

АДАПТИВНІ МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ТА ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ПОЛІВ ЗЕМЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ GNSS-ДАНИХ

О. Тадєєв

Національний університет водного господарства та природокористування

Ключові слова: GNSS, деформаційний аналіз, ріманові дифеоморфні многовиди, гомеоморфізм, метричний тензор

Постановка проблеми

Оцінювання та аналіз деформаційних полів Землі є одним з пріоритетних завдань сучасної геодинаміки, яке вирішується зусиллями різних природничих наук. Особливе місце в дослідженнях займає геодезичний моніторинг, який здатний кількісно оцінити сучасні деформаційні процеси різного масштабу за допомогою повторних спостережень геодезичних мереж, опрацювання та інтерпретації одержаних результатів. Мету і зміст досліджень у цьому напрямі визначають резолюції Міжнародної асоціації геодезії у межах діяльності підкомісії 3.2 “Деформації земної кори” комісії 3 “Обертання Землі та геодинаміка”. Теоретичною основою досліджень є математична теорія пружності. На сучасному етапі досліджень основним джерелом надходження вхідних даних визначено результати моніторингу координат методом глобальних навігаційних супутникових систем GNSS (Global Navigation Satellite System) [18].

Активний розвиток і запровадження у дослідницьку практику GNSS-методу моніторингу Землі відкрили нові перспективи розв’язання задач геодинаміки. Використання GNSS-даних істотно розширило потенційні можливості геодезичного моніторингу деформаційних полів. Втім, це породило проблеми, пов’язані з переосмисленням теоретичних основ деформаційного аналізу і виробленням нових моделей та методів опрацювання даних.

Аналіз досліджень та невирішені частини загальної проблеми

Еволюцію геодезичних методів досліджень проблеми вдало розкрив професор А. Дерманіс у своїй оглядовій статті [13]. Власний аналіз методів деформаційного аналізу в геодинаміці подано у статтях [8, 25]. Основний зміст відомих методів та нечисленні приклади відповідних типових досліджень систематизовано у порівняльній табл. 1. Не вдаючись тут до розкриття суті, констатуємо лише деякі ознаки методів, принципово важливі, зважаючи на власне бачення перспектив вирішення проблеми з використанням GNSS-даних.

Усі методи оцінювання деформаційних полів за геодезичними даними вже традиційно, ще від часу

запровадження у дослідницьку практику на початку минулого століття, ґрунтуються на математичній теорії пружності. З об’єктивних причин така потужна теоретична основа практично застосовується у найпростішій формі лінійно-однорідної моделі нескінченно малої деформації суцільного середовища.

Спочатку модель реалізовувалась методом скінченних елементів тільки на двовимірних симплексах у плоскій прямокутній системі координат з областю застосування в оцінюванні горизонтальної складової деформаційних полів. На основі лінійної функціональної моделі зміщень пунктів у вершинах симплексу досягався аналітичний розв’язок задачі. Кінцевою метою була побудова тензора деформації як основного геометричного об’єкта деформаційного процесу. Тензор забезпечував інтерпретацію явища різними за змістом числовими характеристиками. Цей вимушений вибір зумовлений використанням як вхідних даних результатів повторних спостережень класичних планових геодезичних мереж.

Згодом форми геометричних і відповідних їм функціональних моделей вдосконалили. Як базові використовують різні нелінійні функції, а розв’язки одержують числовими методами. Разом з тим, вдосконалюється розв’язання задач у напрямі використання вхідних даних у двовимірних криволінійних системах координат, таких як сферична та еліпсоїдальна. Порівняно з площиною, відповідні цим системам модельні поверхні є реальнішими з погляду відображення фізичної (топографічної) поверхні Землі. За рахунок цього досягається вища адекватність змодельованих на цих поверхнях тензорних і деформаційних полів у разі інтерпретації процесів уже не тільки локального, але й регіонального масштабів.

Проте незмінними залишаються теоретична основа і математична модель. З цієї причини на стадії формування тензора базові нелінійні функції створюваних функціональних моделей підлягають лінеаризації й у підсумку він відображає лише лінійні закономірності деформації. Це наслідок використання математичної моделі, яка здатна передавати тільки найпростіші афінні перетворення координат вершин скінченних елементів. Крім того, формальний, здебільшого, поділ території на скінченні елементи спричиняє ризики втрати адекватності лінійної моделі реальній деформації. Це ставить під сумнів

достовірність результатів опрацювання даних та інтерпретації явища.

Запровадження у дослідницьку практику GNSS-методу моніторингу координат спонукало до розроблення методів оцінювання тривимірних деформаційних полів. Проте більшість методів не передбачають прямого використання координат у просторовій геоцентричній системі ITRS, у якій здійснюється їх моніторинг GNSS-методом. Натомість попередньо виконується їх перетворення у сферичну чи еліпсоїдальну системи. Внаслідок цього числові оцінки деформаційних полів стосуються двовимірних модельних поверхонь, які параметризовані використовуваними системами координат і лише вкладені у тривимірний простір. Така властивість методів є наслідком використання теорії пластин і оболонок у вузьких межах методу скінченних елементів. Цей метод змушує розглядати модельні поверхні як градуєвані й зумовлює їх поділ на трикутники (або чотирикутники у формі ґрида). Якщо поділ території на скінченні елементи був певною мірою

виправданим як наслідок використання спостережень у класичних планових мережах, то використання такого підходу для опрацювання даних у сучасних мережах перманентних GNSS-станцій позбавлене всякого логічного змісту, позаяк ніякого поділу на елементи тих чи інших геометричних форм тут не існує. Але навіть у такому разі оцінюванню підлягають двовимірні тензори першого роду, які віднесені до однієї чи іншої поверхні, а інтерпретація деформаційних полів здійснюється тільки у горизонтальній складовій частині. Оцінювання вертикальних деформацій досягається використанням третьої координати унаслідок визначення інваріантів тензора другого роду або пов'язаного з першим тензора обертання. Отже, оцінювання горизонтальної та вертикальної складових частин деформаційних полів реалізується незалежно. Проте автори досліджень вважають, що за допомогою сумісної інтерпретації такий підхід здатний забезпечити вивчення просторових деформацій топографічної поверхні, оскільки її розглядають як вкладену в тривимірний простір системи ITRS.

Таблиця 1

Методи оцінювання деформаційних полів на основі математичної теорії пружності

Складові полів	Горизонтальна (двовимірна)			Просторова (тривимірна)			
Теоретична основа	математична теорія пружності						
Математична модель	лінійно-однорідна модель нескінченно малої деформації суцільного середовища						
Метод дослідження	метод скінченних елементів						
Модельна поверхня	площина	геосфера	земний еліпсоїд	геосфера	земний еліпсоїд	топографічна	
Система координат	прямокутна плоска x, y	сферична j, l	геодезична еліпсоїдальна B, L	локальна сферична j, l, r	геодезична еліпсоїдальна B, L, H	прямокутна геоцентрична x, y, z	
Геометрична модель	симплекс (трикутник)	довільні форми	чотирикутник	симплекс (трикутник)	довільні форми	чотирикутник	симплекс (тетраедр)
Геометричний об'єкт	двовимірний тензор Ейлера–Лагранжа першого роду			двовимірний тензор Ейлера–Лагранжа першого роду + тензор обертання	двовимірний тензор Ейлера–Лагранжа першого роду + тензор Ейлера–Лагранжа другого роду	тривимірний тензор Ейлера–Лагранжа першого роду	
Функціональна модель	лінійна функція двох змінних	довільна функція двох змінних	лінійна функція двох змінних	довільна функція двох змінних		лінійна функція трьох змінних	
Основа побудови тензора	афінні перетворення координат, які передбачають лінеаризацію функціональної моделі						
Масштаби полів	локальні	регіональні, локальні				локальні	
Деякі приклади типових досліджень	[11, 16]	[21, 23]	[1]	[15, 26]	[20, 22]	[10, 14]	[12, 19]

Оцінювання просторових деформацій за допомогою прямого використання координат у системі ITRS досягається у межах тривимірного симплекса – тетраедра. Цю модель і раніше використовували у дослідницькій практиці, якщо вдавалось сумістити пункти класичних планових і висотних геодезичних мереж. За такого підходу оцінюють безпосередньо тривимірні тензори Ейлера–Лагранжа першого роду. Але тоді інтерпретація деформаційних полів здійснюється за їх інваріантами, які віднесені не до топографічної поверхні, а до барицентрів симплексів. Отже, оцінюванню підлягають верхні горизонти земної кори. З погляду вивчення генезису та інтерпретації геодинамічних явищ загалом ця властивість методу має очевидний позитив. Але зважаючи на те, що координати вершин симплексів відносяться до топографічної поверхні, практичне застосування цього методу обмежене, оскільки він придатний для оцінювання локальних деформацій тільки в умовах пересіченого рельєфу.

Постановка завдання

Розроблення адаптивних методів оцінювання деформаційних полів Землі з використанням GNSS-даних.

Виклад основного матеріалу досліджень

Вимоги до адаптивних методів

Аналіз відомих методів вирішення проблеми показав недостатній ступінь відповідності результатів безперервного моніторингу координат фізичної поверхні Землі GNSS-методом потенційному інформаційному ресурсу. Беручи до уваги факт масового запровадження GNSS-даних у дослідницьку практику, це свідчить про необхідність подальшого вдосконалення методів їх опрацювання. Вдосконалення повинні ґрунтуватись на таких теоретичних підходах, які забезпечать адекватність моделей деформаційних полів, відповідних адаптивних методів їх опрацювання та аналізу одержаних результатів вхідним даним. Адаптивні методи оцінювання деформаційних полів повинні задовольняти, щонайменше, такі вимоги:

- можливість прямого використання GNSS-даних у тривимірній геоцентричній системі;
- можливість оцінювання, першочергово, тривимірних деформаційних полів;
- визначення оцінок деформації, віднесених безпосередньо до топографічної поверхні, яка підлягає прямому моніторингу GNSS-методом і на якій проявляються геодинамічні процеси, але не до типових двовимірних модельних поверхонь;
- безвідносність щодо поділу території на скінченні елементи;

- перспектива оцінювання деформаційних полів не лише локального чи регіонального, але й планетарного масштабів;

- можливість передавання нелінійних ефектів деформації як функціональною моделлю зміщень станцій спостережень, так і тензором, який не обтяжений умовою лінеаризації базових функцій цієї моделі.

Узагальнювальна теоретична основа

Обґрунтування вибору узагальнювального підходу і результати розроблення методів, які задовольняли б означені вимоги, подані у статтях [7, 8, 24, 25]. Зміст методів відображено у порівняльній табл. 2. В основу покладено теорію диференціального подання перетворень образів ріманового простору в формі складних та елементарних дифеоморфних многовидів. Для досягнення розв'язків використано методи проективно-диференціальної геометрії та прийоми описування змін ріманової метрики у дотичному просторі.

Застосовувати таку теоретичну основу для вирішення проблеми можна за гіпотези, що перетворення довільної три- чи двовимірної замкненої неперервної області простору мають геофізичне походження. Якщо областю простору вважати топографічну поверхню, то її просторово-часові перетворення ототожнюються з деформацією. На топографічну поверхню як об'єкт деформаційного аналізу на такій основі не накладається жодних обмежень щодо її розмірів та геометричних форм. Як наслідок, немає ніяких обмежень на масштаби поверхні та потреби в поділі її на скінченні елементи.

За умови використання як складного многовида дотичного евклідового простору, який параметризований декартовою системою координат, виникає перспектива описування деформаційних полів Землі не лише локального чи регіонального, а й глобального (планетарного) масштабу. Декартова параметризація уможливує пряме використання вхідних даних у геоцентричній прямокутній системі ITRS, оскільки остання є її частковим випадком, чи у будь-якій тривимірній криволінійній системі, наприклад, еліпсоїдальній чи сферичній. За будь-яких умов моделюванню підлягає безпосередньо топографічна поверхня безвідносно до її масштабу. Використання елементарних многовидів дає змогу оцінювати горизонтальну складову деформаційних полів локального та регіонального масштабів. Такі многовиди розглянуто у формі дотичних площини чи довільних криволінійних поверхонь з відповідними їм двовимірними параметризаціями. У цьому випадку деформаційні процеси оцінюються щодо тих чи інших модельних поверхонь, як це реалізують відомими

методами з попереднім перетворенням координат із системи ITRS.

Загальна теорія перетворень (відображень) образів ріманового простору допускає використання властивості гомеоморфізму дифеоморфних многовидів. Якщо многовиди мають однакову розмірність n і зазнають взаємно однозначного і неперервно диференційованого перетворення класу $n-1$, то вони відповідно визначають клас базових функцій, які передають це перетворення. Тоді це гладкі чи кусково-гладкі функції класу C^{n-1} . Отже, на функціональну модель накладаються лише умови однозначності, неперервності та диференційованості, але не обмежуються аналітичні форми її базових функцій. З погляду вирішуваного завдання це дає змогу подати перетворення нелінійними функціями, які встановлено емпірично за зміщеннями станцій спостережень вздовж у певний спосіб параметрично заданої кривої лише з умовою забезпечення достатньо гладкої зміни ріманової метрики. Тим самим забезпечується перспектива передавання нелінійних закономірностей деформації головним геометричним об'єктом – двовалентним коваріантним метричним тензором. За такого підходу формування тензора не обтяжене умовою лінеаризації базових функцій. Тензор формується метричною формою перетвореної (деформованої) області простору – квадратом довжини лінійного

елемента, який виражений за диференціалами координат області перетворення (до деформації) з урахуванням повних диференціалів гомеоморфних базових функцій.

Метричні форми області простору – це лінійні елементи міри, які описують не тільки відображувані області, але й внутрішню геометрію перетворення простору внаслідок зміни його метричних властивостей. Отже, якщо згідно з прийнятою гіпотезою допустити геофізичну сутність перетворень, то гомеоморфна функціональна модель і сформовані на її основі метричні форми і метричний тензор здатні передавати зміну метричних властивостей області числовими характеристиками різного геометричного змісту. По суті, останні і є параметрами деформації області простору як об'єкта дослідження у загальноприйнятому тлумаченні деформаційного аналізу в геодинаміці.

Окреслений теоретичний підхід до розв'язання задач деформаційного аналізу є узагальнювальним щодо використовуваного у сучасних дослідженнях навіть з погляду теорії тензорного аналізу та її застосування у геометрії, механіці та фізиці: лінійно-однорідна нескінченно мала деформація суцільного середовища розглядається як перетворення у середовищі афінного простору, який є тривіальним щодо евклідового і ріманового. Цей факт засвідчують численні класичні видання з цього напрямку, наприклад, [2, 3] тощо.

Таблиця 2

Методи оцінювання деформаційних полів на основі проєктивно-диференціальної геометрії

Складові полів	Просторова (тривимірна $n = 3$)			Горизонтальна (двовимірна $n = 2$)		
Теоретична основа	проєктивно-диференціальна геометрія у середовищі ріманового простору					
Математична модель	диференціальне подання перетворень образів ріманового простору					
Методи дослідження	методи проєктивно-диференціальної геометрії та прийоми описування змін ріманової метрики у дотичному просторі					
Визначальна гіпотеза	перетворення простору мають геофізичне походження					
Форми образів	складні дифеоморфні многовиди розмірності $n = 3$			елементарні дифеоморфні многовиди розмірності $n = 2$		
	дотичний евклідовий простір			дотична площа	дотичні криволінійні поверхні	
Системи параметризації (координат) многовидів	прямокутна геоцентрична x, y, z	геодезична еліпсоїдальна B, L, H	сферична j, l, r	прямокутна плоска x, y	геодезична еліпсоїдальна B, L	сферична j, l

Продовження табл. 2

Модельна поверхня	топографічна	площина	земний еліпсоїд	геосфера
Геометрична модель	довільна замкнена неперервна область простору			
Геометричний об'єкт	двовалентний коваріантний метричний тензор перетворення (деформації) області простору			
	тривимірний		двовимірний	
Функціональна модель	довільні гладкі чи кусково-гладкі гомеоморфні функції класу C^{n-1}			
Умови реалізації функціональної моделі	забезпечення достатньо гладкої зміни ріманової метрики			
Основа побудови тензора	зміна основної квадратичної (метричної) форми області простору на основі гомеоморфної функціональної моделі			
Масштаби полів	глобальні, регіональні, локальні		регіональні, локальні	

Результати розв'язань

Використовуючи методи проективно-диференціальної геометрії та прийоми описування змін ріманової метрики у дотичному просторі, на узагальнювальній теоретичній основі здійснено розв'язання в типових геодезичних три- і двовимірних системах координат і одержано робочі формули для обчислення характеристик деформації області простору. Формули придатні для вираження закономірностей деформації будь-якого характеру, які здатна передати емпірична гомеоморфна функціональна модель. Характеристики виражено в компонентах метричного двовалентного коваріантного тензора. Беручи до уваги усталену практику деформаційного аналізу в геодинаміці, різні за змістом характеристики поділено на три групи: 1) головні лінійні деформації – показники зміни форми у заданому напрямі; 2) дилатація – показники зміни об'єму Землі чи площі частини її поверхні із збереженням загальної форми (масштабний фактор); 3) показники кутових спотворень. Аналітичне вираження характеристик усіх трьох груп здійснювалось за двома напрямками.

1. Тривимірні деформаційні поля

У частині вираження першої групи параметрів виведено формули для обчислення коефіцієнтів розширення, стиснення та зсуву топографічної поверхні. Напрями цих показників визначено в геоцентричній полярній системі. Одержано формули для обчислення характеристик у довільному заданому напрямі, вздовж напрямів координатних осей, у проекціях на координатні площини, а також для тріади екстремальних значень з відповідною просторовою орієнтацією. Розв'язки адаптовано до прямого використання даних у системі ITRS [25].

Виведено формули для обчислення коефіцієнтів абсолютних та відносних об'ємних розширень як показників дилатації топографічної поверхні Землі у

глобальному масштабі, а також коефіцієнтів зміни площі поверхні регіонального чи локального масштабів. Оцінювання дилатаційних полів також досягається прямим використанням прямокутних просторових координат GNSS-станцій. Допускається використання координат у будь-якій тривимірній криволінійній системі. Тоді алгоритм їх перетворення із системи ITRS закладено в структуру метричного тензора [7].

У частині вираження групи параметрів кутових спотворень виведено формули для обчислення кутів жорсткого обертання у проекціях на координатні площини системи ITRS як складової глобальних просторових деформацій Землі. Задачу розглянуто у взаємозв'язку із ймовірними деформаціями цієї системи. Така гіпотеза обґрунтована геофізичним змістом концепції створення ITRS як наслідку порушення NNR-умови під час аномальних глобальних тектонічних процесів. Доведено, що за умови достатньої значущості означені кути є показниками кутових спотворень системи ITRS. Якщо їх виразити у відхиленнях від ортогональності осей у ITRF-реалізації, то одержуємо міри косокутної декартової системи на будь-яку епоху спостережень після реалізації. Істинність гіпотези поточних деформацій системи координат можна перевірити, порівнявши емпіричні значення кутів жорсткого обертання (разом із показником глобальної дилатації як масштабного фактора) з їх офіційними аналогами, які забезпечує ITRS-центр Міжнародної служби обертання Землі, наприклад, щодо останньої реалізації ITRF2014 [9]. Варто зазначити, що офіційні дані одержують комбінованим опрацюванням результатів моніторингу Землі методами супутникової геодезії GNSS, VLBI, SLR та DORIS із використанням загальновідомого перетворення Гельмерта у його лінеаризованій формі [17]. Власні одержані результати дають змогу визначати поточні деформації системи лише за GNSS-даними. В цій частині досліджень

одержано також аналітичні вираження для напрямів осей деформованої системи і подано рекомендації щодо формулювання та розв'язання задач деформаційного аналізу в разі емпіричного підтвердження гіпотези спотворень системи координат [24].

У контексті цієї рубрики одержані результати можуть застосовуватись для вирішення завдань сучасної геодезії у її взаємозв'язку з геодинамікою під час досліджень референціальних систем координат.

2. Двовимірні деформаційні поля

У такому напрямі досліджень задачу розглянуто з позицій диференціального подання перетворень образів ріманового простору в формі елементарних дифеоморфних многовидів, таких як дотичні поверхні довільної (зокрема нульової) кривини. З погляду класичної теорії перетворень проективно-диференціальної геометрії така задача трактується як частковий випадок щодо попередньої та частіше іменується теорією відображення поверхонь. Найпростіший розв'язок забезпечує теорія поверхонь у звичайному евклідовому просторі. Якщо довільно параметризовану двовимірну поверхню вважати вкладеною у тривимірний евклідовий простір, то її можна розглядати як двовимірний рімановий простір з відповідними квадратичною формою і тензором у рімановій метриці. Тоді в коефіцієнтах тензора будуть враховані взаємозв'язки криволінійних координат, якими параметризована поверхня, і просторових координат дотичного евклідового (у рімановому) простору. Під час вирішення поставленого завдання це дає змогу прямо використовувати просторові геоцентричні координати станцій спостережень у системі ITRS. Їх перетворення у двовимірну систему поверхні буде закладено в структуру тензора. Хоча тензорне поле з відповідними компонентами деформації буде відноситись не до топографічної, а до вибраної криволінійної поверхні, уможливиться одночасне моделювання деформаційних полів різного географічного розташування у єдиній геоцентричній системі. Використання такої теоретичної основи дає змогу оцінювати горизонтальну складову деформаційних полів Землі регіонального чи локального масштабів.

Виконано розв'язання й одержано робочі формули для вираження характеристик деформації зазначених трьох груп, які віднесені до типових геодезичних двовимірних модельних поверхонь з відповідними їм системами параметризації. У статті [6] подано результати розв'язання у сферичній геоцентричній системі, у статті [4] – в геодезичній (еліпсоїдальній). Тут також розкрито перспективи трансформації

деформаційного поля з однієї криволінійної поверхні на іншу. Для оцінювання локальних двовимірних деформацій достатньо використати результати розв'язання задачі на площині в прямокутній системі. Такі результати подано у статті [5].

Хоча зазначені розв'язки одержано незалежно, проте вони не можуть претендувати на первинність і наукову новизну, оскільки подібні вже використовують у дослідницькій практиці. Наприклад, автори [22] та інші послідовники цього напрямку в своїх дослідженнях використовують локальну сферичну систему координат. Дослідження [15] та інші однотипні з ними основані на використанні еліпсоїдальної системи. Однак власні одержані результати вирізняються з-поміж вказаних тим, що подані в узагальнювальній уніфікованій формі та здатні передати деформації будь-якого характеру, тоді як інші означені на стадії формування тензора передбачають лінеаризацію базових функцій координат. З цієї позиції власні результати, безсумнівно, практично значущі для геодинамічних досліджень.

Висновки

Аналіз підходів і методів оцінювання деформацій Землі за геодезичними даними показав, що використовувані моделі деформаційних полів і методи їх оцінювання характеризуються недостатнім ступенем відповідності потенційному інформаційному ресурсу даних, які забезпечує GNSS-метод моніторингу координат. З урахуванням цього сформульовано вимоги до моделей і адаптивних методів оцінювання деформаційних полів за GNSS-даними. Запропоновано альтернативні узагальнювальний підхід і методи деформаційного аналізу на основі теорії диференціального подання перетворень образів ріманового простору в формі складних та елементарних дифеоморфних многовидів. Для отримання розв'язків залучено методи проективно-диференціальної (метричної) геометрії та прийоми описування змін ріманової метрики у дотичному просторі.

На такій основі виконано розв'язання у типових геодезичних системах координат і виведено робочі формули для обчислення різних числових характеристик головних лінійних деформацій, дилатації та кутових спотворень. Розв'язки в тривимірних системах забезпечують інтерпретацію деформацій безпосередньо топографічної поверхні глобального, регіонального та локального масштабів. У випадку глобального масштабу розв'язки розглянуто у взаємозв'язку із

ймовірними поточними деформаціями системи ITRS, у якій здійснюється GNSS-моніторинг координат. Формули враховують ці деформації під час виконання деформаційного аналізу. Розв'язки в двовимірних системах координат забезпечують оцінки деформації земної поверхні регіонального та локального масштабів з інтерпретацією стосовно модельних поверхонь, яким відповідають ці системи. У всіх робочих формулах характеристики деформації виражено через компоненти метричного двовалентного коваріантного тензора, який не обтяжений умовою лінеаризації базових функцій i , отже, забезпечує перспективу передавання нелінійних деформаційних ефектів.

Література

1. Марченко О. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О. Марченко, К. Третяк, А. Кульчицький та ін. – Львів: Львівська політехніка, 2012. – 308 с.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М.: Наука, 1967. – 667 с.
3. Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред / И. С. Сокольников; пер. с англ. – М.: Наука, 1971. – 376 с.
4. Тадеєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні за даними в геодезичних криволінійних системах координат / О. Тадеєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2015. – Вип. I (29). – С. 48–52.
5. Тадеєв О. А. Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О. А. Тадеєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2013. – Вип. 78. – С. 140–145.
6. Тадеєв О. Оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на геосферу / О. Тадеєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2013. – Вип. II (26). – С. 46–52.
7. Тадеєв О. Оцінювання тривимірних деформаційних полів Землі методами проективно-диференціальної геометрії. Дилатаційні поля Землі / О. Тадеєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2017. – Вип. I (33). – С. 53–60.
8. Тадеєв О. А. Проблеми та перспективи оцінювання деформаційних полів Землі за геодезичними даними / О. А. Тадеєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2015. – Вип. 82. – С. 73–94.
9. Altamini Z. ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions / Z. Altamini, P. Rebischung, L. Metivier, X. Collilieux // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2016. – Vol. 121 (B8). – P. 6109–6131.
10. Altiner Y. Present-day tectonics in and around the Adria plate inferred from GPS measurements / Y. Altiner, Z. Bacic, T. Basic, A. Coticchia, M. Medved, M. Mulic, B. Nurce // Dilek Y., Pavlides S. (Eds.) Postcollisional tectonics and magnetism in the Mediterranean region and Asia: Geological Society of America Special Paper 409, 2006. – P. 43–55.
11. Bibbi H. M. Unbiased estimate of strain from triangulation data using the method of simultaneous reduction / H. M. Bibbi // Tectonophysics. – 1982. – Vol. 82. – P. 161–174.
12. Brunner F. K. On the analysis of geodetic networks for the determination of the incremental strain tensor / F. K. Brunner // Survey Review. – 1979. – Vol. XXV, 192. – P. 56–67.
13. Dermanis A. The evolution of geodetic methods for the determination of strain parameters for earth crust deformation / A. Dermanis // Arabelos D., Kontadakis M., Kaltsikis Ch., Spatalas S. (Eds.). Terrestrial and stellar environment. – Publ. of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 2009. – P. 107–144. – <http://der.topo.auth.gr/DERMANIS/ENGLISH>
14. Grafarend E. W. The transition from three-dimensional embedding to two-dimensional Euler-Lagrange deformation tensor of the second kind: variation of curvature measures / E. W. Grafarend // Pure and Applied Geophysics. – 2012. – Vol. 169. – P. 1457–1462.
15. Grafarend E.W. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets) / E. W. Grafarend, B. Voosoghi // Journal of Geodesy. – 2003. – Vol. 77. – P. 303–326.
16. Harada T. Horizontal deformation of the crust in western Japan revealed from first-order triangulation carried out three times / T. Harada, M. Shimura // Tectonophysics. – 1979. – Vol. 52. – P. 469–478.
17. IERS Conventions (2010). Petit G., Luzum B. (Eds.), IERS Technical Note; 36. – Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. – 179 p. – http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechNote36/tn36_031.pdf

18. International Association of Geodesy – http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf
19. Kiamehr R. Analysis of surface deformation patterns using 3D finite element method: A case study in the Skane area, Sweden / R. Kiamehr, L.E. Sjoberg // *Journal of Geodynamics*. – 2005. – Vol. 39. – P. 403–412.
20. Kreemer C. Geodetic constraints on contemporary deformation in the northern Walker Lane: 2. Velocity and strain rate tensor analysis / C. Kreemer, G. Blewitt, W.C. Hammond // Oldow J. S., Cashman P. H. (Eds.). *Late Cenozoic structure and evolution of the Great Basin – Sierra Nevada transition: Geological Society of America Special Paper 447*, 2009. – P. 17–31.
21. Pietrantonio G. Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications / G. Pietrantonio, F. Riguzzi // *Journal of Geodynamics*. – 2004. – Vol. 38. – P. 1–18.
22. Savage J.C. Strain accumulation and rotation in the Eastern California Shear Zone / J.C. Savage, W. Gan, J.L. Svarc // *Journal of Geophysical Research*. – 2001. – Vol. 106 (B10). – P. 21995–22007.
23. Schneider D. Complex Crustal Strain Approximation / D. Schneider. – Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, *Mitteilungen* 33, 1982. – 221 p. – <http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:1494-01.pdf>
24. Tadyeyev O. Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. Rigid rotations of the Earth / O.Tadyeyev // *Geodesy, Cartography and Aerial Photography*. – 2016. – Vol. 84. – P. 25–38.
25. Tadyeyev O.A. Evaluation of three-dimensional deformation fields of the Earth by methods of the projective differential geometry. The main linear deformation / O.A. Tadyeyev // *Scientific Journal of Geodynamics*. – 2016. – No. 21. – P. 7–17.
26. Voosoghi B. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on 3-dimensional displacement fields derived from space geodetic measurements / B. Voosoghi // PhD thesis, Institute of Geodesy, University of Stuttgart, Germany, 2000. – 110 p.

**Адаптивні методи оцінювання
та інтерпретації деформаційних полів Землі
з використанням GNSS-даних**

О. Тадєєв

Розглянуто перспективи створення моделей і методів оцінювання деформаційних полів Землі, які

адекватні даним моніторингу фізичної поверхні GNSS-методом. Аналіз використовуваних методів виявив недостатній ступінь їх відповідності потенційному інформаційному ресурсу GNSS-даних. Сформульовано вимоги до моделей деформаційних полів і нових адаптивних методів опрацювання GNSS-даних. Запропоновано альтернативні узагальнювальний підхід і методи деформаційного аналізу на основі теорії диференціального подання перетворень образів ріманового простору в формі складних та елементарних дифеоморфних многовидів.

**Адаптивные методы оценки
и интерпретации деформационных полей Земли
с использованием GNSS-данных**

А. Тадеев

Обсуждаются перспективы создания моделей и методов оценки деформационных полей Земли, адекватных данным мониторинга физической поверхности GNSS-методом. Анализ существующих методов показал недостаточную степень их соответствия потенциальному информационному ресурсу GNSS-данных. Сформулированы требования к моделям деформационных полей и новым адаптивным методам обработки GNSS-данных. Предложены альтернативные обобщающий подход и методы деформационного анализа на основе теории дифференциального представления преобразований образов риманова пространства в форме сложных и элементарных диффеоморфных многообразий.

**Adaptive methods for evaluation
and interpretation of Earth's deformation fields
using GNSS data**

A. Tadyeyev

This article discusses the prospects for the creation of models and methods for evaluation of deformation fields of the Earth that are adequate to the data of physical surface monitoring by the GNSS method. Existing approaches and research methods that use the GNSS data are analyzed. The insufficient degree of conformity of methods to the potential informative resource of these data was revealed. Requirements for models of deformation fields and new adaptive methods of GNSS data processing were formulated. An alternative generalizing approach and methods of deformation analysis are proposed. They are based on the theory of differential representation of transformations of Riemannian space images in the form of complex and elementary diffeomorphic manifolds.