

## МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 338.48

DOI 10.33251/2707-8620-2021-3-4-54-61

**ШМЕЛЬОВА Тетяна Федорівна**,  
доктор технічних наук, професор,  
професор кафедри аеронавігаційних систем,  
Національний авіаційний університет  
ORCID 0000-0002-9737-6906

**СІКІРДА Юлія Володимирівна**,  
кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри туризму  
та авіаційних перевезень,  
Льотна академія  
Національного авіаційного університету  
ORCID 0000-0002-7303-0441

**ГАЄВСЬКИЙ Сергій В'ячеславович**,  
аспірант,  
Льотна академія  
Національного авіаційного університету  
ORCID 0000-0003-3434-7494

### ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДУ ПОВІТРЯНОГО ПАРКУ АВІАКОМПАНІЇ МЕТОДАМИ КОМБІНАТОРИКИ ТА РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ

*Представлений підхід до прогнозування ефективності операційної діяльності авіакомпанії з використанням методів комбінаторики та регресійного аналізу з метою знаходження оптимального складу повітряного парку для забезпечення мінімальної вартості авіап перевезень за умови максимального задоволення попиту на транспортування з урахуванням обмежень на кількість літаків різних типів.*

**Ключові слова:** ефективність авіап перевезень, кількість літаків, метод поєднання, метод факторіалів, пасажиромісткість, попит, регресійна модель, собівартість перельоту, тип літака.

**Постановка проблеми.** Прогнозується, що обсяги пасажирських авіап перевезень, які різко впали через негативний вплив пандемії коронавірусу COVID-19, відновляться близько 2023 року. За оцінками експертів IATA, світовий попит на пасажирські перевезення в 2021 році буде на 24% нижче рівня 2019 року і на 32% нижче прогнозу, зробленого в жовтні 2019 року. Це засновано на більш повільному відновленні економік країн світу і наявності обмежень на поїздки [1]. При організації нових повітряних ліній або при зміні попиту за існуючими маршрутами після завершення пандемії авіакомпанії можуть зіштовхнутись з проблемами оптимізації складу повітряного парку та перерозподілу повітряних суден (ПС) за визначеними рейсами для максимального задоволення існуючого попиту на авіап перевезення за умови мінімізації витрат авіатранспортного підприємства. Математичним апаратом, який доцільно використовувати для розрахунку оптимального складу повітряного парку авіакомпанії, є

комбінаторні методи [2; 3] та регресійний аналіз [4; 5], для оптимального розподілу ПС за встановленими напрямками авіаперевезень – транспортна модель [6; 7].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** При проведенні досліджень науковці акцентують увагу на оптимальній організації пасажиро- та вантажопотоків для максимального задоволення попиту на транспортування з мінімальними витратами [8-11], але не враховують при цьому вплив на собівартість перевезень комбінацію типів авіаційних транспортних засобів.

В [12] представлено транспортну модель, що дозволяє знаходити оптимальний розподіл ПС за виділеними маршрутами з мінімальною вартістю авіаперевезень за умов виконання накладених обмежень на обсяги пасажиропотоку, кількість та пасажиромісткість наявних ПС. Проблема формування оптимального складу повітряного парку авіакомпанії обговорювалась на міжнародних науково-практичних семінарах та конференціях [13; 14].

**Мета та завдання статті.** Метою дослідження є визначення оптимального складу повітряного парку авіакомпанії для мінімізації вартості виконання авіаперевезень за умови максимального задоволення попиту на транспортування з урахуванням кількості літаків різних типів за допомогою методів комбінаторики та регресійного аналізу.

Завдання дослідження:

- формалізувати задачу визначення максимальної ефективності авіаперевезень у разі різної комбінації типів ПС;
- спрогнозувати ефективність виконання авіаперевезень авіакомпанією з різною комбінацією типів літаків за допомогою регресійного аналізу;
- методами факторіалів та поєднання визначити кількість можливих комбінацій літаків різних типів за умов дозволу та заборони на відмінність порядку розташування і повторів ПС у групі.

Виклад основного матеріалу. У вузькому сенсі комбінаторика представляє собою підрахунок різних комбінацій, які можна скласти з деякої безлічі дискретних об'єктів [2; 3], у нашому випадку – ПС. Принципово важливо, що ці об'єкти піддаються підрахуванню (дискретність), та що серед них немає однакових. Найпоширенішими видами комбінацій є перестановки об'єктів, їх вибірка з безлічі (поєднання) і розподіл (розміщення).

Формалізуємо задачу визначення максимальної ефективності авіаперевезень  $E$  у разі різної кількості ПС  $n_i$  різних типів  $m_j$  (1):

$$E = \max \min (y_i - y_{oi}), \quad (1)$$

де цільова функція (2-3):

$$y_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^1 c_{jk} x_{jk} \rightarrow \min; \quad (2)$$

$$y_{oi} = f(x_{ji}); \quad (3)$$

обмеження (4)–(7):

$$y_i - y_{oi} \leq 0; \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{jk} = a_j, \quad j = \overline{1, m}; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^1 x_{jk} = b_k, \quad k = \overline{1, 1}; \quad (6)$$

$$x_{jk} \geq 0, \quad j = \overline{1, m}, k = \overline{1, 1}, \quad (7)$$

де  $y_i, y_{oi}$  – відповідно фактична та очікувана мінімальні вартості авіаперевезень;

$c_{jk}$  – собівартість перельоту на  $j$ -му типі ПС до  $k$ -го пункту призначення, у.о.;

$a_j$  – загальна кількість ПС  $n_i$  типу  $m_j$ , шт.;

$b_k$  – попит на пасажироперевезення до  $k$ -го пункту призначення за місяць, чол./міс.;

$x_{jk}$  – кількість ПС  $n_i$  типу  $m_j$ , яку необхідно виділити на  $k$ -ту повітряну лінію, шт.

Розглянемо приклад визначення оптимального складу повітряного парку авіакомпанії, яка має в наявності літаки типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500 та виконує рейси за маршрутами Київ – Афіни, Київ – Ашхабад, Київ – Будапешт, Київ – Варшава. При розрахунках враховано пасажиромісткість кожного типу ПС при наданні послуг економ-класу, собівартість перельоту та попит на перевезення [12]. Вихідні дані для розв'язання задачі отримані з монографії з економіки цивільної авіації України [15], сайтів Державної авіаційної служби України [16] та Airlines Inform [17].

Спрогнозуємо ефективність виконання авіаперевезень авіакомпанією з наявною різною комбінацією типів ПС за допомогою регресійного аналізу [18-20].

Для початку будемо вважати, що кількість літаків  $n_i$  різних типів  $m_j$  однакова ( $n_i = \text{const}$ ,  $m_j \neq \text{const}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ):

$n_{1-4} = 1$  (маємо по одному літаку типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500);

$n_{1-4} = 2$  (маємо по два літаки типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500);

$n_{1-4} = 3$  (маємо по три літаки типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500);

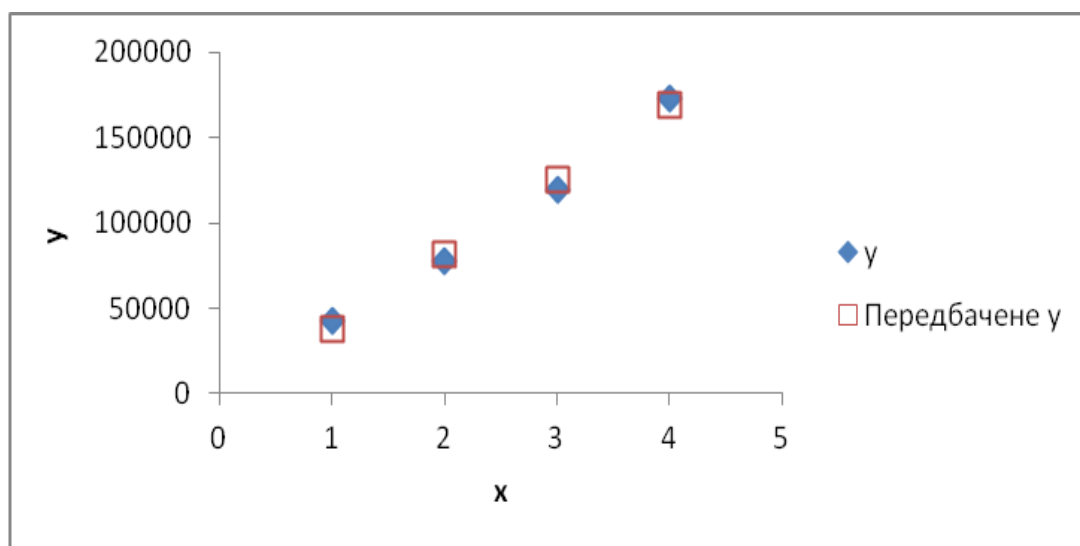
$n_{1-4} = 4$  (маємо по чотири літаки типів Б-737-200, Б-737-300, Б-737-400, Б-737-500).

Для кожної комбінації отримана фактична (цільова функція  $y_i$ ) та очікувана (регресія  $y_{oi}$ ) мінімальна вартість перевезень за умов виконання накладених обмежень на обсяги пасажиропотоку та пасажиромісткість наявних ПС (табл. 1, рис. 1).

Таблиця 1

**Результати регресійного аналізу  
у разі комбінації однакової кількості різних типів літаків**

№ з/п	Кількість ПС $n_i$ типу $m_j$ , x	Цільова функція $y_i$ , грн.	Регресія, $y_{oi}$ , грн.	Відхилення $(y_i - y_{oi})$ , грн.
1	1111	42700	38335	4365
2	2222	77800	81745	-3945
3	3333	119950	125155	-5205
4	4444	173350	168565	4785



**Рис. 1 Регресійний аналіз у разі комбінації  
однакової кількості різних типів літаків**

Видно, що у разі комбінації однакової кількості різних типів літаків максимальна ефективність виконання авіаперевезень авіакомпанією очікується при наявності трьох літаків чотирьох різних типів:

$$E = \max \min (y_i - y_{oi}) = \max \min (4365; -3945; -5205; 4785) = -5205 \text{ грн.};$$

$$y_i - y_{oi} \leq 0.$$

Розглянемо результати регресійного аналізу вибірки з 11 можливих комбінацій літаків  $n_i$  різних типів  $m_j$  ( $n_i \neq \text{const}$ ,  $m_j \neq \text{const}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) за умови дозволу на відмінність порядку розташування та повторення елементів у групі (табл. 2; рис. 2).

У разі комбінації різної кількості різних типів літаків максимальна ефективність виконання авіаперевезень авіакомпанією очікується при наявності двох літаків чотирьох різних типів:

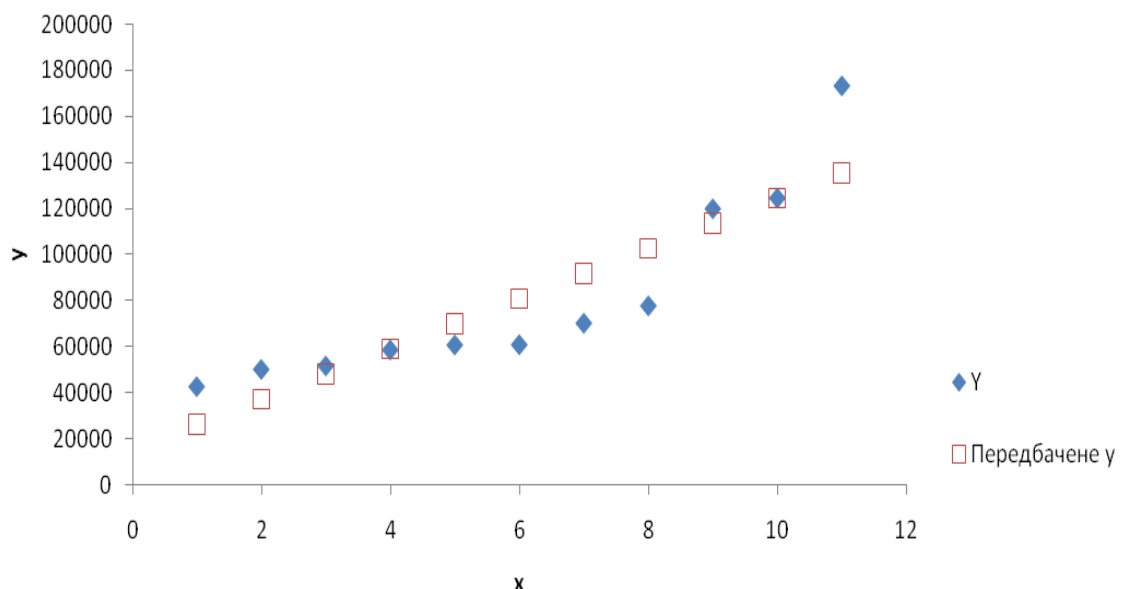
$$E = \max \min (y_i - y_{oi}) = \max \min (16398; 12959; 3520; -418; -9257; -20095; -21684; -25073; 6139; 150; 37661) = -25073 \text{ грн.};$$

$$y_i - y_{oi} \leq 0.$$

Таблиця 2

**Результати регресійного аналізу  
у разі комбінації різної кількості різних типів літаків**

№ з/п	Кількість ПС $n_i$ типу $m_j, x$	Цільова функція $y_i$ , грн.	Регресія, $y_{oi}$ , грн.	Відхилення $(y_i - y_{oi})$ , грн.
1	1111	42700	26302	16398
2	2111	50200	37241	12959
3	1112	51700	48180	3520
4	2211	58700	59118	-418
5	1122	60800	70057	-9257
6	1113	60900	80995	-20095
7	1114	70250	91934	-21684
8	2222	77800	102873	<b>-25073</b>
9	3333	119950	113811	6139
10	4134	124600	124750	150
11	4444	173350	135689	37661



**Рис. 2 Регресійний аналіз у разі комбінації  
різної кількості різних типів літаків**

Методом факторіалів (8) визначимо кількість можливих комбінацій літаків  $n_i$  різних типів  $m_j$  ( $n_i \neq \text{const}$ ,  $m_j \neq \text{const}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) за умови дозволу на відмінність порядку розташування та заборони повторів ПС у групі:

$$n_i = n! = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24. \quad (8)$$

Тобто, можна сформувати 24 групи, в яких кількість літаків кожного з чотирьох типів може змінюватись від одного до чотирьох.

Методом поєднання (9) визначимо кількість можливих комбінацій літаків  $n_i$  різних типів  $m_j$  ( $n_i \neq \text{const}$ ,  $m_j \neq \text{const}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) за умови заборони на відмінність порядку розташування та повторів ПС у групі:

$$c_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{24}{24 \cdot 1} = 1. \quad (9)$$

В нашому випадку можливий тільки один варіант поєднання літаків чотирьох різних типів у групу з чотирьох елементів.

**Висновки і перспективи подальших пошуків.** Методи комбінаторики та регресійного аналізу доцільно використовувати для прогнозування ефективності операційної діяльності авіакомпанії завдяки їх здатності знаходити оптимальний склад парку ПС для забезпечення мінімальної вартості авіап перевезень за умови максимального задоволення попиту на транспортування з урахуванням обмежень на кількість літаків різних типів. Надалі планується розрахунок мінімальної ефективності у разі різної кількості ПС різних типів.

#### Список використаних джерел

1. Pearce B. COVID-19. Outlook for air travel in the next 5 years. 13th May 2020. URL: <https://www.iata.org/en/iata-repository/publications/economic-reports/covid-19-outlook-for-air-travel-in-the-next-5-years/> (дата звернення 11.11.2020).
2. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982. 448 с.
3. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.
4. Taha H. A. Operations research: An introduction. 9th ed. USA: Pearson Publ., 2010. 832 p..
5. Прокудін Г. С. Моделі і методи оптимізації перевезень у транспортних системах: монографія. К.: Національний технічний університет, 2006. 224 с.
6. Трояновский В. М. Математическое моделирование в менеджменте. М.: РДП, 2002. 252 с.
7. Бакаев Л. А. Математические методы и модели исследования экономических систем. К.: Логос, 2005. 252 с.
8. Савченко Л. В. Підвищення ефективності прогнозування в транспортних системах: автореф. дис. ... канд. техн. наук. К., 2002. 34 с.
9. Eksioglu B., Vural A., Reisman A. The vehicle routing problem: A taxonomic review. *Computers & Industrial Engineering*. 2009. № 4. P. 1472–1483.
10. Дудукалов Ю. В. Применение методов нечеткого моделирования для оптимизации транспортных систем. *Вісник Севастопольського Національного технічного університету*. Серія: Машиноприладобудування та транспорт. 2011. Вип. 122. С. 61–64.
11. Забара С. С., Дехтярук М. Т. Автоматизована система управління транспортними перевезеннями. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2014. № 2. С. 18–28.
12. Сікірда Ю. В., Шмельова Т. Ф., Гаєвський С. В. Оптимізація транспортних потоків при організації міжнародних авіаційних перевезень. *Науковий вісник Львівської академії. Серія: Економіка, менеджмент та право*. Кропивницький: Львівська академія Національного авіаційного університету, 2019. Вип. 1. С. 91–97.
13. Шмельова Т. Ф., Сікірда Ю. В. Застосування методів комбінаторики для визначення оптимального складу повітряного парку авіакомпанії. *Комбінаторні конфігурації*

та їх застосування: матеріали міжнар. наук.-практ. сем., м. Кропивницький, 7-8 квітня 2017 р. Кропивницький: Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, 2017. С. 165–171.

14. Сікірда Ю. В., Шмельова Т. Ф., Гаєвський С. В. Регресійна модель оптимізації складу повітряного парку авіакомпанії. *Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем*: матеріали VII міжнар. наук.-практ. конф., Кропивницький, 22-23 листопада 2018 р. Кропивницький: Льотна академія Національного авіаційного університету, 2018. С. 80–82.

15. Кулаев Ю. Ф. Экономика гражданской авиации Украины: монография. К.: Феникс, 2004. 666 с.

16. Державна авіаційна служба України (Державіаслужба). URL: <http://www.avia.gov.ua> (дата звернення 08.11.2020).

17. Airlines Inform. URL: <https://www.airlines-inform.ru/commercial-aircraft/Boeing-737-family.html>. (дата звернення 11.11.2020).

18. Берегова Г. І., Сидоренко А. Ю. Економіко-математичне моделювання. К.: УБС НБУ, 2007. 148 с.

19. Бережная Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем. М.: Финансы и статистика, 2002. 367 с.

20. Шишкин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении. М.: Дело, 2002. 440 с.

### References

1. Pearce, B. (13.05.2020). COVID-19. Outlook for air travel in the next 5 years. Retrieved from <https://www.iata.org/en/iata-repository/publications/economic-reports/covid-19-outlook-for-air-travel-in-the-next-5-years/>.

2. Sachkov, V.N. (1982). Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoj matematiki [*An introduction to combinatorial methods in discrete mathematics*]. Moscow: Science. [in Russian].

3. Hall, M. (1970). Kombinatorika [*Combinatorics*]. Moscow: Peace. [in Russian].

4. Taha, H.A. (2010). Operations research: An introduction. 9th ed. USA: Pearson Publ.

5. Prokudin, G.S. (2006). Modeli i metodi optimizaciyi perevezen u transportnih sistemah: monografiya [*Models and methods of transportation optimization in transport systems: monograph*]. Kyiv: National Technical University. [in Ukrainian].

6. Troyanovskij, V.M. (2002). Matematicheskoe modelirovanie v menedzhmente [*Mathematical modeling in management*]. Moscow: RDP. [in Russian].

7. Bakaev, L.A. (2005). Matematicheskie metody i modeli issledovaniya ekonomicheskikh sistem [*Mathematical methods and models of economic systems research*]. Kyiv: Logos. [in Ukrainian].

8. Savchenko, L.V. (2002). Pidvishennya efektyvnosti prognozuvannya v transportnih sistemah [*Improving forecasting efficiency in transport systems*] (abstract of Candidate's dissertation). Kyiv. [in Ukrainian].

9. Eksioglu, B., Vural, A., & Reisman, A. (2009). The vehicle routing problem: A taxonomic review. *Computers & Industrial Engineering*, no. 4, 1472-1483.

10. Dudukalov, Yu.V. (2011). Primenenie metodov nechetkogo modelirovaniya dlya optimizacii transportnyh sistem [*The use of fuzzy modeling methods to optimize transport systems*]. Visnik Sevastopolskogo Nacionalnogo tehnicnogo universitetu. Seriya: Mashinopriladobuduvannya ta transport [*Bulletin of the Sevastopol National Technical University. Series: Machinery and Transport*], vol. 122, p. 61-64.

11. Zabara, S.S., & Dehtyaruk, M.T. (2014). Avtomatizovana sistema upravlinnya transportnimi perevezennyami [*Automated transportation management system*]. Sistemni doslidzhennya ta informacijni tehnologiyi [*System Research and Information Technologies*], no. 2, p. 18-28. [in Ukrainian].

12. Sikirda, Yu.V., Shmelova, T.F., & Haievskiyi, S.V. (2019). Optymizatsiia transportnykh potokiv pry orhanizatsii mizhnarodnykh aviatsiinykh perevezen [*Optimization of the transport flows in the organization of international air transportation*]. Naukovyi visnyk Lotnoi Akademii. Seriia: Ekonomika, menedzhment ta pravo [*Scientific Bulletin of the Flight Academy. Series: Economics, Management and Law*], no. 1, p. 91-97. [in Ukrainian].

13. Shmelova, T.F., & Sikirda, Yu.V. (2017). Zastosuvannia metodiv kombinatoriky dlia vyznachennia optymalnoho skladu povitrianoho parku aviakompanii [*Application of the combinatorics methods to determine the optimal composition of the airline's air fleet*]. Kombinatorni konfigurationsi ta yikh zastosuvannia: materialy mizhnar. nauk.-prakt. sem. [*Combinatorial configurations and their application: materials of international scientific-practice seminar*]. Kropyvnytskyi: Kirovohrad Flight Academy of National Aviation University, p. 165-171. [in Ukrainian].

14. Sikirda, Yu.V., Shmelova, T.F., & Haievskiyi, S.V. (2018). Rehresiina model optymizatsii skladu povitrianoho parku aviakompanii [*Regression model of the airline's fleet composition optimization*]. Upravlinnia vysokoshvydkisnymy rukhomymy ob'ektamy ta profesiina pidhotovka operatoriv skladnykh system: materialy VII mizhnar. nauk.-prakt. konf. [*Management of high-speed moving objects and professional training of operators of complex systems: materials of international scientific-practice conference*]. Kropyvnytskyi: Kirovohrad Flight Academy of National Aviation University, p. 80-82. [in Ukrainian].

15. Kulaev, Yu.F. (2004). Ekonomika grazhdanskoj aviacii Ukrainy: monografiya [*Economics of Civil Aviation of Ukraine: Monograph*]. Kyiv: Fenics. [in Ukrainian].

16. State Aviation Administration of Ukraine (2020). Retrieved from: <http://www.avia.gov.ua>. [in Ukrainian].

17. Airlines Inform (2020). Retrieved from: <https://www.airlines-inform.ru/commercial-aircraft/Boeing-737-family.html>.

18. Beregova, G.I., & Sidorenko, A.Yu. (2007). Ekonomiko-matematichne modelyuvannya [*Economic and mathematical modeling*]. Kyiv: UBS NBU. [in Ukrainian].

19. Berezhnaya, E.V., & Berezhnoj, V.I. (2002). Matematicheskie metody modelirovaniya ekonomicheskikh sistem [*Mathematical methods for modeling economic systems*]. Moscow: Finance and statistics. [in Russian].

20. Shishkin, E.V., & Chhartishvili, A.G. (2002). Matematicheskie metody i modeli v upravlenii [*Mathematical methods and models in management*]. Moscow: Delo. [in Russian].

**SHMELOVA Tetyana**, Doctor of Engineering, Associate Professor, Professor of the Air Navigation Systems Department, National Aviation University;

**SIKIRDA Yuliya**, Candidate of Engineering, Associate Professor, Associate Professor of the Tourism and Air Transportation Department, Flight Academy of National Aviation University;

**HAIEVSKYI Serhii**, Postgraduate, Flight Academy of National Aviation University.

## OPTIMIZATION OF THE AIRLINE'S AIR FLEET COMPOSITION BY THE METHODS OF COMBINATORICS AND REGRESSION ANALYSIS

**Abstract.** When organizing new airways or when the demand for existing routes changes after the end of the COVID-19 coronavirus pandemic, airlines may encounter problems with optimization of the air fleet composition and redistribution of aircraft on certain flights to maximize the existing demand for air transportation while minimizing the costs of the air transport company. Mathematical apparatus, which should be used to calculate the optimal composition of the airline's fleet, is combinatorial methods and regression analysis, for the optimal distribution of aircraft in the established directions of air transportation – the transport model.

*In carrying out the research, scientists focus on the optimal organization of passenger and cargo flows for maximum satisfaction of the demand for transportation with minimal costs, but do not take into account the impact on the cost of transportation by the combination of aircraft types.*

*The purpose of the research is to determine the optimal composition of the airline's air fleet to minimize the cost of air transportation, provided maximum demand for transportation with taking into account the number of aircraft of different types using methods of combinatorics and regression analysis.*

*The formalization of the problem of determining the maximum efficiency in the case of different numbers of aircraft of different types is presented. An example of finding the optimal composition of the air fleet of airline, which has aircraft types B-737-200, B-737-300, B-737-400, B-737-500 and performs flights on routes Kyiv-Athens, Kyiv-Ashgabat, Kyiv-Budapest, Kyiv-Warsaw, is considered.*

*The efficiency of air transportation with the different combination of aircraft types is predicted by regression analysis. For each combination, the actual (target function) and expected (regression) minimum cost of transportation is obtained. The maximum efficiency of air transportation in the case of a combination of the same number of different types of aircraft is expected in the presence of three aircraft of four different types and in the case of the combination of the different numbers of different types of aircraft – two aircraft of four different types.*

*The number of possible combinations of aircraft of different types under the conditions of permission and prohibition on the difference of the order of location and repetitions of aircraft in the group is determined by the methods of factorials and combinations.*

*It is proved that the methods of combinatorics and regression analysis should be used to predict the efficiency of the airline's operational activities due to their ability to find the optimal composition of the aircraft fleet to ensure the minimum cost of air transportation provided maximum satisfaction of transportation demand with restrictions on the number of aircraft of different types.*

**Key words:** *air transportation efficiency, aircraft type, combination method, demand, factorial method, first cost of flight, number of aircraft, passenger capacity, regression model.*

*Одержано редакцією: 15.01.2021 р.  
Прийнято до публікації: 21.01.2021 р.*