УДК 519. 161

МЕТОД ГІЛОК ТА МЕЖ У ГАМІЛЬТОНОВІЙ ЗАДАЧІ ПРО СІЛЬСЬКОГО ЛИСТОНОШУ

А.В. МОРОЗОВ, А.В. ПАНІШЕВ

Сформульовано гамільтонову задачу про сільського листоношу, яка є узагальненням гамільтонової задачі комівояжера. Запропоновано модифікацію класичного методу гілок та меж (методу Літтла), яка дозволяє знаходити точний розв'язок гамільтонової задачі про сільського листоношу або коректно встановити його відсутність.

ВСТУП

Задача комівояжера та методи її розв'язання нині є широко відомими. Менш відомою є гамільтонова задача комівояжера, яка описана в роботах [1–2]. У цій роботі описується узагальнення гамільтонової задачі комівояжера для випадку, коли додатково задано множину ребер, через які обов'язково має пройти гамільтонів цикл. Це узагальнення називатимемо гамільтоновою задачею про сільського листоношу (ГЗСЛ) [3, 4]. Відомі на сьогодні методи розв'язання гамільтонової задачі комівояжера не можуть бути безпосередньо застосовані для такої задачі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Сформулюємо задачу про сільського листоношу в термінах теорії графів.

Задано зв'язний зважений граф $H=(V,U)$ з множиною вершин V, $|V|=n$ та множиною ребер U. Кожному ребру $\{i,j\}\in U$ приписано вагу $d_{ij}\in Z_0^+$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$, Z_0^+ — множина невід'ємних цілих чисел. Граф H повністю визначається симетричною матрицею ваг $[d_{ij}]_n$, де $d_{ij}\in Z_0^+$, якщо $\{i,j\}\in U$ та $d_{ij}=\infty$ інакше, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$, $d_{ii}=\infty$, $i,j=\overline{1,n}$. На множині U задано непорожню підмножину ребер R. Необхідно знайти в графі H цикл, який містить кожне ребро з R та має мінімальну сумарну вагу всіх ребер.

Позначимо $z(R)$ гамільтонів цикл графу H, який проходить по всім ребрам множини R. Назвемо ГЗСЛ задачу, що полягає в знаходженні гамільтонового циклу $z^*(R)$, який мінімізує функціонал:

$$C(z(R)) = \sum_{\{k,l\} \in z(R)} d_{kl} \,. \qquad (1)$$

Зацікавленість у розв'язанні ГЗСЛ виникає у тому випадку, коли потрібно знайти кільцевий маршрут на транспортній мережі міста або району, що моделюється графом $H = (V, U)$. Кожному пункту відправлення (прибуття) мережі відповідає вершина $i \in V$, $|V| = n$, а кожному ребру $\{i, j\} \in U$ — відрізок дорожнього полотна між парою сусідніх пунктів i та j. Ребро $\{i, j\}$ характеризується вагою (вартістю) d_{ij}, яка дорівнює затратам на переміщення транспортного засобу з i в j або з j в i.

На практиці пасажирські автоперевезення виконуються за маршрутами, для яких завчасно визначено порядок проходження деякої частини пунктів. Основою для вибору таких ділянок можуть бути пріоритети одних пунктів над іншими: масиву багатоповерхових будівель над котеджним селищем, заводського району над курортною зоною тощо. Наприклад, середній час поїздки пасажирів за кільцевим міським маршрутом, що охоплює сусідні, прилеглі, щільнонаселені квартали — менший, ніж у будь-якого іншого кільцевого маршруту, якщо показники якості дорожнього покриття мережі відповідають встановленим параметрам. Ділянки доріг, які апріорі включено в планований кільцевий маршрут у графі $H = (V, U)$, подані множиною ребер R, що утворюють сукупність ланцюгів. Якщо в графі H міститься гамільтонів цикл $z(R)$, то у відповідній транспортній мережі він визначає найпростіший кільцевий маршрут.

ГЗСЛ є NP-повною, оскільки у випадку $R = \varnothing$ вона є NP-повною гамільтоновою задачею комівояжера (ГЗК) [4]. У [2] запропоновано алгоритм, який коректно знаходить розв'язок ГЗК, якщо граф H гамільтонів, і встановлює її нерозв'язність у протилежному випадку. В основі запропонованого алгоритму лежить схема гілок та меж, яка виконується після перевірки достатніх умов нерозв'язності ГЗСЛ. Очевидно, що складність такої перевірки має бути обмежена поліномом від розміру задачі.

Безпосереднє застосування алгоритму гілок та меж з [1, 2] не дозволяє розв'язати ГЗСЛ. Включення в шуканий гамільтонів цикл заданої підмножини ребер $R \neq \varnothing$ виявляється настільки сильним обмеженням, що вимагає іншого підходу до організації розгалуження та обчислення нижніх оцінок для $C(z^*(R))$.

АЛГОРИТМ

За допомогою вершинно-реберного перетворення, який описаний у [5] ГЗСЛ зводиться до цієї ж задачі на графі $H = (V, U)$, в якому степені всіх вершин більші, ніж 2 і множина ребер R, яка міститься в шуканому гамільтоновому циклі, утворює паросполучення R. Очевидно, $|R| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $n = V$. Відмітимо, що величина $|R|$ обмежує простір розв'язків настільки, що він може виявитися порожнім. Назвемо допустимий розв'язок ГЗСЛ $z(R)$ обходом.

Пошук розв'язку задачі починається з перетворення матриці вартостей графу H у приведену матрицю [6]. Він полягає в тому, що в рядку i шукається мінімальний елемент $\alpha_i = \min\limits_j d_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, який віднімається від кожного елемента цього рядка. Потім у стовпці j шукається мінімальний елемент $\beta_j = \min d_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, який віднімається від кожного елемента цього стовпця. Елементи α_i та β_j називаються коефіцієнтами приведення. З приведеної матриці $[d_{ij}]_n$ знаходиться нижня границя вартості шуканого розв'язку

$$\phi(R) = \sum_{\{i,j\}\in R} \min\{d_{ij}, d_{ji}\} + \gamma, \qquad (2)$$

де

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_i .$$

Приведена матриця, яка визначає множину всіх розв'язків ГЗСЛ, у загальному випадку не симетрична. Їй взаємно однозначно відповідає зважений орієнтований мультиграф $H' = (V, U')$, в якому вершини i та j зв'язані парою дуг (i, j) та (j, i), якщо в графі $H = (V, U)$ вони зв'язані ребром $\{i, j\}$. Таким чином, кожне ребро $\{i, j\} \in R$ графу H подане в мультиграфі H' двома дугами $(i, j) \in R'$, $(j, i) \in R'$, $|U'| = 2|U|$, $|R'| = 2|R|$.

У приведеній матриці виберемо ті елементи (i, j) та $(j, i) \in R'$, для яких $\Delta_{ij} = \min\{d_{ij}, d_{ji}\} > 0$ і покладемо

$$d_{ij} = d_{ij} - \min\{d_{ij}, d_{ji}\} = d_{ij} - \Delta_{ij},\ d_{ji} = d_{jji} - \min\{d_{ij}, d_{ji}\} = d_{ji} - \Delta_{ij} .$$

Назвемо отриману матрицю $[d_{ij}]_n$ повністю приведеною. Подальші дії будуть виконуватися за допомогою цієї матриці.

Перетворення матриці вартостей графу H у повністю приведену матрицю $[d_{ij}]_n$ має аргументоване обґрунтування. ГЗСЛ для повністю приведеної матриці полягає в побудові гамільтонового контуру або обходу мінімальної вартості, який включає в точності одну дугу з кожної пари (i, j), $(j, i) \in R'$, що містить хоча б одну дугу з нульовою вагою. Таким чином, за матрицею $[d_{ij}]_n$ визначається список дуг нульової ваги, які є претендентами на включення в оптимальний розв'язок.

Викладені міркування відкривають можливість адаптувати класичний алгоритм гілок та меж, який описаний у [6], для пошуку розв'язку ГЗСЛ. Покажемо, що спосіб розгалуження допустимих розв'язків $z(R)$ вкладається у відому схему побудови бінарного дерева перебору [6].

Кореню дерева перебору $\{z(R)\}$ поставимо у відповідність повністю приведену матрицю $[d_{ij}]_n$ з оцінкою $\phi(R)$ і визначимо дугу мультиграфу H', яка ініціює розгалуження. Для цього, як і в [6], кожний елемент (p, q) в $[d_{ij}]_n$ такий, що $d_{pq} = 0$, оцінимо величиною

$$\gamma(p, q) = \min_{i \neq q} d_{pi} + \min_{j \neq p} d_{jq} \qquad (3)$$

і знайдемо елемент (p, q) з найбільшим значенням

$$\Gamma(k,l) = \max\{\gamma(p,q) \mid d_{pq} = 0\}. \tag{4}$$

Елементу (p,q) у мультиграфі H' відповідає дуга (p,q), яка ініціює розбиття множини всіх обходів на дві підмножини та породжує в умовах ГЗСЛ два випадки: $\{k,l\} \notin R$ та $\{k,l\} \in R$.

У випадку $\{k,l\} \notin R$ множина всіх розв'язків задачі розбивається на підмножини $\{\{k,l\} \notin R\}$ та $\{(\overline{k,l})\}$. Перша підмножина включає всі обходи, які містять дугу (k,l), а друга — усі обходи, які не містять цієї дуги.

Матриця, за якою обчислюється нижня границя $\phi((k,l) \in R')$ вартості всіх обходів множини $\{\{k,l\} \notin R \notin R'\}$ і визначає цю множину, знаходиться так само, як і в [6], за умови, що виконується таке правило.

Якщо множина R містить ребро $\{x,k\}$, то в шуканий обхід разом із дугою (k,l) включається дуга (x,k). Аналогічно, якщо множина R містить ребро $\{y,l\}$, то до дуги (k,l) приєднується дуга (l,y). Включення дуги (x,k) або (l,y) у підмножину розв'язків $\{(k,l) \notin R'\}$ означає, що матриця, яка її визначає, не містить не тільки рядок k та стовпець l, але і той рядок і стовпець, номери яких є початком і кінцем дуги, що приєднується. У випадку $\{x,k\}$, $\{y,l\} \in R$ до дуги (k,l) приєднуються дуги (x,k) і (l,y), а у матриці, яка визначає множину $\{(k,l) \notin R'\}$, виключаються рядки x, k, l та стовпці k, l, y.

Позначимо нижню границю вершини розгалуження ϕ. Для дуги $(k,l) \notin R'$, яка ініціює розгалуження, покладемо

$$\mu_k = \begin{cases} d_{xk}, & \text{якщо } \{x,k\} \in R, \\ 0, & \text{інакше;} \end{cases} \qquad \mu_l = \begin{cases} d_{ly}, & \text{якщо } \{l,y\} \in R, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

де d_{xk}, d_{ly} — елементи матриці, яка відповідає границі ϕ. У випадку $\phi = \phi(R)$ вони є елементами повністю приведеної матриці $[d_{ij}]_n$. Тоді вартість усіх обходів множини $\{(k,l) \notin R'\}$ обмежена знизу величиною

$$\phi((k,l) \notin R) = \phi + \mu_k + \mu_l + \sum \alpha'_i + \sum \beta'_j, \tag{5}$$

де α'_i та β'_j — коефіцієнти приведення, отримані в результаті перетворення матриці, якій відповідає границя ϕ, у матрицю, яка визначає множину $\{(k,l) \notin R\}$.

Матриця, яка визначає множину $(\overline{k,l})$, і границя $\phi(\overline{k,l})$ знаходиться так, як і в [6]:

$$\phi(\overline{k,l}) = \phi + \Gamma(k,l). \tag{6}$$

Розглянемо випадок, коли $(k,l) \in R$. Простір розв'язків ГЗСЛ $\{z(R)\}$ розбивається на дві підмножини $\{(k,l)\}$ та $\{(l,k)\}$. У першу підмножину включаються всі обходи, які містять дугу (k,l), а в другу — дугу (l,k).

Нехай вершині розгалуження відповідає границя φ та матриця D, яка породжує дугу (k,l) або (l,k), $\{k,l\} \in R$ із максимальною оцінкою. Матриця, яка визначає підмножину $\{(k,l)\}$, знаходиться в результаті виключення з D рядка k та стовпця l, присвоєння елементу d_{lk} значення ∞ та приведення отриманої скороченої матриці. Аналогічно, для знаходження матриці, яка визначає підмножину $\{(l,k)\}$, необхідно в D покласти $d_{kl}=\infty$, видалити рядок l та стовпець k та виконати приведення отриманої скороченої матриці. Нижні границі вартості обходів для підмножини $\{(k,l)\}$ та $\{(l,k)\}$ обчислюються таким чином:

$$\phi(k,l)=\phi+d_{kl}+\sum_{i\neq k}\alpha'_i+\sum_{j\neq l}\beta'_j\ , \tag{7}$$

$$\phi(l,k)=\phi+d_{lk}+\sum_{i\neq k}\alpha'_i+\sum_{j\neq l}\beta'_j\ , \tag{8}$$

де α'_i,β'_j — коефіцієнти приведення, отримані в результаті перетворення матриці D.

Можливим є випадок, коли в D або $d_{kl}=\infty$, або $d_{lk}=\infty$. З (7) і (8) випливає, що якщо $d_{kl}=\infty$, то $\{(k,l)\}=\varnothing$, якщо $d_{lk}=\infty$, то $\{(l,k)\}=\varnothing$.

Модифікація базового алгоритму гілок та меж для розв'язання ГЗСЛ, яку отримано в результаті вершинно-реберного перетворення (ВРП), має такий вигляд.

0. $H=(V,U)$ — неорієнтований зважений граф із степенями вершин більшими 2, поданий матрицею вартостей порядку $n=|V|$; R — паросполучення графу H, яке міститься в шуканому гамільтоновому циклі $z^*(R)$ мінімальної вартості. Покладаємо $C^*=\infty$.

1. Матриця вартостей графу H перетворюється в приведену матрицю, за якою обчислюється нижня границя $\phi(R)$ вартостей для всіх розв'язків задачі. З приведеної матриці визначається повністю приведена матриця $D=[d_{ij}]_n$, яка відповідає орієнтованому зваженому мультиграфу $H'=(V,U')$, $|U'|=2|U|$, $|R'|=2|R|$. У H' потрібно знайти гамільтонів контур (обхід), який містить рівно по одній дузі з кожної пари дуг (i,j), $(j,i)\in R'$, і має мінімальну вартість.

2. У матриці D за формулами (3) і (4) знаходиться елемент (k,l), поданий у мультиграфі дугою (k,l), яка породжує в дереві перебору вершину розгалуження.

3. Якщо $\{k,l\}\notin R$, то перехід до п. 7.

4. Якщо $d_{lk}=\infty$, то підмножина обходів $\{(l,k)\},\{k,l\}\in R$, яка містить дугу (l,k) порожня; перехід до п. 6.

5. Для визначення підмножини обходів $\{(l,k)\},\{k,l\}\in R$, які містять дугу (l,k), розглядається скорочена матриця, де $d_{kl}=\infty$ і виключено рядок l та стовпець k. Після її приведення за формулою (8) обчислюється нижня границя $\phi(l,k)$ вартості дуг усіх обходів підмножини $\{(l,k)\}$, яка породжує в дереві перебору поточну активну вершину $\{(l,k)\}$. Якщо $C^*>\phi(l,k)$, то вершина $\{(l,k)\}$ з приведеною матрицею D та границею $\phi(l,k)$ приєднується до вершини розгалуження, інакше вона далі не розглядається. Перехід до п. 9.

6. Для визначення підмножини обходів $\{(k,l)\}, \{k,l\} \in R$, які містять дугу (k,l), розглядається скорочена матриця, в якій $d_{lk} = \infty$ і виключені рядок k та стовпець l. Після її приведення за формулою (7) обчислюється нижня границя $\phi(k,l)$ вартості всіх обходів підмножини $\{(k,l)\}$, яка викликає в дереві перебору поточну активну вершину $\{(k,l)\}$. Якщо $C^* > \varphi(k,l)$, вершина $\{(k,l)\}$ з приведеною матрицею D та границею $\varphi(k,l)$ приєднується до вершини розгалуження, в іншому випадку вершина виключається з подальшого розгляду. Перехід до п. 9.

7. Під час визначення підмножини обходів $\{(\overline{k,l})\}, \{k,l\} \notin R$, які не містять дуги (k,l), матриця у вершині розгалуження зводиться до матриці D після заміни $d_{kl} \neq \infty$ на $d_{kl} = \infty$. Якщо $C^* > \phi(\overline{k,l})$, то в дереві перебору вершина $\{(\overline{k,l})\}$ додається до вершини розгалуження разом із приведеною матрицею D та нижньою границею $\phi(\overline{k,l})$ вартості обходів $\{(\overline{k,l})\}$, в іншому випадку вершина більше не розглядається. Величина $\phi(\overline{k,l})$ дорівнює нижній границі вершини розгалуження, збільшеній на оцінку $\widetilde{A}(k,l)$.

8. Для визначення підмножини обходів $\{(k,l) \notin R'\}$, які містять дугу (k,l), у матриці при вершині розгалуження виключаються: рядок k та стовпець l; рядки s,k та стовпці k,l, якщо $\{s,k\} \in R$; рядки k,l та стовпці p,l, якщо $\{l,p\} \in R$; рядки s,k,l та стовпці k,l,p, якщо $\{s,k\},\{l,p\} \in R$. Шляхом приведення отриманої матриці шукається матриця D. Після обчислення нижньої границі $\phi((k,l) \notin R')$ вартостей обходів $\{(k,l) \notin R'\}$, яка визначається за формулою (5), вершина $\{(k,l) \notin R'\}$ з матрицею D та оцінкою $\phi((k,l) \notin R')$ приєднується до вершини розгалуження, якщо виконується умова $C^* > \phi((k,l) \notin R')$, інакше вершину більше не розглядаємо.

9. Якщо розмірність матриці D дорівнює одиниці, то отримано допустимий розв'язок $z(R)$ ГЗСЛ. Виключаємо з подальшого розгляду вершини, оцінки яких більші або рівні C^*. Якщо після виключення не залишилося жодної вершини, то перехід до п. 10. Інакше, знаходимо вершину дерева з найменшою оцінкою. Якщо таких вершин кілька, то вибираємо ту, якій відповідає матриця меншої розмірності. Перехід до п. 2.

10. Якщо під час розв'язання не було знайдено жодного припустимого розв'язку, то ГЗСЛ є нерозв'язною. Інакше $z^*(R)$ — шуканий гамільтонів контур, а C^* — його вага.

ПРИКЛАД

Для матриці вартостей графу $H = (V,U)$

	1	2	3	4	5	6
1	∞	10	∞	5	7	18
2	10	∞	23	15	∞	8
3	∞	23	∞	25	24	∞
4	5	15	25	∞	∞	23
5	7	∞	24	∞	∞	11
6	18	8	∞	23	11	∞

і підмножини його ребер $R = \{\{3,4\},\{1,5\},\{2,6\}\}$ необхідно знайти розв'язок ГЗСЛ або коректно встановити, що задача не має розв'язку.

1. Після віднімання із кожного рядка вихідної матриці вектора $\alpha = (5,8,23,5,7,8)$ і віднімання з кожного стовпця отриманої матриці вектора $\beta = (0,0,15,0,1,0)$ знайдемо приведену матрицю

	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	∞	0	1	13
2	2	∞	0	7	∞	0
3	∞	0	∞	2	0	∞
4	0	10	5	∞	∞	18
5	0	∞	2	∞	∞	4
6	10	0	∞	15	2	∞

і визначимо нижню границю вартості всіх розв'язків ГЗСЛ:

$$\phi(R) = \min\{d_{34}, d_{43}\} + \min\{d_{15}, d_{51}\} + \{d_{26}, d_{62}\} + \sum_{i=1}^{6} \alpha_i + \sum_{j=1}^{6} \beta_j =$$

$$= \min\{2,5\} + \min\{1,0\} + \min(0,0) + 56 + 16 = 74.$$

Оскільки $\Delta_{34} = \min\{d_{34}, d_{43}\} = d_{34} = 2 > 0,$ то поклавши $d_{34} = 0$, $d_{43} = 3$, отримаємо повністю приведену матрицю

	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	∞	0	1	13
2	2	∞	0	7	∞	0
3	∞	0	∞	0	0	∞
4	0	10	3	∞	∞	18
5	0	∞	2	∞	∞	4
6	10	0	∞	15	2	∞

.

2. Обчислимо оцінки для всіх нульових елементів повністю приведеної матриці:

$$\gamma(1,4) = 1,\ \gamma(2,3) = 2,\ \gamma(2,6) = 4,\ \gamma(3,2) = 0,$$

$$\gamma(3,4) = 0,\ \gamma(3,5) = 1,\ \gamma(4,1) = 3,\ \gamma(5,1) = 2,\ \ \gamma(6,2) = 2\ .$$

Дуга $(2,6)$ мультиграфу H' ініціює розгалуження.

3. $\{2,6\} \in R$.

4. $d_{26} \neq \infty$. Множина всіх розв'язків задачі розбивається на підмножину обходів $\{(6,2)\}$, які містять дугу $(6,2)$ і підмножину обходів $\{(2,6)\}$, які містять дугу $(2,6)$.

5. Знаходимо матрицю, яка визначає підмножину обходів $\{(6,2)\}$. Для цього виключаємо дугу $(2,6)$, поклавши $d_{26} = \infty$, виключаємо рядок 6 і стовпець 2 і приводимо отриману скорочену матрицю. Приведена матриця має вигляд

	1	3	4	5	6
1	∞	∞	0	1	9
2	2	0	7	∞	$\boxed{\infty}$
3	∞	∞	0	0	∞
4	0	3	∞	∞	14
5	0	2	∞	∞	0

і дає оцінку $\phi(6{,}2)=\phi(R)+d_{62}+\sum_{i\neq 6}\alpha_i'+\sum_{j\neq 2}\beta_j'=74+0+4=78$.

6. Матриця, яка визначає підмножину обходів $\{(2{,}6)\}$, знаходиться шляхом присвоєння дузі $(6{,}2)$ ваги $d_{62}=\infty$, виключенням рядка 2, стовпця 6 і приведенням отриманої матриці:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline
1 & \infty & 5 & \infty & 0 & 1 \\ \hline
3 & \infty & 0 & \infty & 0 & 0 \\ \hline
4 & 0 & 10 & 1 & \infty & \infty \\ \hline
5 & 0 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \hline
6 & 8 & \boxed{\infty} & \infty & 13 & 0 \\ \hline
\end{array}.$$

Звідси випливає оцінка

$$\phi(2{,}6)=\phi(R)+d_{26}+\sum_{i\neq 2}\alpha_i'+\sum_{j\neq 6}\beta_j'=74+0+2+2=78.$$

7. Розмірність приведеної матриці більша за одиницю. Будь-яка з вершин $\{(2{,}6)\}$, $\{(6{,}2)\}$ дерева розгалуження може бути обрана в якості активної. Виберемо вершину $\{(2{,}6)\}$.

8. Обчислимо оцінки для всіх нульових елементів матриці, яка визначає підмножину обходів $\{(2{,}6)\}$:

$$\gamma(1{,}4)=1,\ \gamma(3{,}2)=5,\ \gamma(3{,}4)=0,\ \gamma(3{,}5)=0,\ \gamma(4{,}1)=1,$$

$$\gamma(5{,}1)=0,\ \ \gamma(5{,}3)=1,\ \gamma(6{,}5)=8.$$

Дуга $(6{,}5)$ ініціює розгалуження.

9. $\{6{,}5\}\notin R$; множина обходів $\{(2{,}6)\}$ розбивається на підмножину обходів $\{(6{,}5)\notin R'\}$, які включають дугу $(6{,}5)$, і підмножину обходів $\{(\overline{6{,}5})\}$, які не містять цю дугу.

10. У матриці, якій відповідає границя $\phi(2{,}6)$, покладаємо $d_{65}=\infty$ і приводимо отриману матрицю. Результатом таких дій є матриця

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline
1 & \infty & 5 & \infty & 0 & 1 \\ \hline
3 & \infty & 0 & \infty & 0 & 0 \\ \hline
4 & 0 & 10 & 1 & \infty & \infty \\ \hline
5 & 0 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \hline
6 & 0 & \boxed{\infty} & \infty & 5 & \boxed{\infty} \\ \hline
\end{array}$$

і оцінка $\phi(\overline{6{,}5})=\phi(2{,}6)+\widetilde{A}(6{,}5)=78+8=86$, яка обмежує знизу вартості всіх обходів $\{(\overline{6{,}5})\}$, що включають дугу $(2{,}6)$ і не містять дуги $(6{,}5)$.

11. У матриці, яка відповідає нижній границі $\phi(2{,}6)$, виключаємо рядок 6 і стовпець 5. Оскільки ребра $\{6{,}5\}\notin R$ і $\{5{,}1\}\in R$ суміжні, то виключаємо рядок 5 і стовпець 1 та забороняємо дугу $(1{,}2)$, покладаючи $d_{12}=\infty$ задля уникнення виникнення підциклів. У результаті приведення отриманої матриці переходимо до матриці

	2	3	4
1	∞	∞	0
3	0	∞	0
4	9	0	∞

і оцінки $\phi((\overline{6,5}) \notin R') = \phi(2,6) + d_{51} + \sum \alpha'_i + \sum \beta'_j = 78 + 0 + 1 = 79$, яка обмежує вартості всіх обходів $\{(6,5) \notin R'\}$. Розмірність таблиці більша за одиницю, тому вибираємо вершину розгалуження з найменшою нижньою границею $\phi(6,2)$.

12. Знаходимо у відповідній матриці оцінки для всіх її нульових елементів: $\gamma(1,4) = 1,\ \gamma(2,3) = 4,\ \gamma(3,4) = 0,\ \gamma(3,5) = 1,\ \gamma(4,1) = 5,\ \gamma(5,1) = 0,\ \gamma(5,6) = 9.$

Подальше розгалуження виконується за допомогою дуги $(5,6)$.

13. Так як $\{5,6\} \notin R$, множина обходів $\{(6,2)\}$ подана розбиттям на підмножину $\{(5,6) \notin R'\}$ і підмножину $\{(\overline{5,6})\}$.

14. Вершині $\{(5,6)\}$ відповідає матриця

	1	3	4	5	6
1	∞	∞	0	1	0
2	2	0	7	∞	∞
3	∞	∞	0	0	∞
4	0	3	∞	∞	14
5	0	2	∞	∞	∞

і оцінка $\phi(\overline{5,6}) = \phi(6,2) + \Gamma(5,6) = 78 + 9 = 87$.

15. У матриці, яка визначає множину обходів $\{(5,6) \notin R'\}$, покладаємо $d_{21} = \infty$ для усунення підциклів:

	1	3	4
2	∞	0	7
3	∞	∞	0
4	0	3	∞

.

Оцінка, яка їй відповідає: $\phi((5,6) \notin R') = \phi(6,2) + d_{15} = 78 + 1 = 79$. Для розгалуження вибираємо вершину $\{(6,5) \notin R'\}$ з найменшою нижньою границею.

16. Знаходимо оцінки для всіх нульових елементів матриці, які відповідають цій вершині: $\gamma(1,4) = 0,\ \gamma(3,2) = 9,\ \gamma(3,4) = 0,\ \gamma(4,3) = 9.$ Розгалуження продовжує дуга $(3,2) \notin R'$.

17. Матриця

	2	3	4
1	∞	∞	0
3	∞	∞	0
4	0	0	∞

визначає множину обходів $\{(\overline{3,2})\}$ з нижньою границею $\phi(\overline{3,2}) = \phi(6,5) + \tilde{A}(3,2) = 79 + 9 = 88$.

18. У матриці, яка відповідає вершині $\{(\overline{6,5}) \notin R'\}$, покладаємо $d_{32} = \infty$, виключаємо рядки 3, 4 і стовпці 2, 3.

19. У результаті отримаємо матрицю з єдиного елемента (1, 4) і, відповідно, обхід (2, 6), (6, 5), (5, 1), (1, 4), (4, 3), (3, 2) вартістю $\phi((3,2) \notin R') =$ $= \phi((\overline{6,5}) \notin R') + d_{43} = 79 + 0 = 79$.

20. Допустимий розв'язок задачі $z(R) = \{(2,6),(6,5),(5,1),(1,4),(4,3),$ $(3,2)\}$ з вартістю $C(z(R)) = 79$ є оптимальним. Дерево розв'язків задачі зображено на рисунку.

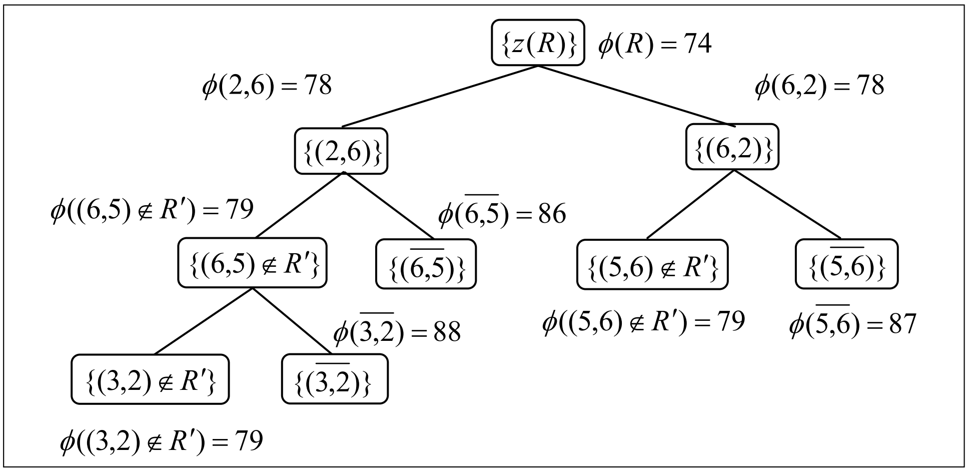

Рисунок. Дерево розв'язків

ВИСНОВКИ

Сформульовано ГЗСЛ. На основі класичного методу Літтла побудовано модифікацію методу, яка дозволяє знаходити розв'язок задачі або встановлювати його відсутність. Перед застосуванням алгоритму пропонується використати процедуру вершинно-реберного перетворення [5], яке дає можливість перевірити необхідні умови існування розв'язку задачі, і, можливо, зменшити розмірність задачі. Проілюстровано роботу цього алгоритму на прикладі.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Garashchenko I., Panishev A.* Method of finding hamilton routes in transport network // Artificial Intelligence and Decision Making.: ITHEA, Sofia. — 2008. — № 7. — P. 43–48.
2. *Гаращенко И.В., Морозов А.В., Панишев А.В.* Метод решения гамильтоновой задачи коммивояжера // Искусственный интеллект. — 2008. — № 3. — С. 630–637.
3. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
4. *Теория* расписаний и вычислительные машины: пер. с англ. / Под. ред. Э.Г. Коффмана. — М.: Наука, 1984. — 335 с.
5. *Морозов А.В., Панишев А.В.* Вершинно-реберное преобразование в гамильтоновой задаче о сельском почтальоне // Искусственный интеллект. — 2009. — № 3. — С. 138–143
6. *Яблонский А.А.* Минимизация кольцевых маршрутов доставки продукции потребителям // Экономика и математические методы. — 2009. — № 3. — С. 124–131.

Надійшла 21.01.2010