)dW\right) \cdot \Phi_2(\varphi) \frac{d\varphi}{C_2} \quad (66)$$

и примем обозначение $\Phi_2(\varphi) \frac{d\varphi}{C_2} = ds''$, где s''

также определим как энтропию системы.

Выделим множитель, зависящий от вероятности состояния системы, в форме

$$P = C_2 \cdot e^{\int g_2(W)dW} \quad (67)$$

и определим его как плотность абсолютной вероятности состояния системы. Неопределенная константа C_2 находится из условий нормирования функции P по энтропии s'' . Согласно (67) функция плотности абсолютной вероятности может быть только положительна или равна нулю. Нормирование функции P может осуществляться на бесконечном, полубесконечном или конечном диапазонах. Наиболее распространенные случаи нормировки представляются в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(s)ds = 1; \quad \int_0^{+\infty} P(s)ds = 1.$$

В первом приближении вид функции плотности абсолютной вероятности состояния системы может быть определен из эмпирического распределения вероятностей событий, характерных для выбранного качественного признака.

Таким образом, получено, что в обоих случаях интегрирующий делитель представляется в форме произведения двух сомножителей. Первый сомножитель представляет собой универсальную функцию, связанную с индексом или вероятностью состояния системы, позволяющими оценить поведение системы на основе эмпирических данных. Второй сомножитель связан с энтропией системы s , характеризующей качественные изменения в системе.

Теперь просматривается разница между понятием пробита в уравнениях (18) – (22) и величиной энтропии s , которая введена согласно (66). Величина s может представлять собой как размерную, так и безразмерную величину, в которой размерность вводится через постоянный коэффициент C путем процедуры нормирования и установления соответствия между качествами и свойствами системы.

Таким образом, мы подошли к введению понятия энтропии через функцию состояния системы. В общем случае энтропию можно

определить как *меру качественных изменений* в системе. При этом энтропия системы s вводится как однозначная функция, связанная с характерным числом, которое ставится в соответствие каждому состоянию системы согласно (33) и устанавливается опытным путем.

В нашем случае гомеостатическая недостижимость рассматривается как системный принцип, определяющий возможность существования состояний, при которых системе присуща одна и та же качественная определенность. Однако этот постулат применительно к функции индекса или функции вероятности состояния системы в пространстве n -измерений не обладает свойством самоочевидности. Даже в термодинамике постулат адиабатической недостижимости не выступает в качестве универсального физического принципа, а принимается как гипотеза, которая апостериори подтверждается опытом [5].

В свое время Планк отмечал, что проблема адиабатической недостижимости в термодинамике никогда не была предметом специального изучения, и никто не проводил соответствующих экспериментов. Вся аксиоматика Каратеодори строится на постулате, что пфаффовы формы от n переменных для простых термодинамических систем являются голономными. Это положение в теории Каратеодори недоказуемо, однако оно принимается в качестве первого шага при построении аксиоматики термодинамики.

Естественно, что для случая нефизических систем этот вопрос еще менее изучен. Тем не менее, имеющиеся эмпирические данные для многих сложных систем указывают на то, что реальные процессы протекают в направлении перехода систем от менее вероятных состояний к более вероятным при одновременном изменении качеств и свойств. Если рассматривать эти переходы на всем временном периоде существования системы как единого целого, то движение и развитие системы во времени можно рассматривать как процесс наиболее вероятных качественных изменений в создавшихся условиях. При этом существует множество состояний, при которых наблюдается некоторая постоянная качественная определенность системы при различных свойствах, причем эмпирические данные свидетельствуют о существовании уравнений вида (37) и (38), определяющих поверхности уровня в пространстве n -измерений.

Подведем итоги данного подраздела. Из полученных результатов следует, что в случае, если эмпирические данные для сложной системы могут быть представлены в виде

уравнений (37) и (38), то при справедливости первого и второго постулата системодинамики для системы существует функция состояния, которую называют энтропией.

Таким образом, сформулируем следствие первого и второго начал системодинамики в следующем виде.

Каждая сложная система, отличающаяся подобием свойств, обладает характеристической функцией, называемой энтропией (s), которая является мерой качественных изменений в системе. С течением времени каждому состоянию системы может быть поставлена в соответствие некоторая величина Θ в виде характерного числа, которое устанавливается опытным путем и является оценкой качественного состояния системы. Энтропия и величина Θ однозначно связаны между собой зависимостью вида $ds = \lambda(\Theta) \cdot d\Theta$, где λ – интегрирующий множитель, а ds – полный дифференциал.

В качестве характерного числа Θ могут выступать вероятность состояния системы, связанная с реализацией случайных событий, которые определяют изменение характерного признака системы, или индекс состояния системы, который является мерой отклонения системы по комплексу свойств от уровня принятого за базовый. Все это дает возможность сформулировать следствия, которые изложим в следующем виде.

Необратимость процессов в природе определена необратимостью времени. Движение и развитие системы в шкале времени происходит в направлении реализации наиболее вероятных качественных изменений. В пределах одной качественно отличной ступени развития энтропия системы возрастает. При коренном качественном изменении состояния системы в процессе ее перехода к другой ступени развития энтропия системы может изменяться скачком.

Данное утверждение следует из (66), где дифференциал вероятности состояния для характерного качественного признака всегда положителен. Однако при смене качественного признака в случае перехода системы на новую ступень развития, неизбежен скачок качественных изменений в результате количественных изменений в системе. Подобный скачок связан с появлением нового приоритетного качественного признака, связанного с ранее не наблюдаемыми событиями или состояниями. Другими словами в процессе описания состояния системы осуществляется переход к новой модели вида (37) и (38).

Теперь становится ясно, почему существует множество определений энтропии

[19, 20]. В литературе встречается понятие термодинамической и информационной энтропии, энтропии как меры неупорядоченности состояния системы, меры сложности и т.д. В каждом конкретном случае комплекс качеств системы предполагает наличие различных форм энтропии.

Именно поэтому второе начало термодинамики, несмотря на свою общепризнанность, оставляет у многих исследователей неудовлетворенность. Здесь идет речь не о сомнениях, а именно о неудовлетворенности в логической ясности положений, что связано с размытостью, запутанностью и «многовекторностью» понятия энтропии в современной науке, а также отсутствием общесистемного смысла этого понятия [30].

Из данного раздела уже виден важный научный факт, при котором энтропия является характеристикой математической модели процесса в пространстве n -измерений, и существование такого факта будет обосновано далее в следующем разделе.

Законы сохранения в системодинамике

Попытаемся обобщить результаты, полученные в предыдущем разделе, рассмотрев при этом ряд проблемных вопросов.

Наиболее важный вопрос – это обоснование характера связи между качествами и свойствами системы и определение функции меры. В термодинамике для физических систем обоснование такой связи основано на эмпирическом факте установления закона сохранения энергии вида (4). Что касается систем другой природы, то данный вопрос практически не изучен, и это может быть содержанием важного для системодинамики предмета исследования.

Прежде чем перейти к рассмотрению третьего постулата системодинамики, необходимо применительно к задачам термодинамики изучить следствия результатов, полученных в предыдущем разделе.

Предположим, что существует абсолютный индекс состояния системы T (или абсолютная плотность вероятности P), который может быть представлен в виде функции *независимых* переменных z_k . Данная гипотеза применительно к произвольной сложной системе может быть принята в качестве исходного положения в случае, если имеется эмпирический факт или предположение о существовании зависимостей вида (37) или (38). Далее будем вести речь об индексе состояния системы T .

Исходя из приведенных в предыдущем разделе допущений, индекс состояния $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ в многомерном пространстве переменных z_k будет иметь вид однородной функции степени q , удовлетворяющей формуле Эйлера:

$$T = \frac{1}{q} \left(z_1 \frac{\partial T}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial T}{\partial z_2} + \dots + z_n \frac{\partial T}{\partial z_n} \right). \quad (68)$$

Рассмотрим некоторое опорное состояние A с параметрами $z_k = z_{k0}$ и введем безразмерные переменные $\xi_k = z_k / z_{k0}$, тогда получим (68) в виде:

$$T = \frac{1}{q} \left(\xi_1 \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial T}{\partial \xi_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial T}{\partial \xi_n} \right). \quad (69)$$

Исследование уравнения (69) следует начинать с анализа решения для случая двух переменных. С этой целью рассмотрим линейное уравнение в частных производных первого порядка вида:

$$\xi_1 \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial T}{\partial \xi_2} = q \cdot T. \quad (70)$$

Решение уравнения (70) может быть найдено различными методами, например, методом характеристик или при помощи операционного исчисления [30, 31].

В начале для получения решения (70) используем операционное исчисление двух переменных [30]. Делая замену переменных $x = q \cdot \ln \xi_1$, $y = q \cdot \ln \xi_2$, $s = \ln T$, получим более простое уравнение:

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 1 \quad (71)$$

при следующих граничных условиях: $s(0, y) = a(y)$, $s(x, 0) = b(x)$. Согласно [30] решение уравнения (71) имеет вид:

$$s(x, y) = \begin{cases} b(x - y) + y & \text{при } x > y \\ a(y - x) + x & \text{при } x < y \end{cases}. \quad (72)$$

Предположим, что в окрестности точки A функции $a(y)$ и $b(x)$ могут быть представлены линейными уравнениями вида:

$$b(x) = \alpha_1 \cdot x + \beta_1; \quad a(y) = \alpha_2 \cdot y + \beta_2. \quad (73)$$

Переходя к прежним переменным в уравнении (72), получим:

$$\ln T = \begin{cases} \alpha_1 \cdot q \cdot \ln \frac{z_1}{z_{10}} + (1 - \alpha_1) \cdot q \cdot \ln \frac{z_2}{z_{20}} + \beta_1; \\ \alpha_2 \cdot q \cdot \ln \frac{z_2}{z_{20}} + (1 - \alpha_2) \cdot q \cdot \ln \frac{z_1}{z_{10}} + \beta_2. \end{cases} \quad (74)$$

Первое решение справедливо при $\frac{z_1}{z_{10}} > \frac{z_2}{z_{20}}$, второе решение – при $\frac{z_1}{z_{10}} < \frac{z_2}{z_{20}}$.

Функция T в точке A должна быть аналитической, поэтому при $z_1 = z_{10}$ и $z_2 = z_{20}$

будем иметь $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Из равенств (74) следует, что в этом случае функция $T(z_1, z_2)$ определена и непрерывна в области $\bar{Z}(z_{10} \leq z_1 < \infty, z_{20} \leq z_2 < \infty)$ и дифференцируема при $z_1/z_{10} > z_2/z_{20}$ и $z_1/z_{10} < z_2/z_{20}$. В общем случае, функции $a(y)$ и $b(x)$ не зависят друг от друга, полученное математическое решение предусматривает такую возможность. Существование и единственность аналитического решения уравнения (71) определяется только его граничным условием ($s(0, y) = a(y)$) на оси $x = 0$ или граничным условием ($s(x, 0) = b(x)$) на оси $y = 0$. Однако задание обеих функций $a(y)$ и $b(x)$ не противоречит данному факту, так как согласно (74) получается решение, которое не является аналитическим вдоль прямой $z_1/z_{10} = z_2/z_{20}$.

Если рассматривать уравнение (70) применительно к реальным системам, то соответствующее решение (74) на указанной прямой должно обладать свойством непрерывности.

Таким образом, общее решение (74) можно представить в виде:

$$T = \begin{cases} C \left(\frac{z_1}{z_{10}} \right)^{\alpha_1 \cdot q} \cdot \left(\frac{z_2}{z_{20}} \right)^{(1-\alpha_1) \cdot q} & \text{при } \frac{z_1}{z_{10}} > \frac{z_2}{z_{20}} \\ C \left(\frac{z_2}{z_{20}} \right)^{\alpha_2 \cdot q} \cdot \left(\frac{z_1}{z_{10}} \right)^{(1-\alpha_2) \cdot q} & \text{при } \frac{z_1}{z_{10}} < \frac{z_2}{z_{20}} \end{cases} \quad (75)$$

где $C = \exp(\beta)$ – константа.

Согласно (75) решение уравнения (68) для случая двух переменных $T = T(z_1, z_2)$ представляется однородной функцией q -ого порядка, причем из условия непрерывности этого решения следует, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Рассмотрим полученные общие зависимости применительно к термодинамическим свойствам идеального газа. В этом случае $z_1 = \nu$ и $z_2 = p$, где ν – удельный объем и p – давление. Согласно эмпирическим законам Гей-Люссака и Шарля можно записать, что:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 + a \cdot \theta = a \cdot T; \quad p = \text{const}; \quad (76)$$

$$\frac{p}{p_0} = 1 + a \cdot \theta = a \cdot T; \quad \nu = \text{const}, \quad (77)$$

где θ – эмпирическая температура, $T = \theta + 1/a$ – абсолютная температура, а величина a по существующим данным для идеального газа равна $a = 0,003661$. В ранее принятых обозначениях имеем $z_1/z_{10} = a \cdot T$; $z_2/z_{20} = a \cdot T$ или $a(y) = \ln \frac{z_2}{z_{20}} + \ln \frac{1}{a}$; $b(x) = \ln \frac{z_1}{z_{10}} + \ln \frac{1}{a}$,

откуда $\beta = \ln \frac{1}{a}$; $q \cdot \alpha_1 = q \cdot \alpha_2 = 1$; $\alpha_1 = \frac{1}{2}$; $\alpha_2 = \frac{1}{2}$; $q = 2$. Таким образом, решение (75) для этого случая будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{a} \cdot \frac{p \cdot \nu}{p_0 \cdot \nu_0}. \quad (78)$$

Применяя обозначения $R = a \cdot p_0 \cdot \nu_0$, получаем известное уравнение Клапейрона $p \cdot \nu = R \cdot T$ как следствие решения исходного уравнения (68), определяющего подобие свойств системы в случае двух переменных.

Таким образом, из условия подобия свойств может быть восстановлен абсолютный индекс состояния системы в виде интегральной гиперповерхности $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Однако при этом необходимо иметь экспериментальные данные о поведении системы на границах изучаемого пространства координат $\Psi\{z_1, \dots, z_n\}$. В случае линейной зависимости индекса от параметров системы на границах пространства координат для двух переменных решение представляется мультипликативной функцией вида (78).

Для социально-экономических и экологических систем, в отличие от термодинамических, поведение системы на границах пространства Ψ , заданное уравнениями вида (76) – (77), обычно не известно. Имеются лишь экспериментальные (статистические) данные об изменении состояния системы в прошлом, при этом свойства систем могут быть представлены в виде параметрических зависимостей от времени. Известно, что для получения решений в этом случае может быть использован метод характеристик [31].

Интегральная поверхность уравнения (70) определена в пространстве $\Psi\{\xi_1, \xi_2, T\}$, при этом величины $\frac{\xi_1}{q}$, $\frac{\xi_2}{q}$ и T формируют некоторое поле направлений в этом пространстве. Другими словами в каждой фиксированной точке пространства $\Psi\{\xi_1, \xi_2, T\}$ имеется направление, направляющие косинусы которого пропорциональны $\frac{\xi_1}{q}$, $\frac{\xi_2}{q}$ и T . Интегральные кривые, соответствующие этому полю направлений, являются характеристиками уравнения (70) и определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений [31]:

$$q \cdot \frac{d\xi_1}{\xi_1} = q \cdot \frac{d\xi_2}{\xi_2} = \frac{dT}{T} = ds. \quad (79)$$

Если ввести параметр s , изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (79) примут вид:

$$q \cdot \frac{d\xi_1}{ds} = \xi_1; \quad q \cdot \frac{d\xi_2}{ds} = \xi_2; \quad \frac{dT}{ds} = T. \quad (80)$$

Предположим, что существует некоторая функция воздействия на систему Q , однозначно связанная с абсолютным индексом состояния системы T эмпирической зависимостью:

$$\frac{dQ}{dT} = c_n, \quad (81)$$

где c_n – непрерывная функция. При этом значение величины c_n однозначно определено направлением единичного вектора \vec{n} в произвольной точке A .

В термодинамике величина c_n является теплоемкостью, а функция Q характеризует количество теплоты, которое передается в некотором направлении \vec{n} пространства $\{\xi_1, \xi_2, T\}$ при изменении температуры на величину dT в этом направлении. Известно, что теплоемкость c_n определяется эмпирически и зависит от характера процесса.

Согласно (81) в окрестности точки A имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial z_1} = c_1 \frac{\partial T}{\partial z_1}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z_2} = c_2 \frac{\partial T}{\partial z_2} \quad (82)$$

и уравнение (70) можно представить в виде:

$$\frac{\xi_1}{c_1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi_1} + \frac{\xi_2}{c_2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi_2} = q \cdot T. \quad (83)$$

Характеристики уравнения (83) определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$q \cdot c_1 \frac{d\xi_1}{\xi_1} = q \cdot c_2 \frac{d\xi_2}{\xi_2} = \frac{dQ}{T} = ds. \quad (84)$$

Поэтому, если ввести переменную $ds = dQ/T$, то это уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = 1. \quad (85)$$

Здесь в качестве величин x, y принято $x = q \cdot c_1 \cdot \ln \xi_1$; $y = q \cdot c_2 \cdot \ln \xi_2$. Обратим внимание, что правая часть уравнения (84) представляет собой выражение для энтропии, принятое в термодинамике.

Зададим следующие граничные условия $s(0, y) = f(y)$ и $s(x, 0) = \varphi(x)$. Согласно [30] решение уравнения (85) представляется в виде уравнений:

$$s = \begin{cases} \varphi(x-y) + y & \text{при } x > y \\ f(y-x) + x & \text{при } x < y \end{cases}. \quad (86)$$

Предположим, что в окрестности точки A функции $f(y)$ и $\varphi(x)$ имеют вид:

$$\varphi(x) = \alpha_1 \cdot x + \beta_1; \quad f(y) = \alpha_2 \cdot y + \beta_2, \quad (87)$$

где коэффициенты α_i и β_i отличны от аналогичных коэффициентов в (73).

Тогда по аналогии с уравнениями (74) получим:

$$s = \begin{cases} \alpha_1 \cdot q \cdot c_1 \ln \frac{z_1}{z_{10}} + (1 - \alpha_1) \cdot q \cdot c_2 \ln \frac{z_2}{z_{20}} + \beta_1 \\ \alpha_2 \cdot q \cdot c_2 \ln \frac{z_2}{z_{20}} + (1 - \alpha_2) \cdot q \cdot c_1 \ln \frac{z_1}{z_{10}} + \beta_2 \end{cases} \quad (88)$$

Первое решение справедливо при $c_1 \ln \frac{z_1}{z_{10}} > c_2 \ln \frac{z_2}{z_{20}}$, второе решение – при $c_1 \ln \frac{z_1}{z_{10}} < c_2 \ln \frac{z_2}{z_{20}}$.

Так как общее решение однозначно определено начальными значениями z_1, z_2, s , то из условия $s(z_{10}, z_{20}) = s_0$ получим $\beta_1 = \beta_2 = s_0$.

Будем считать, что решение (88) на интегральной поверхности представлено одной зависимостью при любых z_1 и z_2 , тогда $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и данное решение имеет вид:

$$s - s_0 = \alpha_1 \cdot c_1 \cdot q \cdot \ln \frac{z_1}{z_{10}} + \alpha_2 \cdot c_2 \cdot q \cdot \ln \frac{z_2}{z_{20}}. \quad (89)$$

Для термодинамических процессов идеального газа $z_1 = \nu$; $z_2 = p$, а для изохорного и изобарного процессов соответственно будем иметь [7]:

$$s - s_0 = c_p \cdot \ln \frac{\nu}{\nu_0}; \quad s - s_0 = c_v \cdot \ln \frac{p}{p_0}, \quad (90)$$

где s – энтропия идеального газа, c_p – теплоемкость при постоянном давлении, c_v – теплоемкость при постоянном объеме.

В ранее принятых обозначениях имеем:

$$f(y) = q \cdot c_2 \cdot \alpha_2 \cdot \ln \frac{z_2}{z_{20}}; \quad \varphi(x) = q \cdot c_1 \cdot \alpha_1 \cdot \ln \frac{z_1}{z_{10}};$$

$$c_1 = c_p; \quad c_2 = c_v; \quad q \cdot \alpha_1 = q \cdot \alpha_2 = 1,$$

откуда $\alpha_1 = 1/2$ и $\alpha_2 = 1/2$, $q = 2$ и

$$s - s_0 = c_p \cdot \ln \frac{\nu}{\nu_0} + c_v \cdot \ln \frac{p}{p_0}. \quad (91)$$

Уравнение (91), которое получено методом операционного исчисления [30], представляет собой уравнение Пуассона для адиабаты идеального газа в переменных p, ν [7].

Таким образом, энтропия определена в виде параметра характеристики исходного уравнения (83). При этом согласно (84) энтропия термодинамической системы представляет собой длину дуги векторной линии, в связи с чем она обладает свойством аддитивности [29].

Следует сказать, что метод характеристик, в отличие от операционного метода, значительно быстрее дает необходимый результат: из соотношения (84) вытекает математическая формулировка второго закона термодинамики в виде $dQ = T \cdot ds$. В свою очередь, из системы уравнений (84) при $q = 2$ сразу получаем известное соотношение для термодинамических

систем:

$$ds = \frac{dQ}{T} = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p}. \quad (92)$$

Из этой зависимости для поверхности

$T = \frac{p \cdot v}{R}$ имеем уравнение Пфаффа вида:

$$dQ = \frac{c_p}{R} p \cdot dv + \frac{c_v}{R} v \cdot dp. \quad (93)$$

Теперь представим (93) в виде уравнения первого закона термодинамики:

$$dQ = du + p \cdot dv, \quad (94)$$

$$\text{где } du = \frac{c_p - R}{R} \cdot p \cdot dv + \frac{c_v}{R} \cdot v \cdot dp.$$

Применяя к величине du признак Эйлера, можно показать, что du является полным дифференциалом при условии: $c_p - c_v = R$. Последнее соотношение представляет собой известное в термодинамике уравнение Майера для идеального газа, при справедливости которого величина du равна:

$$du = \frac{c_v}{R} d(p \cdot v) = c_v \cdot dT. \quad (95)$$

Дадим характеристику любого процесса, протекающего в окрестности точки A . Из уравнения (84) с учетом (81) имеем следующий вид характеристических кривых для уравнения (83) в координатах $\{\xi_1, \xi_2, T\}$:

$$q \cdot c_1 \frac{d\xi_1}{\xi_1} = q \cdot c_2 \frac{d\xi_2}{\xi_2} = c_n \cdot \frac{dT}{T} = ds. \quad (96)$$

Далее из уравнения (78) для поверхности идеального газа получим, что

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v}. \quad (97)$$

Введем следующие обозначения:

$$k = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_p}{c_v}; \quad n = \frac{c_n - c_1}{c_n - c_2} = \frac{c_n - c_p}{c_n - c_v}, \text{ тогда}$$

из (92) и (96) с учетом (97) при $q = 2$ имеем:

$$n \cdot \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p}, \text{ откуда } p \cdot v^n = const. \quad (98)$$

В результате из дифференциальных уравнений векторных линий получено уравнение политропы, в котором физический смысл показателя политропы n связан с полем теплоемкостей. При этом приведенное выше обозначение для величины n , можно преобразовать в виде:

$$c_n = c_v \frac{n - k}{n - 1}. \quad (99)$$

Данное уравнение представляет собой известное в термодинамике соотношение для теплоемкостей.

Известно, что вид адиабатного процесса определяется уравнением (92) при $ds = 0$. В этом случае в уравнении (98) показатель $n = k$.

Используя уравнения (92) – (99), в дальнейшем легко получить все основные соотношения термодинамики для любых видов процессов.

Таким образом, на основе постулата о подобии свойств и эмпирических зависимостей (76)–(77), (81) получены основные закономерности термодинамики, в том числе и первый закон термодинамики вида (94) применительно к идеальному газу.

Из приведенных выше результатов можно сделать два вывода. Первый вывод достаточно важен: термодинамика по форме представления математически может быть сведена к геометрии. В этом плане полученные результаты укладываются в программу геометродинамики Дж. Уиллера, которая гласит: «Физика есть геометрия». Вторым выводом важен для системной динамики, и он указывает на то, что полученные результаты свойственны любым сложным системам, для которых возможно эмпирически установить факт существования индекса состояния или вероятности состояния системы как функции двух переменных $\theta = F(z_1, z_2)$ или $W = W(z_1, z_2)$.

Исходя из этого, дадим геометрическую интерпретацию полученных результатов для трех независимых переменных, после чего перейдем к общему случаю. Рассмотрим трехмерное пространство $\Psi\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, где характеристические кривые (79) определяют векторное поле касательных к векторным линиям уравнения (70). Данное поле задается векторной величиной \vec{A} . В каждой точке пространства кроме указанного поля существует также векторное поле \vec{B} , определяемое векторными линиями уравнения (83) вида (96).

Если при этом ввести обозначения $\xi_3 = \frac{T}{T_0}$,

$T_0 = \frac{1}{a}$, $k_T = \frac{c_n}{c_2}$, то векторные поля $\vec{A}(M)$ и

$\vec{B}(M)$ для каждой точки M можно представить в виде:

$$\vec{A} = \frac{\xi_1}{q} \vec{i} + \frac{\xi_2}{q} \vec{j} + \xi_3 \cdot \vec{k}; \quad \vec{B} = \frac{\xi_1}{q \cdot k} \vec{i} + \frac{\xi_2}{q} \vec{j} + \frac{\xi_3}{k_T} \vec{k}.$$

Можно показать, что соответствующее векторное поле \vec{A} является потенциальным, так как вихрь поля равен нулю ($rot \vec{A} = 0$), поэтому возникает задача о нахождении семейства поверхностей $U_a = U_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = const$, которые ортогональны векторным линиям. Как известно, искомые поверхности уровня U_a удовлетворяют уравнению Пфаффа

$$\frac{\xi_1}{q} \cdot d\xi_1 + \frac{\xi_2}{q} \cdot d\xi_2 + \xi_3 \cdot d\xi_3 = 0, \quad (100)$$

и в случае потенциального поля определяются через криволинейный интеграл вида:

$$U_a = \int_{\{1,1,1\}}^{\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}} \frac{\xi_1}{q} \cdot d\xi_1 + \frac{\xi_2}{q} \cdot d\xi_2 + \xi_3 \cdot d\xi_3. \quad (101)$$

Криволинейный интеграл берется по любому пути между выбранной фиксированной точкой $\{1,1,1\}$ и точкой с переменными координатами $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$.

Интегрируя соотношение (101), например, по ломаной линии, состоящей из прямолинейных отрезков параллельных осям координат, и принимая, что $U_{a0}(1,1,1) = 0$, получим:

$$U_a = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_1^2}{q} + \frac{\xi_2^2}{q} + \xi_3^2 \right) - \frac{2+q}{2q}, \quad (102)$$

откуда $\vec{A} = \text{grad } U_a$.

Векторное поле \vec{B} также является потенциальным ($\text{rot } \vec{B} = 0$), а соответствующее уравнение Пфаффа имеет вид:

$$\frac{\xi_1}{q \cdot k} \cdot d\xi_1 + \frac{\xi_2}{q} \cdot d\xi_2 + \frac{\xi_3}{k_T} \cdot d\xi_3 = 0. \quad (103)$$

В случае потенциального поля \vec{B} поверхности уровня U_b определяются через соответствующий криволинейный интеграл и имеют вид:

$$U_b = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_1^2}{q \cdot k} + \frac{\xi_2^2}{q} + \frac{\xi_3^2}{k_T} \right) - \frac{k_T + k k_T + q k}{2 q k k_T}. \quad (104)$$

Для скалярной величины U_b векторная величина \vec{B} служит градиентом $\vec{B} = \text{grad } U_b$.

Таким образом, для соответствующего векторного поля энтропия s и потенциал U представляют собой соответственно векторную линию и поверхность уровня в трехмерном пространстве $\Psi\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, т.е. на их основе может быть построена ортогональная криволинейная система координат.

Обратим внимание, что потенциал U_b представляет собой не что иное, как безразмерную функцию воздействия на систему, а дифференциал этой функции определяет количество воздействия, т.е. $dU_b = \frac{dQ}{c_2 \cdot T_0} = k_T \cdot d\xi_3$.

Покажем, что уравнение сохранения энергии в термодинамике вида (94) является следствием существования дифференциальных уравнений векторных линий. Для этого представим уравнение (94) в безразмерных координатах относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3 в следующем виде:

$$du' = \xi_3 \cdot ds' - \alpha \cdot \xi_2 \cdot d\xi_1, \quad (105)$$

где $du' = du/(c_v \cdot T_0)$ – некоторый безразмерный полный дифференциал энергии; $ds' = ds/c_v$ – безразмерная энтропия системы;

$\alpha = p_0 \cdot v_0 / (T_0 \cdot c_v)$ – константа.

Рассмотрим вначале случай векторного поля \vec{A} и интегральной поверхности вида (78), которую представим в безразмерном виде $\xi_3 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Учитывая, что в этом случае

$$2 \frac{d\xi_1}{\xi_1} = 2 \frac{d\xi_2}{\xi_2} = \frac{d\xi_3}{\xi_3} = ds', \quad (106)$$

получим $du' = (1 - \alpha) \cdot \xi_2 \cdot d\xi_1 + \xi_1 \cdot d\xi_2$.

Согласно признаку Эйлера величина du' будет полным дифференциалом, если $\alpha = 0$. Откуда $du' = d\xi_3$ и имеем из (105) уравнение векторной линии (106): $ds' = d\xi_3 / \xi_3$.

Рассмотрим теперь случай векторного поля \vec{B} и поверхности $\xi_3 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Учитывая, что в векторные линии поля \vec{B} определяются уравнениями

$$2 \cdot k \frac{d\xi_1}{\xi_1} = 2 \frac{d\xi_2}{\xi_2} = k_T \frac{d\xi_3}{\xi_3} = ds', \quad (107)$$

получим $du' = (k - \alpha) \cdot \xi_2 \cdot d\xi_1 + \xi_1 \cdot d\xi_2$ и, по аналогии с предыдущим выводом, $\alpha = k - 1$,

откуда $\frac{R}{c_v} = \frac{c_p}{c_v} - 1$. В этом случае также

$du' = d\xi_3$ при $R = c_p - c_v$. В результате уравнение сохранения энергии (105) запишем в таком виде: $du' = \xi_3 \cdot ds' - (k - 1) \cdot \xi_2 \cdot d\xi_1$.

Рассмотрим теперь общий случай векторного поля \vec{B} и поверхности $\xi_3 = F(\xi_1, \xi_2)$. Для векторных линий (107) из уравнения (105) получим

$$du' = \left(k \frac{F(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1} - \alpha \cdot \xi_2 \right) \cdot d\xi_1 + \frac{F(\xi_1, \xi_2)}{\xi_2} \cdot d\xi_2.$$

Согласно признаку Эйлера величина du' будет полным дифференциалом, если

$$\alpha = \frac{k}{\xi_1} \frac{\partial F}{\partial \xi_2} - \frac{1}{\xi_2} \frac{\partial F}{\partial \xi_1}. \quad (108)$$

Можно показать из (107), что интегральной поверхностью векторного поля \vec{B} является

поверхность $\xi_3 = \frac{k}{\xi_1^{k_T}} \cdot \frac{1}{\xi_2^{k_T}}$. В этом случае $\alpha = 0$, $du' = k_T \cdot d\xi_3$ и имеем из (105) уравнение векторной линии (107): $ds' = k_T \cdot d\xi_3 / \xi_3$.

Таким образом, геометрически уравнение (105) определяет для векторных полей \vec{A} и \vec{B} семейство линий, ортогональных векторным линиям и принадлежащих поверхностям уровня.

Примеры из термодинамики позволяют наглядно продемонстрировать, как на основе закономерности (68) можно получить основные соотношения, связывающие переменные между собой. Отметим, что при определении индекса состояния системы не использовались другие

допущения кроме постулата подобия свойств при совершении в окрестности состояния A любых возможных квазистатических процессов. Поэтому в общем случае индекс $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ может быть найден из решения неоднородного дифференциального уравнения в частных производных с независимыми переменными [31].

Найдем решение неоднородного линейного уравнения первого порядка вида (68). Данное уравнение интегрируется путем сведения его к линейному однородному уравнению.

Система уравнений

$$\frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz_2}{z_2} = \dots = \frac{dz_n}{z_n} = \frac{dT}{q \cdot T} = ds, \quad (109)$$

имеет следующие n первых независимых интегралов:

$$\frac{z_1}{z_n} = a_1, \frac{z_2}{z_n} = a_2, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n} = a_{n-1}, \frac{T}{q \cdot z_n^q} = a_n.$$

Здесь s – некоторый вещественный параметр.

В пространстве с координатами z_1, z_2, \dots, z_n эта система интегралов определяет n -параметрическое семейство линий, называемых характеристиками уравнения (68), при этом общее решение уравнения (68) определяется из уравнения

$$\Phi\left(\frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, \frac{T}{z_n^q}\right) = 0, \text{ откуда имеем}$$

$$T = z_n^q \cdot \Psi\left(\frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}\right). \quad (110)$$

То есть решением является произвольная однородная функция q -й степени однородности, причем данная функция может использоваться в качестве первого приближения функции состояния системы независимо от способа ее оценки – как по вероятности появления характерных событий, так и путем измерения количественных показателей, комплексно характеризующих качественное состояние системы.

Исходя из приведенных выше результатов, можно предложить следующий способ построения моделей сложных систем, в том числе социально-экономической или экологической природы.

На первом этапе используется эмпирический факт или делается предположение о существовании индекса состояния $T = T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ или вероятности состояния системы $W = W(z_1, z_2, \dots, z_n)$ в виде однородной функции переменных z_k . Предлагаются методы определения или измерения этих величин, а также проводится построение оценочных шкал. Предполагается, что в квазистатическом процессе любые изменения свойств социально-экономической или экологической системы подобны. В этом случае в первом приближении будет справедливо представление функции

состояния системы в виде решения неоднородного линейного уравнения первого порядка вида (68). Далее переменные z_k по опытным данным задаются в параметрическом виде относительно времени, после чего используется один из методов решения уравнения (68). Для построения параметрических уравнений и изучения изменения состояния системы во времени необходимо формирование обширных баз данных социально-экономических или экологических показателей. Адекватность и точность решения уравнения (68) оценивается путем сравнения прогнозных и опытных данных. На этой основе проверяется исходная гипотеза о существовании функции состояния системы в виде одного из решений уравнения (68). Точность модели может быть повышена путем применения более сложных уравнений, использующих решения (68) в качестве первого приближения по аналогии с тем, как это делается в термодинамике при построении уравнений состояния [15].

Таким образом, мы установили, что энтропия системы, которая является характеристической функцией состояния, может выступать мерой качественных изменений в системе. Представим потенциал функции состояния системы ($U = const$) как поверхность уровня, определяющую постоянное значение энтропии системы при изменении ее свойств. В данном случае потенциал U вводится как функция состояния, связанная с законом сохранения в системе. Потенциал может быть как безразмерным, так и размерным. В последнем случае единица измерения определяется принятой системой единиц измерения свойств. В термодинамике в качестве потенциала функции состояния системы выступает энергия в виде теплоты.

Подытожим все сказанное выше. Будем считать, что изменение энтропии определяет существование воздействий на систему, приводящих к изменению ее качественного состояния. В свою очередь, изменение параметров свойств системы на потенциальной поверхности при постоянной энтропии ($s = const$) определяет существование воздействий, приводящих к изменению только количественного состояния системы.

Теперь мы можем подойти к введению понятия *функции меры* через существование семейства функциональных соотношений, характеризующих законы сохранения и позволяющих обосновать характер связи между качественными и количественными изменениями в системе. Для этого сформулируем следствие третьего начала системодинамики в следующем виде.

Каждая сложная система, отличающаяся подобием свойств, обладает функцией состояния, называемой потенциалом

(U), которая характеризует при постоянной энтропии количественные изменения в системе. Энтропия системы и ее потенциал как естественные координаты однозначно связаны между собой через функцию меры, представляющую собой семейство функциональных соотношений, которые характеризуют законы сохранения в системе.

Таким образом, любое качественное состояние сложной системы однозначно определяется двумя функциями состояния – энтропией (s) и потенциалом (U). В первом случае имеем векторную линию, а во втором случае – потенциальную поверхность. Функциональная связь между свойствами и качествами системы характеризует класс сложности системы и определяет узловую линию мер. Задание местоположения точки на поверхности уровня требует введения координатных линий, принадлежащих этой поверхности.

Дадим для большей наглядности геометрическую интерпретацию связи между качественными и количественными изменениями в системе в случае трехмерного пространства переменных $\Psi\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Можно представить, что в данном пространстве имеется векторное поле \vec{B} касательных к векторным линиям и ортогональных им поверхностей уровня. В пространстве имеется также множество интегральных поверхностей, покрытых семейством характеристик, а также может быть расположено множество произвольных поверхностей, заданных в явном $\xi_3 = F_m(\xi_1, \xi_2)$ или неявном $\Phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ виде и не ортогональных векторным линиям поля.

Для каждого состояния системы, представляющего собой точку A в трехмерном пространстве координат $\Psi\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, которая, в свою очередь, может принадлежать одной из поверхностей, энтропия s' является характеристикой, а поверхность уровня – потенциальной поверхностью U . Поэтому через произвольную точку A могут быть проведены координатные линии, пересекающиеся под прямым углом и принадлежащие потенциальной поверхности U . Вместе с энтропией s' данная система координатных линий $\{u', i'\}$ является криволинейной ортогональной системой координат.

Выберем координатные линии $\{u', i'\}$ на потенциальной поверхности таким образом, чтобы они были образованы пересечением данной поверхности с плоскостями, параллельными координатным плоскостям $\xi_2 O \xi_3$ и $\xi_1 O \xi_3$. На каждой из этих плоскостей координаты ξ_1 и ξ_2

сохраняют постоянное значение. В этом случае через произвольную точку A проходит координатная линия u' , которая образуется пересечением потенциальной поверхности U и плоскости $\xi_1 = const$, и координатная линия i' , образованная пересечением поверхности U и плоскости $\xi_2 = const$. В термодинамике координатная линия u' представляет собой энтропию, а координатная линия i' – энтальпию.

Таким образом, любые перемещения фигуративной точки в окрестности состояния A могут быть описаны с помощью изменения криволинейных координат s' , u' и i' . При этом координатные линии s' задаются системой уравнений (107), а зависимости для линий u' и i' в дифференциальной форме имеют вид:

$$du' = \frac{\xi_2}{q} \cdot d\xi_2 + \frac{\xi_3}{k_T} \cdot d\xi_3, \quad (111)$$

$$di' = \frac{\xi_1}{q \cdot k} \cdot d\xi_1 + \frac{\xi_3}{k_T} \cdot d\xi_3. \quad (112)$$

Из соотношений (111) – (112) имеем:

$$u' = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_2^2}{q} + \frac{\xi_3^2}{k_T} \right) - \frac{k_T + q}{2 \cdot q \cdot k_T}, \quad (113)$$

$$i' = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_1^2}{q \cdot k} + \frac{\xi_3^2}{k_T} \right) - \frac{k_T + q \cdot k}{2 \cdot q \cdot k \cdot k_T}. \quad (114)$$

Согласно уравнений (104), (111) – (112) при значении $\xi_1 = const$ получим $dU = du'$, $k_T = 1$, $ds' = d\xi_3/\xi_3$ и $dU = d\xi_3$. В свою очередь при значении $\xi_2 = const$ будем иметь $dU = di'$, $k_T = k$, $ds' = k \cdot d\xi_3/\xi_3$ и $dU = k \cdot d\xi_3$. Из системы (107) при $\xi_1 = const$ получим $\xi_2/\xi_3 = const$, а при $\xi_2 = const$ имеем $\xi_1/\xi_3 = const$. Эти выражения совпадают с известными термодинамическими соотношениями для изохорного и изобарного процессов, если считать, что $z_1 = v$, а $z_2 = p$. Для поверхностей уровня связь между безразмерными координатами u' и i' может быть задана в виде:

$$di' = du' + \frac{1}{2 \cdot q} d \left(\frac{\xi_1^2}{k} - \xi_2^2 \right). \quad (115)$$

Рассмотрим теперь процесс, при котором $\xi_3 = const$. В этом случае $d\xi_3 = 0$, $dU = \xi_3 \cdot ds'$, $k_T = \pm \infty$, $ds' = k \cdot (d\xi_1/\xi_1) + d\xi_2/\xi_2$. В частном случае для поверхности $\xi_3 = \xi_1 \cdot \xi_2$ имеем $dU = k \cdot \xi_2 \cdot d\xi_1 + \xi_1 \cdot d\xi_2$. Добавим и вычтем из этого выражения величину $\alpha \cdot \xi_2 \cdot d\xi_1$, в результате получим, что при $k - \alpha = 1$ изменение потенциала на этой поверхности при $\xi_3 = const$ равно $dU = \alpha \cdot \xi_2 \cdot d\xi_1$, т.к. $d(\xi_1 \cdot \xi_2) = 0$. В

результате получаем известные термодинамические зависимости для идеального газа, описывающие изотермические процессы.

В более общем случае для других видов поверхностей (т.к. $\xi_3 = const$) можно записать, что $dU = dl$, где l представляет собой некоторую функцию координат ξ_1 и ξ_2 ($l = L(\xi_1, \xi_2)$). В термодинамике функция l определена как работа системы над окружающей средой. При этом работа зависит от вида функции $\xi_3 = F(\xi_1, \xi_2)$, расположенной в пространстве Ψ .

Теперь термодинамическую форму закона сохранения энергии можно получить вычислением криволинейного интеграла для потенциальной функции U по любому пути между выбранной фиксированной точкой A с координатами $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ и точкой C с координатами $\{\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3\}$. Между этими точками изменение потенциала по кратчайшему пути, который является векторной линией, имеет вид $dU = \xi_3 \cdot ds'$. В свою очередь это же изменение потенциала по пути, когда линия интегрирования ε лежит в плоскостях $\xi_1 = const$ и $\xi_3 = const$, может быть представлено в виде $dU = dU' + dU'' = du' + dl_{u'}$. Если же взять путь, когда линия ε лежит в плоскостях $\xi_2 = const$ и $\xi_3 = const$, то $dU = dU' + dU'' = di' + dl_{i'}$.

Из приведенных соотношений для случая поверхности $\xi_3 = \xi_1 \cdot \xi_2$ (уравнение состояния идеального газа) получим известные зависимости, определяющие в безразмерном виде количественную форму закона сохранения энергии:

$$du' = \xi_3 \cdot ds' - \alpha \cdot \xi_2 \cdot d\xi_1, \quad (116)$$

$$di' = \xi_3 \cdot ds' + \alpha \cdot \xi_1 \cdot d\xi_2, \quad (117)$$

где $\alpha = p_0 \cdot v_0 / (T_0 \cdot c_v)$ – константа, характеризующая некоторое опорное состояние системы.

Связь между безразмерными координатами u' и i' на поверхности $\xi_3 = \xi_1 \cdot \xi_2$ имеет вид:

$$di' = du' + \alpha \cdot d(\xi_1 \cdot \xi_2). \quad (118)$$

Уравнение (118) представляет собой в дифференциальной форме известное в термодинамике соотношение, связывающее энтальпию и энергию в размерном виде: $i = u + p \cdot v$.

Таким образом, в термодинамике уравнение сохранения энергии является одной из форм представления уравнения Пфаффа для потенциального векторного поля через энтропию и координатные линии поверхностей уровня.

Обобщая все сказанное выше, можно утверждать, что в любой окрестности произвольно заданного состояния A функция меры может быть выражена в виде линейных зависимостей вида:

$$dU = \xi_3 \cdot ds' = du' + \delta l_{u'}, \quad (119)$$

$$dU = \xi_3 \cdot ds' = di' + \delta l_{i'}, \quad (120)$$

где $\xi_3 = F(\xi_1, \xi_2)$, $l_{u'} = L_u(\xi_1, \xi_2)$, $l_{i'} = L_i(\xi_1, \xi_2)$ – некоторые функции параметров ξ_1 и ξ_2 для заданной сложной системы, а ds' , du' , di' – полные дифференциалы.

В свое время Каратеодори для простых термодинамических систем сделал попытку теоретического обоснования связи (119), используя экспериментальные зависимости для температуры [9]. Им было показано, что с помощью обратимых процессов внутренняя энергия определяется с точностью до линейной функции энтропии.

В дальнейшем будем придерживаться определений, принятых в термодинамике. Нам необходимо установить вид функции меры для многих переменных. Для этого воспользуемся подходом, предложенным в свое время Гухманом [5], интерпретируя его для наших условий. Суть идеи заключается в существовании единообразной формы уравнения сохранения.

Будем считать, что в процессе взаимодействия сложной системы с окружающей средой в системе возникают изменения. Данные изменения могут иметь количественный или качественный характер. В случае, если потенциал системы не изменяется, то взаимодействие приводит только к количественным изменениям свойств в системе без изменения качественных характеристик. Энтропия системы при этом остается постоянной. При изменении потенциала системы взаимодействие переходит в воздействие, которое выражается в изменении качественной и количественной определенности системы. Результатом этого воздействия при количественной характеристике состояния системы является изменение потенциала и энтропии системы. Количественно интенсивность воздействия выражается зависимостью изменения потенциала от энтропии системы в виде функции меры. Теперь итог изложенного можно сформулировать следующим образом.

Для любой сложной системы, отличающейся подобием свойств, всякое воздействие имеет своим необходимым следствием изменение потенциала и энтропии системы. При этом в любых процессах изменение потенциала (dU) линейно связано с изменением энтропии системы (ds') через функцию меры $dU = T \cdot ds'$.

В общем случае функция меры определяет один из законов сохранения (законы сохранения энергии, массы, стоимости и т.д.).

Предположим, что в пространстве n –

измерений существует некоторая функция воздействия на систему Q , однозначно связанная с изменением потенциала системы $dU = dQ$. Будем считать, что количество воздействия dQ в первом приближении линейно зависит от изменения абсолютного индекса системы dT :

$$\frac{dQ}{dT} = \alpha_n, \quad (121)$$

где α_n – непрерывная функция многих переменных, которая определяется исходя из направления единичного вектора \vec{n} в произвольной n -мерной точке A .

Согласно (121) в окрестности точки A имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi_1} = \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial \xi_1}; \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi_2} = \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial \xi_n} = \alpha_n \frac{\partial T}{\partial \xi_n},$$

тогда уравнение (69) можно представить в виде:

$$\frac{\xi_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi_1} + \frac{\xi_2}{\alpha_2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\xi_n}{\alpha_n} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \xi_n} = q \cdot T. \quad (122)$$

Характеристики уравнения (122) определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$ds' = q\alpha_1 \frac{d\xi_1}{\xi_1} = q\alpha_2 \frac{d\xi_2}{\xi_2} = \dots = q\alpha_n \frac{d\xi_n}{\xi_n}, \quad (123)$$

где полная энтропия системы равна $ds' = \frac{dQ}{T}$.

Из зависимостей для характеристик при значении $q = n$ получим:

$$ds' = \alpha_1 \frac{d\xi_1}{\xi_1} + \alpha_2 \frac{d\xi_2}{\xi_2} + \dots + \alpha_n \frac{d\xi_n}{\xi_n}. \quad (124)$$

Таким образом, с учетом (123) и (124), элементарные изменения потенциала могут быть представлены суммой соответствующих количеств воздействий [5], т.е.:

$$dU = \sum_{k=1}^n dQ_k, \quad dQ_k = T \cdot \alpha_k \frac{d\xi_k}{\xi_k} = T \cdot ds'_k. \quad (125)$$

Сумма в правой части первого уравнения (125) дает полное количество воздействия в элементарном процессе, определяющее изменение потенциала системы. Потенциал формируется под действием различных форм воздействий, каждому из которых отвечает одно из слагаемых dQ_k . Однако между изменениями потенциала, с одной стороны, и величинами dQ_k , с другой, не существует взаимно однозначного соответствия: данной совокупности dQ_k отвечает вполне определенное значение dU , но заданное изменение потенциала (dU) может быть реализовано в форме самых различных комбинаций величин dQ_k .

Из уравнения (125) следует, что полная энтропия системы, которая отличается

подобием свойств, аддитивна относительно частных энтропий, связанных с изменением

свойств, т.е. $ds' = \sum_{k=1}^n ds'_k$. Теперь видно, что

геометрический смысл индекса состояния системы T может быть определен как отношение элементарного приращения потенциала, связанного со свойствами системы, к элементарному приращению энтропии в наблюдаемом процессе. То есть, индекс состояния является производной для функции меры, т.к. из (125) получаем известное соотношение термодинамики:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial s'_k} \right)_{\xi_1, \dots, \xi_n} = T. \quad (126)$$

Таким образом, видна определенная закономерность, важная для построения моделей сложных систем. Согласно (37) и (38) в основу теории может быть положен принцип, заключающийся в том, что для многих сложных систем существуют эмпирические функции, которые обобщают опытные факты в поведении систем. Данные функции определяют реально наблюдаемые состояния системы на всей области определения свойств в пределах одной качественно отличительной ступени развития системы. При этом для простейших систем каждое состояние системы может быть связано по параметрам, по крайней мере, двумя ограничительными условиями – уравнением состояния и зависимостью для вероятности состояния системы. Эти условия являются различными способами оценки качественных изменений в наблюдаемых состояниях системы. Естественно, что для сложных систем как физической, так и нефизической природы подобных условий может быть существенно больше, если исходить из общего определения функции состояния системы вида (33).

Известно, что в любой системе в случае медленных, постепенных количественных изменений происходит эволюционное накопление качественных изменений. В этих условиях исходные функциональные соотношения могут быть представлены аддитивными суммами вида (41) и (53).

При справедливости принципа гомеостатической недостижимости относительно величин θ и W уравнения (41) и (53), а также подобные им уравнения, вытекающие из условий построения функции состояния вида (33), имеют интегрирующий множитель. В этом случае они могут быть выражены через естественные переменные системы – энтропию s' и координатные линии потенциальной поверхности U . Принцип существования недостижимых состояний в каждой окрестности состояния системы,

отличающейся подобием свойств, производит впечатление глубокого топологического свойства пространства n -измерений [8]. Данное свойство хотя и касается узкого класса гиперповерхностей, однако оно определяется единственностью решения задачи Коши для уравнений в частных производных первого порядка в случае многих переменных [31]. Данное свойство может выступать в качестве основного допущения при описании поведения многих сложных систем.

Далее естественно предположить, что для произвольно выбранного состояния системы дифференциалы энтропии и потенциала будут связаны между собой функцией меры. В первом приближении эта связь может быть линейной. Однако не исключается возможность наличия для сложных систем функций меры и нелинейного вида. По крайней мере, линейность относительно свойств должна нарушаться при осуществлении явно нестационарных процессов, когда параметр времени уже нельзя исключить из функции состояния системы в связи с нелинейностью процессов. Кроме того естественно, что не все векторные поля пространства состояний сложных систем могут быть потенциальными. Во многих случаях необходимо произвольный вектор поля \vec{V} представить в виде суммы потенциального и соленоидального векторов. В результате приходим к задачам решения дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида $\Delta U = \text{div } \vec{V}$. Все это указывает на то, что в сложных случаях в окрестности произвольного состояния при определении функции меры следует учитывать бесконечно малые величины более высоких порядков, а также особенности процессов изменения состояний сложных систем как во времени, так и в пространстве свойств.

Исходя из данного выше пояснения, можно объяснить факт так называемой «переопределенности» системы термодинамики.

Известно, что ряд авторов отмечали в свое время данную особенность построения термодинамической теории [5, 9]. Например, Каратеодори сформулировал положения термодинамики, не привлекая понятия теплоты и количества тепла. В свою очередь Гухман сделал попытку формулировки термодинамических положений только на основе использования первого закона термодинамики, представленного в единообразной форме, без первоначального постулирования существования энтропии.

Практически при формулировке основ термодинамики привлекаются два опытных факта: существование уравнения состояния в виде зависимости температуры, как индекса состояния системы от его параметров, и закон

сохранения и превращения энергии в виде эмпирически установленного уравнения. Второй закон термодинамики является в принципе следствием первых двух эмпирических фактов, т.к. вероятность состояния термодинамической системы не определяется опытным путем. Общие теоретические представления позволяют методами статистической физики обосновать связь энтропии и вероятности состояния системы, оставив при этом определенную свободу выбора системы отсчета. Однако при этом накладывается еще одно дополнительное условие на поведение системы.

В случае если как в термодинамике использовать для построения теории все три факта – задание функции вероятности и уравнения состояния системы, а также эмпирическую форму функции меры в виде закона сохранения, – то тем самым изначально осуществляется «переопределение» задачи относительно функции состояния, т.к. имеется одно лишнее условие.

Теперь понятно, почему для случая токсикологической системы базовый закон сохранения в виде функции меры является следствием уравнения состояния и закономерности изменения вероятности состояния системы.

Таким образом, полученные результаты позволяют подойти с иных позиций к формулировке законов сохранения как особого класса принципов, отображающих единство движения материи. Исходя из этого, просматривается идея представления функции меры в виде единообразной структуры, где каждый следующий шаг приводит эту структуру к той же самой форме, но на более высоком уровне иерархии. Если для j -того качественного признака и n свойств уравнение для функции меры представляется следующим соотношением:

$$dU_j = T_j \cdot \sum_{k=1}^n ds'_{k,j}, \quad (127)$$

то, учитывая (124) и (125), это уравнение приводится к виду

$$dU_j = T_j \cdot \sum_{k=1}^n ds'_{k,j} = du'_{k,j} + \delta l_{k,j}, \quad (128)$$

где $u'_{k,j}$ – координатная линия n -мерной потенциальной поверхности U_j , которая соответствует k -тому свойству системы и является полным дифференциалом; $l_{k,j} = L_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ – некоторая функция свойств системы, определяемая при условии интегрирования $T_j = F_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \text{const}$.

В свою очередь, учитывая уравнение (123) и свойство аддитивности уравнения (128),

для k -го свойства системы получим:

$$n \cdot T_j \cdot ds'_{k,j} = du'_{k,j} + \delta l_{k,j}. \quad (129)$$

Исходя из сказанного выше следует, что для любой сложной системы на определенном уровне иерархии, который определяется числом степеней свободы n , из соотношений (127)–(129) вытекает следующее общее уравнение:

$$T_j \cdot ds'_j = du'_j + \delta l_j, \quad (130)$$

$$\text{где } ds'_j = \sum_{k=1}^n ds'_{k,j}, \quad du'_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n du'_{k,j},$$

$$\delta l_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta l_{k,j}.$$

Данное уравнение для p качественных признаков можно представить в виде:

$$T \cdot ds' = du' + \delta l, \quad (131)$$

$$\text{где } ds' = \sum_{j=1}^p ds'_j, \quad du' = \sum_{j=1}^p du'_j, \quad \delta l = \sum_{j=1}^p \delta l_j, \text{ а}$$

индекс состояния системы определяется из

$$\text{условия: } T = \frac{1}{ds'} \sum_{j=1}^p T_j \cdot ds'_j.$$

Определим функционалы ds' и du' , соответственно как изменение общей энтропии и общей меры состояния системы. Так как сумма полных дифференциалов также является полным дифференциалом, то величины ds' и du' являются полными дифференциалами.

Из данных результатов видна структура уравнений сохранения, где каждый функционал подчиняется аддитивным закономерностям, а добавление новой переменной преобразует его в функционал более высокого уровня иерархии, причем все получаемые структуры имеют единообразную форму. Таким образом, функционалы ds' и du' образуются процедурой рекурсии и могут обладать фрактальными свойствами. В свое время один из основоположников фрактальной геометрии Б.Мандельброт называл фракталом структуру, состоящую из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Закон сохранения энергии в термодинамике имеет вид именно структуры (131), где абсолютная температура является индексом состояния физической или химической системы, для которых характерны энергетические взаимодействия.

Изучение структур вида (127) – (131) приводит к парадоксальному выводу относительно сути понятия энтропии, которая является фактически «сверткой» свойств системы, т.е. единство присущих системе свойств и является ее качеством. Другими словами можно сказать, что привнесение

параметров свойств объекта в виде системы координат извне (внешний способ задания координат) заменяется на внутренний способ введения координат, где параметры свойств преобразуются с учетом особенностей объекта в параметры его качеств. Данный способ основан на оценке множества состояний всей системы относительно выбранных подмножеств этой системы, например, когда векторное пространство любых воздействий на вещество оценивается по отношению к поверхности, определяющей состояние заданного вещества и т.п. В этом случае появляется необходимость введения внутренних (естественных) координат множества. Таким образом, термодинамика по своей сути сводится к геометрической системе преобразования координат на многообразии, допускающем введение параметризации.

В заключение раздела отметим, что эффективная теория должна приводить к широкому развитию практических приложений, а также открывать возможности для расширения всевозможных направлений исследований.

Методы системодинамики позволяют вплотную подойти к описанию биологических и социально-экономических систем. Возможности практического применения полученных результатов показаны на примере решения двух задач, связанных с построением уравнений состояния токсикологических систем и развитием методов оценки человеческого потенциала. Этим вопросам посвящены две последующие статьи данного сборника, на которые ранее делались ссылки в данной работе. В прикладном плане применение методов системодинамики возможно в исследовании социально-экономических процессов, изучении эволюции видов, обработке информации и т.д.

Следует также отметить несколько перспективных научных направлений исследований, позволяющих развить методологию системодинамики.

Важное направление исследований связано с установлением класса зависимостей, которые позволяют реализовать функции состояния сложных систем. В свое время Борн отмечал исключительный произвол в выборе шкал температур в термодинамике. Им было подчеркнуто, что на данном этапе развития термодинамической теории нельзя логически обосновать то, что температурой газа считают как раз произведение $\theta = p \cdot v$, а не какую-нибудь функцию этой величины, хотя бы $\theta = (p \cdot v)^2$ или $\theta = \sqrt{p \cdot v}$. Факт вида зависимости $\theta = p \cdot v$ основан на эмпирических данных. Однако постулат о подобии свойств дает возможность развить теоретическое направление в определении функций состояния

систем. Сегодня в термодинамике принято, что эти уравнения присоединяются извне, как известные эмпирические знания о свойствах системы. Это является основополагающим принципом, однако установление видов функций состояния может осуществляться на основе теоретических предпосылок и данных об изменении свойств во времени или на границах области определения состояний системы.

Изучение особенностей качественных и количественных изменений сложных систем во времени позволит разрешить дилемму о существовании обратимых и необратимых процессов. Эта область исследований всегда привлекала ученых [3, 5, 11, 32, 33]. Из анализа полученных закономерностей видно, что необратимость тесно связана с течением времени, количеством свойств и уровнем качеств, присущих сложной системе. Уже очевидно, что обратимых процессов в технике и природе нет. Даже для простейших термодинамических систем параметрическое представление свойств как функций времени τ и энтропии s' приводит к тому, что параметрические кривые образуют функцию состояния системы. Например, для трехмерной системы и любого процесса l свойства z_1 , z_2 и индекс T можно представить семейством характеристических кривых $z_1 = z_1(\tau, s')$, $z_2 = z_2(\tau, s')$ и $T = T(\tau, s')$. Данные кривые образуют поверхность $T = T(z_1, z_2)$, если на кривой l якобиан $\Delta = z'_{1s} \cdot z'_{2t} - z'_{1t} \cdot z'_{2s}$ не обращается в нуль. Это основное условие единственности решения задачи Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными [31]. Данное условие выполняется всегда, если кривая l не является характеристикой. Здесь уже виден естественный способ введения времени в теорию классической термодинамики, через возможность параметрического представления процессов относительно времени. При этом свойство необратимости времени накладывает ряд жестких ограничений на осуществление процессов и характер изменения энтропии.

Далее, применение методов теории поля позволяет по иному подойти к изучению различных термодинамических циклов, которые встречаются в природе и технике, а также различных абстрактных циклов, которые могут описываться математическими выражениями. Известно, что потенциальное поле характеризуется условием, при котором циркуляция вектора по простому замкнутому контуру l всегда будет нулем. При этом линейный интеграл по кривой, соединяющей любые две точки поля, оказывается не

зависящим от формы кривой. Потенциальная функция при этом определяется криволинейным интегралом:

$$\oint_l \frac{\xi_1}{q \cdot k} d\xi_1 + \frac{\xi_2}{q} d\xi_2 + \frac{\xi_3}{k_T} d\xi_3 = \oint_l dU = \oint_l T \cdot ds' = 0$$

Из этого уравнения для контура из двух изотерм и двух адиабат, который расположен на произвольной поверхности с обыкновенными точками, легко получить коэффициент полезного действия цикла, равный к.п.д. цикла Карно. В данной области возникает ряд абсолютно новых задач – изучение работоспособности « n -мерных» циклов и циклов, использующих особые рабочие тела, возможность осуществления циклов или процессов вблизи областей, которые захватывают особые точки или линии ветвления (характеристические кривые), и т.д. Например, абстрактный спиральный цикл, расположенный на поверхности шара или тора, поверхности которых, в свою очередь, определяют уравнение состояния рабочего тела. В этом случае или рабочее тело не будет устойчиво, или оно будет представлять собой вещество, в котором протекает циклическая химическая реакция. Реализация « n -мерных» циклов предполагает использование рабочих тел, которые могут характеризоваться значительным количеством свойств. Методов анализа подобных процессов или циклов пока не существует.

Теория поля позволяет также подойти к изучению сложных систем, образующих векторные поля состояний, которые не являются потенциальными. В этом случае использование математического аппарата уравнений в частных производных открывает широкие возможности для исследования сложных систем.

Важное направление анализа сложных систем связано с изучением их поведения вблизи особых точек. Например, третий закон термодинамики затрагивает именно этот вопрос. Из дифференциальной геометрии известно, что вблизи особой точки параметрическая кривая любого процесса не представима явным уравнением. Существуют различные особые точки – изолированная, двойная, точка возврата, тройная, n -кратная точка. Для изучения поведения кривых вблизи таких точек в математике существует целая теория. В свою очередь, функции состояния реальных сложных систем могут иметь множество различных особых точек и пограничных кривых, при этом изучение поведения систем вблизи областей с особенностями представляет собой важную задачу системодинамики.

Следующая область исследований связана с оценкой состояния термодинамических систем на основе определения математической вероятности

характерных событий, свойственных данным системам. При определении уровня воздействия окружающей среды на множество молекул измерение температуры является косвенным методом, который позволяет оценить усредненное состояние этого множества по качественному признаку – интенсивности хаотического движения молекул в определенных условиях. Данный признак позволяет найти отличия в поведении одинаковых молекул. В этом случае в процессе оценки воздействия среды на молекулу как объект наблюдения в качестве характерного события может выступать факт существования молекул, обладающих различными скоростями движения или различными запасами кинетической энергии. Закон распределения скоростей Максвелла гласит, что в общем числе молекул N , находящихся в устойчивом состоянии, количество молекул, которые обладают результирующими скоростями в диапазоне значений c и $c + dc$, будет составлять dn , при этом известно, что $dn = N \cdot f(c) dc$.

Таким образом, для оценки качественного состояния термодинамической системы, например, идеального газа, возможно использование закона Максвелла, согласно которому вероятность состояния, определенная по характерным событиям, может быть найдена из уравнения [14]:

$$W = \frac{n}{N} = 4\pi \cdot A \int_0^c c^2 \exp(-hmc^2) dc, \quad (132)$$

где m – масса молекулы, а A и h – константы, определяемые нормировкой функции вероятности системы. Данный подход позволяет установить связь вероятности состояния системы, которая определяется по сложным событиям, характеризующим отличия в состоянии молекул, с параметрами окружающей среды.

Таким образом, законы кинетической теории газов, методики и схемы опытов по экспериментальной проверке закона Максвелла, позволяют по аналогии с токсикологией построить эмпирические зависимости вида:

$$Pr = \alpha_0 + \alpha_v \cdot \ln p + \alpha_p \cdot \ln v,$$

где α_i являются безразмерными константами, а величина Pr определяется исходя из выбранного вероятностного закона распределения скоростей при обработке опытных данных.

С другой стороны кинетическая теория газов может дать целый пласт теоретических подходов, методов и аналогий для статистического изучения объектов наблюдений в токсикологии. Это путь установления фундаментальных констант в живой природе,

например, аналогов константы Больцмана в физике.

Сегодня сущностная природа процессов развития сложных систем затрагивается многими исследователями; типичные подходы приведены, например в [34 – 40]. Однако без глубокой теории подобный перенос принципов термодинамической науки на процессы нефизической природы не выдерживает критики. Построение такой теории – это долгий и трудоемкий процесс, но на этом пути возможны интересные открытия.

Заключение

Подведем итоги данной работы. Как видно из примера в начале статьи, применение термодинамического метода по отношению к опытным фактам токсикологии позволяет получить закономерности фундаментального характера. Обобщение полученных результатов дает возможность сформулировать законы и постулаты системодинамики в следующем виде. Качественные признаки сложных систем могут иметь количественное измерение, основанное на оценках вероятностей или значений индексов. Изменение этих признаков при воздействии связано с возникновением определенных событий, по частоте появления которых и может оцениваться состояние системы в процессе изменения ее качества. С другой стороны, состояние системы определяется ее свойствами, которые количественно характеризуются параметрами. Это позволяет сформулировать первый постулат системодинамики о состоянии сложной системы и существовании функции состояния системы, которая может быть оценена путем измерения количественных показателей, характеризующих как качественные признаки, так и свойства системы. Так как вероятности сложных событий представляются в виде аддитивно-мультипликативных соотношений, то построение теории может быть основано на известной теореме Каратеодори о существовании энтропии для физических систем, обладающих свойством, которое известно как постулат «адиабатической недостижимости». Показано, что данный постулат может быть заменен более общим постулатом: в любом процессе, протекающем в окрестности произвольно заданного и качественно однородного состояния, свойства сложной системы, эволюционно развивающейся во времени, подобны. Еще один постулат формулируется в виде: в любой окрестности произвольно заданного состояния качества и свойства сложной системы однозначно связаны через функцию меры.

Дальнейшая система доказательств приводит к следующим выводам. Энтропия

системы является характеристической функцией состояния системы (семейством характеристик) и может выступать мерой качественных изменений в системе. Любое множество качественно одинаковых состояний системы, которое оценивается по характерному качественному признаку, однозначно определяется двумя функциями состояния – энтропией и потенциалом. В первом случае имеем векторную линию, а во втором случае – потенциальную поверхность. При этом энтропия в параметрическом представлении является длиной дуги векторной линии. Уравнение сохранения энергии в термодинамике для потенциального векторного поля, определяющего воздействие, является одной из форм представления уравнения Пфаффа через координатные линии поверхности уровня и энтропию. Термодинамика по своей сути сводится к геометрической системе преобразования координат на многообразии, допускающем введение параметризации. Другими словами, привнесение параметров свойств объекта в виде системы координат извне (внешний способ) заменяется на внутренний способ введения координат, где параметры свойств преобразуются с учетом особенностей объекта естественные координаты этого объекта. Данный способ основан на оценке множества состояний системы относительно выбранных подмножеств этой системы, например, когда векторное пространство любых воздействий на вещество оценивается по отношению к характеристической поверхности, определяющей состояние этого вещества, и т.п. Именно здесь лежит естественный способ введения времени в термодинамику за счет параметрического представления любых процессов (кривых) относительно времени, а уравнений состояний (интегральных поверхностей) – относительно времени и энтропии. При этом необратимость времени накладывает ряд жестких условий на осуществление процессов и характер изменения энтропии. Кроме того, все естественные процессы в природе при нарушении равновесия протекают в направлении наиболее вероятных качественных изменений, поэтому вероятности событий, связанные с качественными признаками, будут возрастать. В связи с тем, что вероятность события величина положительная, а энтропия согласно (109) – это параметр вида $ds = dW/(q \cdot W)$, то в любом природном процессе $ds \geq 0$. Здесь уже видна связь второго закона термодинамики с базовыми положениями теории вероятности. Из приведенной зависимости видна также справедливость формулировки второго закона, которая дана в свое время Больцманом.

Таким образом, термодинамика математически может быть сведена к дифференциальной геометрии однородных пространств состояний сложных систем. А если это так, то единая теория моделирования сложных систем может быть построена на наблюдениях событий во времени, что является предметом теории вероятности, и использовании G -пространств состояний, когда G -группа геометрических преобразований переводит множество свойств системы в подобное множество относительно качеств системы, а это является уже предметом исследования дифференциальной геометрии многообразий. Известно, что кроме преобразования подобия, которое использовано в этой работе, существует еще 14 бесконечно малых преобразований. Здесь мы отсылаем к интересной работе К. Каратеодори [41]. Скорее всего, существуют классы сложных систем, которым свойственны различные группы преобразований пространства состояний, что приводит к разным геометриям, которые введены Ф. Клейном в рамках Эрлангенской программы.

В процессе подготовки этой статьи появился ряд новых вопросов и идей. Например, что представляет собой общая энтропия состояния системы с точки зрения обобщения множества различных свойств и качеств, присущих системе? Какие базовые законы сохранения определяют поведение биологических, экологических, социальных или экономических систем? Какой смысл мы должны вкладывать в понятие потенциала системы в каждом конкретном случае? И, наконец, время – это просто параметр, определяющий момент воздействия на объект, или нечто большее? Если объекты исследования термодинамики являются неживыми, а токсикологии – живыми объектами, причем модели имеют общую математическую основу, то в чем суть отличия живого от неживого, и какое свойство или качество (или комплекс этих категорий) определяет это отличие?

Возникали также вопросы почти философского плана. Например, что такое “смерть” объекта? – Причем не только живого. Не результат ли это последовательности наиболее вероятных качественных изменений в состоянии системы при воздействии по шкале энтропии, но до тех пор, пока это возможно. А может быть это закономерный результат эволюционного дрейфа потенциала в шкале времени? Рождение и смерть объекта – это особые точки или фазовые переходы особого рода? Не присущи ли эти особые точки или фазовые переходы всем объектам природы? – Только масштабы времени существования объектов часто несоизмеримы. Именно по этому

понятие обратимости для природы неприемлемо, т.к. после любого процесса, а тем более фазового перехода, невозможно воссоздать первоначальный объект неживой природы, даже если он очень примитивный. Может быть, именно в области изменения качеств и свойств на грани рождения или смерти, и лежит ответ на вопрос – в чем суть отличия живого от неживого? Так как принятые нами постулаты системодинамики не привязаны к виду объекта – живой или не живой, то ответ на этот вопрос может лежать в весомости качеств и количестве свойств сложной системы. Причем в диапазоне между особыми точками, где существует объект, видна необходимость использования в моделях «собственного» времени, характерного для данного объекта или вида. Здесь мы с одной стороны приходим к причинно-следственной картине жизни, где события, которые тесно связаны со временем, определяют жизнь. С другой стороны модель объекта будет определяться временем его существования, количеством свойств и качеств, уровнем сложности и множеством возможных связей объекта, что естественно.

Возникали и другие интересные идеи, например, можно ли “математизировать” некоторые области философии или истории? По крайней мере, не исключен путь построения теории перехода количественных изменений в качественные на основе расширения аксиоматики теории вероятностей, предложенной в свое время А.Н.Колмогоровым, и постулирования ряда положений. Или, например, путь построения теории потенциалов применительно к развитию человеческого общества за счет обобщения исторических данных и событий. Применение методов системодинамики приводит к идеям о возможности построения теории развития сложных систем как системной науки о сложности.

Интересные идеи лежат в области информатики и изучения искусственного интеллекта. Во-первых, исходя из полученных результатов, возникает вопрос – как определить понятие информации применительно к сложной системе? Возможно это знание о множестве состояний системы и о множестве реализуемых процессов в окрестности произвольного состояния, а также моделях, особенностях и закономерностях формирования состояний и осуществления процессов. Тогда актуален вопрос – как количественно и интегрально измерить это знание? Во-вторых, если жизнь и разум рассматривать как закономерные этапы (узловые точки меры) организации сложной системы в шкале бесконечного или счетного количества свойств и качеств системы, то возможны аналогии между живой и неживой природой, между биологическими и иными

формами жизни.

Может возникнуть много новых вопросов и идей, если математический аппарат термодинамики и ее метод будут успешно применены на практике в научных областях с абсолютно разными объектами и предметами исследования и качественно отличающимися сегодня методологиями. Это был бы уже успех в развитии системной динамики, причем при использовании методов классической термодинамики. Уже видны все сложности этого пути, которые определены медленным накоплением множественных и систематизированных данных в различных областях знаний.

Заканчивая статью, обратим внимание на высказывание А. Эйнштейна, приведенное во введении, о том, что термодинамика никогда не будет опровергнута. Все в этом мире подвержено непрерывному развитию, поэтому и термодинамика может перерасти в своем качестве в новую науку – системодинамику, которая в своей основе будет иметь уже не только физическую теорию. Это был бы закономерный результат колоссального труда поколений ученых, создавших классическую термодинамику.

Литература

1. Капица П.Л. Эксперимент, теория, практика. – М: Наука, 1981. – 495 с.
2. Берталанфи Л. Общая теория систем – Критический обзор. – General Systems, Vol. VIII, 1962: P. 1 – 20.
3. Венгеров И.Р. Хроноартефакты термодинамики. – Донецк: Норд-пресс, 2005. – 235 с.
4. Кирилин В.А., Сычев В.В., Шейндлин А.Е. Техническая термодинамика. – М.: Энергия, 1974. – 448 с.
5. Гухман А.А. Об основаниях термодинамики. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 383 с.
6. Базаров И.П. Термодинамика. – Изд-е 4-е. – М.: Вс. шк., 1991. – 376 с.
7. Путилов К.А. Термодинамика. – М: Наука, 1971. – 375 с.
8. Франкфурт У.И. К истории аксиоматики термодинамики. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М.: Наука, 1964. – С. 257 – 292.
9. Каратеодори К. Об основах термодинамики. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М.: Наука, 1964. – С. 188 – 222.
10. Борн М. Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М.: Наука, 1964. – С. 223 – 256.
11. Афанасьева-Эренфест Т.А. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики // Журн. прикл. физики,

- 1928.– Т. 5, вып. 3 – 4. – С. 3 – 30.
12. Шамбадаль П. Развитие и приложение понятия энтропии. – М.: Наука, 1967. – 280 с.
 13. Петров Н., Бранков Й. Современные проблемы термодинамики. – М.: Мир, 1986. – 285 с.
 14. Роберте Дж. Теплота и термодинамика. Пер. с англ. – М.: Техн. лит-ра, 1950. – 592 с.
 15. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Пер. с англ. – 3-е изд. – Л.: Химия, 1982. – 592 с.
 16. Falk G. Die Rolle der Axiomatik in der Physik, erlautert am Beispiel der Thermodynamik / Die naturwissenschaften, 46, 1959, № 16: P. 480 – 486.
 17. Пуанкаре А. О науке. – Пер. с франц. – М.: Наука, 1983. – 560 с.
 18. Wehrle P. L'Univers aleatoire. – Paris, Dunod, 1956.
 19. Morowitz H. J. The Second Law of Thermodynamics. – <http://www.panspermia.com/seconlaw.htm> (12.12.09).
 20. Коганов А.В. Реферативный обзор семестра «Время и энтропия». Семинар «Изучение феномена времени» – http://www.chronos.msu.ru/greports/koganov_referativny_obzor.htm (05.12.09).
 21. Сычев В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики – М.: Вс. шк., 1991.– 214 с.
 22. Аверин Г.В., Звягинцева А.В. Закономерности формирования опасных процессов в сложных системах // Наукові праці ДонНТУ, Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка», вип. 9 (132), Донецьк. – С. 221 – 232.
 23. Основы оценки риска для здоровья населения при воздействии химических веществ, загрязняющих окружающую среду / Г.Г. Онищенко и др. – М.: НИИ ЭЧ и ГОС, 2002. – 408 с.
 24. Временные методические указания по обоснованию предельно допустимых концентраций (ПДК) загрязняющих веществ в атмосферном воздухе населенных мест – М.: МЗ СССР, ГСЭУ, 1989. – 111 с.
 25. Философский словарь / Ред. И.Т. Фролов. – М.: Политиздат, 1989. – 444 с.
 26. Венцель Е.С. Теория вероятности. М.: Наука, 1971. – 576 с.
 27. Доклад о развитии человека 2006. Что кроется за нехваткой воды: Власть, бедность, глобальный кризис водных ресурсов / Пер. с англ. – М.: Весь мир, 2006. – 440 с.
 28. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. М.: Вс. шк., 1967. – 655 с.
 29. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Наука. 1969. – 608 с.
 30. Диткин В.А., Прудников А.А. Операционное исчисление. М.: Вс. шк., 1975. – 407 с.
 31. Кошляков И.С. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Вс. шк., 1970. – 712 с.
 32. Гельфер М. История и методология термодинамики и статистической физики. – 2-е изд-е, перер. и доп. – М.: Вс. шк., 1981. – 536 с.
 33. Базаров И.П. Методологические проблемы статистической физики и термодинамики. – М.: МГУ, 1979. – 87 с.
 34. Мельник Л.Г. Фундаментальные основы развития. – Сумы: ИТД «Университетская книга», 2003. – 288 с.
 35. Ю.А. Урманцев. Общая теория систем: состояние, приложения и перспективы. – <http://www.sci.aha.ru> (11.11.09).
 36. Прангишвили И.В. Энтропийные и другие системные закономерности. – М.: Наука, 2003. – 428 с.
 37. Бурдаков В.П. Эффективность жизни (введение в экотермику). – М.: Энергоатомиздат, 1997. – 304 с.
 38. Райхлин Р. Систематика социологии и социальная динамика. – <http://www.israel.net/raikhlin/> (05.01.10).
 39. Вейник А.И. Термодинамика реальных процессов. – Мн.: Наука і техника, 1991. – 576 с.
 40. Хазен А.М. Разум природы и разум человека. – М.: РИО «Мособлполиграфиздат», 2000. – 600 с.
 41. Каратеодори К. К аксиоматике специальной теории относительности. – В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М.: Наука, 1964.– С. 167 – 187.