УДК 528.721.287:537.533.35

MODELOWANIE KSZTAŁTU POWIERZCHNI I JEJ RZUTOWANIE NA PŁASZCZYZNĘ: TRIANGULACJA DELAUNAY'A I JEJ ZASTOSOWANIA

O. Iwanczuk, A. Prykarpatskyj*
Nacionalny Uniwersytet "Lwiwska politechnika" (Lwiw, Ukraina),
*Akademija Gurniczo-Chutnicza (Kraków, Polska)

Podstawowe pojęcia i własności

Rozważmy gładką powierzchnię S^2 zanurzoną w przestrzeń Euklidesową $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3;< .,. >)$ i płaszczyznę rzutowania α, stycznej do tej powierzchni. Na powierzchni $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ są zadane punkty "tyczenia" oraz jej rzutowania na płaszczyznę α; t.j. są zadane punkty $(x_i, y_i) \in \alpha$, $i = 1, N$, oraz wartości funkcji kształtu $f : \alpha \to \mathbb{R}$ w tych punktach, $f_i := f(x_i, y_i) \in \mathbb{R}$, **1, N**.

Podstawowy problem, to - ***jak skonstruować przybliżenie dla funkcji kształtu $f : \alpha \to \mathbf{R}$, które by w najlepszy sposób uwzględniało szczegóły kształtu powierzchni $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ i byłoby efektywnym przy obliczeniach praktycznych.***

Ponieważ powierzchnia S^2 jest w ogólnym przypadku dość nieregularna, to najprostsza metoda interpolacyjna Lagrange'a w tym przypadku jest nieskuteczna.

Lepszym rozwiązaniem jest **interpolacyjny wzór Gaussa**:

$$\bar{f}(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i / [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]}{\sum_{i=1}^{N} 1 / [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]}, \quad (1.1)$$

gdzie $(x, y) \in \alpha$. To znaczy, że wartość funkcji w dowolnym punkcie $(x, y) \in \alpha$ jest wartością srednią od wartości funkcji w punktach "tyczenia", przy czym - waga, z ktorą każdy punkt pomiarów wchodzi w sumę (1.1), jest odwrotnie proporcjonalna kwadratu odległości do tego punktu na płaszczyznie α. Wzór (1.1) posiada taką graniczną własność:

$$\lim_{(x,y)\to(x_i,y_i)} \bar{f}(x,y) = f(x_i, y_i) \quad (1.2)$$

dla wszystkich punktów $(x_i, y_i) \in \alpha$; $i = 1, N$. Interpolacja Gaussa (1.1) jest, oczywiscie, klasy C^∞; tj. gładka, a jej wartości spełniają takie ważne nierówności:

$$\min_{i=\overline{1,N}} f_i \le \sup_{(x,y)\in\alpha} \bar{f}(x,y) \le \max_{i=\overline{1,N}} f_i \quad (1.3)$$

oraz

$$\sup_{(x,y)\in\alpha} |\Delta\bar{f}| \le \max_{i=\overline{1,N}} |\Delta f_i|, \quad (1.4)$$

co jest skutkiem liniowości odwzorowania (1.1). Tym nie mniej, interpolacja (1.1) posiada niedobrą cechę, żę w każdym punkcie "tyczenia" pochodne $\partial f(x_i, y_i)/\partial x = 0 = \partial f(x_i, y_i)/\partial y$, $i = 1, N$. To znaczy, że punkty "tyczenia" są lokalne ekstrema funkcji $f : \alpha \to \mathbb{R}$, i ich wpływ w tych punktach jest ważny w obszarze o szerokości **1/N**.

W tym przypadku funkcja $f : \alpha \to \mathbb{R}$ przypomina powierzchnię o kształcie jeża. Oprócz tego, złozonozć obliczeniowa jest kwadratowo zależna od objętości danych. A także, bez dodatkowych założeń na faktyczną funkcję $f : \alpha \to \mathbb{R}$ wyrażenie Gaussa (1.1) nie posiada rozsądnej granicy gdy $N \to \infty$. Przy tym trzeba zauważyć, że ważną własnością dobrej metody interpolacyjnej jest tak zwana "lokalność", to znaczy, że gdyby my uzupełniły nasze pomiary dodatkowym punktem "tyczenia" $(x_{N+1}, y_{N+1}) \in \alpha$; to wynik interpolacyjny będzie mało odrózniać się od poprzedniego poza nowym punktem. Oprócz tego, ponieważ metoda Gaussa jest liniowa, ona praktycznie zupełnie nie uwzględnia taką własność powierzchni $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ jak jej krzywizna.

Zeby uwzględnić fakt krzywizny potrzebne są inne metody aproksymacji powierzchni, które by uwzględniały krzywiznę w sposób jawny. Jak jest dobrze wiadomo jeszcze z czasów Euler'a, który pierwszy badał takie zagadnienie i wymyslił tak zwane "splajny sześcienne" dla modelowania krzywizny zgiętej belki czy pręta. Niestety, ta metoda, dzisiaj dobrze rozwinięta, jest mało użyteczna, ponieważ powstaje poważny problem lokalnej zgodności splajn-aproksymacji dla róznych sąsiadujących obszarów na płaszczyznie, który jest problemem zgodności już nie na zbiorach punktów, a na liniach brzegowych tych obszarów.

Dla ulżenia trudności tej metody często stosują metodę "wygładzania" splajn-interpolacji za pomocą minimizacji takiego funcjonału:

$$W_N(f) := \sum_{i=1}^{N} \left[\left(\bar{f}(x_i, y_i) - f_i\right)^2 + \lambda \int_\alpha \left(\bar{f}_{xx}^2 + \bar{f}_{yy}^2 + 2\bar{f}_{xy}^2\right) dxdy \right], \quad (1.5)$$

gdzie $0 < \lambda << 1$ i calka we wzorze (1.5) jest interpretowana jako energia "deformacji" powierzchni $S^2 \subset \mathbb{E}^3$.

Jak pokazują obliczenia praktyczne, splajn-metoda (1.5) zachowuje się dobrze tylko dla wystarczająco jednorodnych powierzchni. Przy tym złożoność oblizceniowa staje się czwartego stopnia, - a to znaczy, że gdy zmniejszacie krok siatki na płaszczyznie α dwukrotnie, ilość obliczeń wzrasta w szesnaście raz! Oprócz tego, rozwiązanie jest bardzo nie stabilne. Naprzykład, przy siatce 100 x 100 algorytm jest już nie użyteczny.

Inną *geodezyjnie praktyczną metodą* jest **podejście Snellius'a od 1615 roku**, który po raz pierwszy w Holandii przy układaniu kanałów zastosował "triangulacje" – to znaczy konstruowanie trojkątnych siatek na płaszczyznie α i wyprowadzenie odpowiedniej funkcji interpolacyjnej.

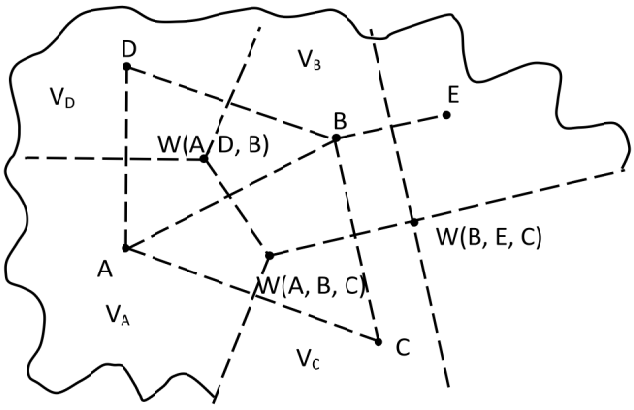
Są różne podejścia do triangulacji płaszczyzny na podstawie pomiarowych punktów "tyczenia". Najbardziej efektywną metodą triangulacji płaszczyzny α jest metoda Delaunay'a za pomocą, tak zwanych, obszarów Woronogo, ktory był na początku zeszłego wieku profesorem matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.

Dla konstruowania obszarów Woronogo potrzebujemy wprowadzić taką definicję.

Definicja 1. *Niech punkt $(x_i, y_i) \in \alpha$, $i = 1, N$; wtedy obszar $V_i \subset \alpha$ będziemy nazywać obszarem Woronogo, gdy on jest przecięciem wszystkich pół-płaszczyzn, zawierających ten punkt, i ograniczonych srednicowymi normalami do odcinków, łączących ten punkt ze wszystkimi innymi punktami "tyczenia".*

Jest oczywistym, że kazdy obszar Woronogo będzie tzw. poligonem, t.j. wielokątem wypukłym. Wtedy można zdefiniować nowy wierzchołek $w(A,B,C) \in \alpha$, który jest przecięńciem średnicowych normali odcinków AB i $BC \subset \alpha$, (N.B. Punkty A,B,C α - to są punkty "tyczenia") to on będzie też należać średnicowej normali do odcinka $AC \subset \alpha$. Ponieważ punkt $w(A,B,C) \in V_A \cap V_B \cap V_C$, to mozna lekko zauważyć, że obszary Woronogo tworza kratę na α , w każdym wierzchołku której są dokładnie trzy krawędzi i trzy odpowiednie obszary Woronogo.

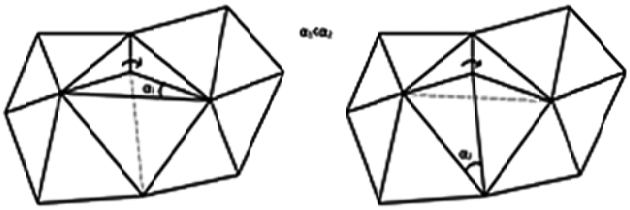
Wtedy, gdy połączyć pomiędzy sobą punkty obszary Woronogo, które sąsiadują ze sobą, to otrzymamy właśnie triangulację Delaunay'a, a wierzchołki obszarów Woronogo będą centrami opisanych okregów dla otrzymanych trójkątów.



Rys. 1. Obszary Woronogo oraz punkty triangulacji Delaunay'a

Triangulacja Delaunay'a posiada bardzo ciekawą i korzystną własność*: Dowolna triangulacja płaszczyzny* α *będzie triangulacją Delaunay'a, gdy wewnątrz każdego okręgu, opisanego dookoła trójkąta, nie znajduje się więcej żadnych wierzcholków tej triangulacji.*

Ten warunek jest koniecznym i wystarczającym dla triangulacji Delaunay'a.



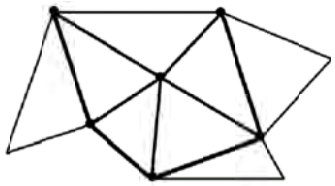
Rys. 2. Dobawienie nowego punktu.dowolnego

Uwaga 1. Ciekawostka: *dla punktów, leżących na okręgu, dowolna triangulacja będzie triangulacją Delaunay'a!*

Uwaga 2. *Metoda dodawania nowych punktów triangulacji jest "robastna", tj. odporna na błędy obliczeniowe. Oprócz tego, złożoność obliczeniowa konstruowania triangulacji Delaunay.a jest liniowa co do ilości punktów, co też jest zaletą.*

Z punktu widzenia obliczenia komputerowego jest też ważny problem identyfikacji tego trójkąta Delaunay'a, w którym pojawiłsie nowy punkt triangulacji, i który, okazuje się, też jest rozwiązywany algorytmicznie.

Ważnym też jest problem rekonstrukcji triangulacji Delaunay'a przy wyłączeniu pewnych punktów triangulacji ze zbioru w przypadku, gdy one zawierają niewłaściwą informację. Okazuje się, że ten problem jest bardzo lekko i prosto rozwiązywalny – dla tego wystarczy wyłączyć niepotrzebny punkt z triangulacji, a przeprowadzić zwykłą triangulacje Delaunay'a punktów tylko jej sąsiadujących.



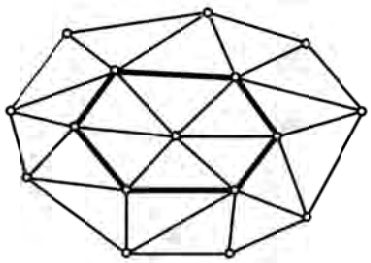
Rys. 3. Eliminacja punktu triangulacji Delaunay'a

I następna ważna zaleta triangulacji Delaunay'a – możliwość bardzo prostego połączenia różnych triangulacji, które posiadają niepuste przecięcie, przeprowadzając w zwykły sposób triangulacje Delaunay'a wspólnego obszaru przecięcia.

1.1. Triangulacja Delaunay'a i problem interpolacji

Wracając teraz do problemu interpolacji funkcji na podstawie triangulacji Delaunay'a, następne podejście okazuje się obliczeniowo bardzo efektywne.

Definicja 2. *Weżmy dowolny punkt* $i = 1, N$ *triangulacji Delaunay'a dla zadanej płaszczyzny* α *i zdefiniujmy punkty sąsiadujących z tym punktem jako zbior punktów* $N_i^{(1)}$ *pierwszego poziomu. Odpowiednio, zbiór punktów drugiego poziomu* $N_i^{(2)}$ *– to są punkty wierzchołkow trójkątów, które posiadają wspólną krawędź ze trójkątami o wspólnym wierzchołku* $i = 1, N$.



Rys.4. Zbiory punktów $N_i^{(1)}$ i $N_i^{(2)}$

Ogólna ilość punktów zbiorów $N_i^{(1)}$ i $N_i^{(2)}$ jest równa lub większa od 6, tj.

$$card\ N_i^{(1)} + card\ N_i^{(2)} \geq 6 \qquad (1.6)$$

dla dowolnego wierzchołku $i = 1, N$. W tym przypadku jest dość prosta możliwość skonstruowania dla każdego wierzchołka $i = 1, N$ triangulacji Delaunay'a funkcji interpolacyjnej wielomianowej w postaci

$$\overline{f}_i(x,y) := \sum_{k+j=0}^{2} f_{kj}^{(i)} (x - x_i)^j (y - y_i)^k \qquad (1.7)$$

dla pewnych parametrów $f_{kj}^{(i)} \in \mathbb{R}$, $k+j = 0, 2$; w taki sposób, żeby wartości funkcji (1.7) były równe

wartosciom popmiarów we wszystkich punktach ze zbioru $N_i^{(1)} \cup N_i^{(2)}$. Można też zminimalizować sumę kwadratów odchyleń od wartości funkcji w punktach "tyczenia":

$$\min_{\{f_{kj}^{(i)} \in R: k+j=\overline{0,2}\}} W_i(\bar{f}) =$$

$$= \sum_{j \in N_i^{(1)} \cup N_i^{(2)}} [\bar{f}(x_j, y_j) - f_i]^2 u_j \qquad (1.8)$$

gdzie wagi $u_j := 1 / |\Delta f_j|^2$; $j \in N_i^{(1)} \cup N_i^{(2)}$, są błędy pomiarów funkcji $f : \alpha \to \mathbb{R}$ w punktach "tyczenia".

1.2. Tensor metryczny oraz tensor za-nurzenia kształtu powierzchni w przestrzeń Euklidesową

Rozwazmy dwuwymiarową powierzchnię $S^2 \subset \mathbb{E}^3$, zanurzoną w przestrzeń Euklidesową $\mathbb{E}^3$. Niech odwzorowanie zanurzenia będzie

$$r : S^2 \to \mathbb{E}^3, \qquad (1.9)$$

a jej lokalne wzajemnie jednoznaczne rzutowanie na płaszczyznę $\alpha \subset \mathbb{E}^3$, styczną do powierzcni S^2, zapiszmy w otoczeniu punktu $A \in S^2$ w postaci rzutowej

$$r = (x, y, z = f(x; y)^T) \in \mathbb{E}^3, \qquad (1.10)$$

gdzie $(x, y)^T := \alpha \in \mathbb{E}^2$; a odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją lokalnego kształtu powierzchni S^2 spełnia warunek $f(0, 0) = 0$.

Zdefiniujmy teraz dwie formy różniczkowe kwadratowe:

$$M(\alpha) :=< dr, dr >:=< d\alpha , g(\alpha)d\alpha >_{\mathbb{E}2} \qquad (1.11)$$

tak zwaną formę metryczna, oraz

$$Q(\alpha) :=< d^2r, n >:=< d\alpha , g(\alpha)d\alpha >_{\mathbb{E}2} \qquad (1.12)$$

tak zwaną forme *Gaussa kształtu powierchni*, gdzie $n \in \mathbb{E}^3$ jest wektorem, *normalnym* do powierchni S^2 w punkcie $A \in S^2$; to jest $n \perp S^2$ oraz $\|n\| :=< n, n >^{1/2} = 1$. Wtedy krzywizna powierzchni S^2 w tym punkcie w kierunku jednostkowanego wektora, stycznego do powierzchni S^2 w punkcie $A \in S^2$:

$$\xi := dr / dt \; 2 \; T_A(S^2), \qquad (1.13)$$

który spełnia takie ogranizcenia

$$< \xi , n >_{t=0} = 0, \quad \| \xi \| = 1, \qquad (1.14)$$

będzie krzywizną krzywej linii $\gamma(\xi, n) \subset S^2$ przecięcia płaszczyzny $\beta(\xi , n)$, przechodzącej przez punkt $A \in S^2$ oraz prostopadłe do siebie wektory $\xi, n \in \mathbb{E}^3$; z powierzchnią S^2, to jest $\gamma(\xi , n) := \beta(\xi , n) \cap S^2$; i będzie równa takiemu wzoru:

$$k(\xi, n) := \frac{M(\alpha)(\xi,\xi)}{Q(\alpha)(\xi,\xi)}|_{t=0} = \frac{< \frac{d^2r}{dt^2}, n >}{< \frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} >}|_{t=0} =$$

$$=< \frac{d\xi}{dt|_{t=0}}, n > \qquad (1.15)$$

równe dokladnie *przyśpieszeniu wektora prędkości* (1.13) w punkcie $A \in S^2$ na płaszczyznie, przechodzącej przez wektor prędkości (1.13) i normal $n \in \mathbb{E}^3$ do powierzchni S^2 w punkcie $A \in S^2$. Zachodzą następne dwa dość elementarne twierdzenia.

Twierdzenie 1. *´Slad* $tr(qg^{-1})$ *oraz wyznacznik* $\det(qg^{-1})$ *są niezmiennikami krzywizny* (1.15) *w punkcie* $A \in S^2$.

Twierdzenie 2. *Macierz* $qg^{-1} \in End\ \mathbb{E}^2$ *posiada postac diagonalną*

$$qg^{-1} = \begin{pmatrix} k_+ & 0 \\ 0 & k_- \end{pmatrix}, \qquad (1.16)$$

gdzie $k_- \le k_+$ *są tak zwane główne krzywizny powierchni w punkcie* $A \in S^2$.

O ile wector (1.13) może być wybierany dowolnie, to przy jego pomocy można dotrzec do każdego punktu specjalnie dobranego otoczenia punktu $A \in S^2$. Tak więc, wybierając wektor (1.13) jako wektor potoku geodezyjnego, który dociera z punktu $A \in S^2$ do punktu $A(x, y) \in S^2$ najkrótszym szlakiem, można wykorzystać jego współrzędne jako najbardziej optymalne przy wyliczaniu rzutowania (1.10) w zmiennych prędkości $\xi \in \mathbb{E}^2$; na kierunek której niema prawie żadnych ograniczeń, oprócz (1.14).

Niech teraz płaszczyzna $\beta(\xi, m) \subset \mathbb{E}^3$ też przechodzi przez punkt $A(x, y) \in S^2$ i zawiera wektor prędkości $\xi \in \mathbb{E}^3$ oraz prostopadły do niego jednostkowy wektor $m \in \mathbb{E}^3$, to jest $< \xi, m >_{t=0} = 0$, $\|m\| = 1$. Wtedy jest dość lekko zobaczyć, że krzywizna krzywej $\gamma(\xi , m) \subset S^2$ przecięcia $\beta(\xi , m) \cap S^2$ będzie równa wzoru

$$k(\xi, m) = k(\xi, n) < n, m >:= k(\xi, n) \cos(n,\wedge m). \qquad (1.17)$$

Zależność krzywizny (1.17) od współrzędnych punktu $A(x, y) \in S^2$ daje mozliwość jej stosowania do konstruowania metod filtrowania informacji od szumu przy różnych pomiarach ważnych charakterystyk, zależnych od kształtu powierzchni.

Tak więc, jeśli badany objekt o powierzchni $S^2 \subset \mathbb{E}^3$ jest opisywany pewną funkcją intensywności

$I : S^2 \to \mathbb{R}_+$; to proces filtrowania danych może być opisany ewolucyjnym równaniem dyfuzji

$$\partial I/\partial t + \mathrm{div}(D\nabla I) = 0, \qquad (1.18)$$

gdzie współczynnik dyfuzji jest wybierany albo w postaci $D := \exp(-\|\nabla I\|^2/\sigma^2)$, albo w postaci $D := \sigma^2/(\|\nabla I\|^2 + \sigma^2)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ jest ustalonym parametrem, a ∇I jest gradientem, uwzględniającym kształt naszej powierzchni S^2. Wtedy równanie (1.18) prowadzi do zależności intensywności $I = I(k)$ od krzywizny, ktora już może być wykorzystana dla innych badań.

W innych przypadkach, gdy pomiary funkcji intensywności $I : S^2 \to \mathbb{R}_+$ zawieraja ostre zmiany amplitudy, zamiast podejścia dyfuzyjnego (1.18) jest wykorzystywana metoda filtrowania zawartej informacji od szumu przy pomocy anizotropowych jąder Gaussa:

$$G_{\sigma_X,\sigma_I}(X) = G_{\sigma_X}(X) G_{\sigma_I}(I(X)),$$
$$G_{\sigma_\infty}(X) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} \exp\left(-\frac{X^T X}{2\sigma_X}\right), \qquad (1.19)$$
$$G_{\sigma_I}(I) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_I}} \exp\left(-\frac{X^T X}{2\sigma_X}\right),$$

gdzie X 2 $End(\mathbb{E}^2)$ jest macierzą piksel-współrzędnych siatki pomiarów powierzchni $S^2 \subset \mathbb{E}^3$; a σ_X oraz $\sigma_I \in \mathbb{R}_+$ są ustalone parametry.

Wnioski

1. Krótko przeprowadzona analiza metod modelowania kształtu dwuwymiarowej powierzchni przez jej rzutowanie na plaszczyzne daje dość podstaw twierdzić, że podejście, bazowane na triangulacji Delaunay'a, jest wystarczająco efektywnym, oblicze-niowo stabilnym i odpornym na losowe błędy pomia-rowe.
2. Będąc metodą geometryczną jest ważnym wnioskiem możliwość uogolnienia tego podejścia w celu jawnego uwzględniania lokalnych krzywizn powierzchni przez skojarzony tensor metryczny powierzchni i tensor zanurzenia kształtu powierzchni w przestrzeń Euklidesową.
3. Przytoczone są argumenty efektywnego zastosowania metody geometrycznej do zagadnień filtrowania pomiarów odpowiednich funkcji intensywnosci, zależnej od kształtu objektu.
4. Dana metoda może być zastosowana do cyfrowego modelowanja mikropowierzchni twardych cial przy opracowaniu ich zdjęć, otrzymanych z pomocą skaningowego elektronowego mikroskopu.

Referencje

1. Milnor J. A Problem in Cartography. The American Mathematical Monthly, Vol. 76, No. 10.(Dec., 1969). – P. 1101–1112.
2. Volker John, Adela Kindl. Numerical studies of finite element variational multiscale methods for turbulent of simulations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 199 (2010) 841-852.
3. Liu Zhi, Tan Jie-qing, Chen Xiao-yan Zhang Li. Cubic Bezier Triangular Patch with Shape Parameters. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, Preprint.

Моделювання форми поверхні та її проекція на площину: тріангуляція Делоне і її застосування

О. Іванчук, А. Прикарпатський

Подано аналіз апроксимаційно-інтерполяційних методів стосовно застосування їх для моделювання форми поверхні та її проекції на площину. Запропонований аналітичний підхід до проектування поверхні на площину на основі тріангуляції Делоне.

Modelowanie kształtu powierzchni i jej rzutowanie na płaszczyznę: triangulacja Delaunay'a i jej zastosowania

O. Iwanczuk, A. Prykarpatskyj

Dana analiza metod aproksymacujno-interpolacyjnych w zastosowaniu do modelowania kształtu powierzchni i jej rzutowania na płaszczyznę. Zaproponowane analityhczne podejście do zagadnienia rzutowania na płaszczyznę na podstawie triangulacji Delaunay'a.

Modeling the shape of the surface and its projection on a plane: Delaunay triangulation and its application

O. Ivanchuk, A. Prykarpatski

The analysis approximation-interpolation methods applied to modeling the shape of the surface and its projection on the plane. An analytical proposed approach to projection onto a plane based on Delaunay triangulation.