УДК 517.925.51

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІКИ АКТИВІВ

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, В.Р. КУЛЯН, О.О. ЮНЬКОВА

Розглянуто проблему ідентифікації параметрів математичних моделей динамічних процесів, які можуть бути описані звичайними диференціальними рівняннями та системами рівнянь. На прикладі математичних моделей динамічного формування ринкової вартості однієї акції та портфеля цінних паперів розроблено алгоритми побудови оптимальних значень параметрів таких моделей. Алгоритми параметричної ідентифікації та оптимізації ґрунтуються на ітераційних процедурах, які дозволяють на кожному кроці формувати «кращі» з точки зору вибраних критеріїв якості значення параметрів моделі. Гарантовані оцінки параметрів будуються у класі еліпсоїдальних множин, які, на прикладі математичних задач фінансового аналізу, дозволяють отримати гарантовані фінансові показники інвестиційної діяльності.

ВСТУП

Сучасне прикладне математичне моделювання оперує різними підходами до обчислення параметрів за визначеної структури математичних моделей. До найбільш відомих та поширених методів ідентифікації параметрів дискретних та неперервних моделей відносять:

- методи коваріаційно-дисперсійного аналізу;
- методи імітаційного моделювання;
- підходи, що ґрунтуються на принципах теорії стійкості;
- підходи, що ґрунтуються на методах аналізу чутливості розв’язків;
- методи мінімаксної ідентифікації.

Разом з тим, в силу складності структури моделі, нелінійного характеру процесів, що моделюються, а також інших факторів, часто доводиться звертатись до комп’ютерного моделювання, яке дає можливість шляхом перебору великої кількості моделей-претендентів будувати комп’ютерні образи моделей методами самоорганізації або імітаційного моделювання. Під складністю параметрично заданої моделі будемо розуміти розмірність вектора параметрів, а основним принципом імітаційного моделювання будемо вважати «чим складніша модель, тим вона точніша», на відміну від основного принципу самоорганізації моделі про «існування моделі оптимальної складності».

Такі підходи, до яких можна віднести методи типу нейромереж або групового урахування аргументів, часто застосовують і в ході розв'язання задач моделювання складних та взаємопов'язаних економічних процесів, у тому числі математичних задач фондового ринку та банківського сектору економіки.

Мета роботи — аналіз якісних характеристик нових математичних моделей динаміки активів на фондовому ринку.

ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛЕЙ ЦІНОУТВОРЕННЯ НА ФОНДОВОМУ РИНКУ

Як показано в роботах [1] та [2], математична модель формування ринкової вартості акції та портфеля акцій у загальному вигляді можуть бути записані так

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ \ r_i(t_0) = r_0,\ \ t \in [t_0, T],\ \ i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t) \tag{2}$$

відповідно, та є заданими параметрично. Тут r_i — очікувана ринкова вартість акції; r_p — очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i — частка акцій i-го виду у портфелі; t — час.

Важливою математичною задачею, розв'язок якої використовується для коректного формулювання задачі про побудову оптимальної структури інвестиційного портфеля, є задача ідентифікації оптимальних значень параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \rho_{ij}$ математичних моделей формування ринкової вартості однієї акції [1], [2] та портфеля акцій [3].

Задача про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його прибутковості у статичному випадку має вигляд

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \to \max_x .$$

У ході практичного інвестування вона розглядається у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_{i=1}^{n} x_i(T) r_i(T) \to \max_{x \in X(t)},\quad r_p(t_0) = r_{p_0},\ \ t \in [t_0, T]$$

і полягає у побудові оптимального за прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля, де $X(t)$ — обмежена замкнута множина акцій.

Праві частини рівнянь системи (1) є лінійними і залежать від параметрів. Для забезпечення можливості її інтегрування

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_i(t) + \alpha_3 r_j(t)),\quad i, j = \overline{1, n}$$

побудуємо процедуру їх визначення.

За різних постановок задачі за вектор параметрів можна розглядати вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \rho_{ij})$ або $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Перше формулювання вектора параметрів будемо застосовувати у випадку, коли інформація щодо ринкової вартісті акцій є «зашумленою». У випадку, коли ринкова вартість акцій адекватно відображає динаміку ринку, застосовують друге формулювання.

Алгоритм 1

Скористаємось при цьому відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних акцій $\bar{r}_i\ (t)$.

На основі аналізу такої динаміки розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для i-ї акції і для обраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0),\ \ r_i(t_0) = r_{i0},\ \ t \in [t_0, t_1).$$

Далі з метою отримання оптимального значення вектора параметрів α^* сформулюємо оптимізаційну задачу

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha \in A}(r_i^0(r_i(t_0), t, \alpha) - \bar{r}_i(t))^2, \tag{3}$$

де $r_i^0(r_i(t_0), t, \alpha)$ — розв'язок задачі Коші для ринкової вартості i-ї акції на першому інтервалі; $\bar{r}_i(t)$ — програмна або бажана траєкторія; A — обмежена замкнута множина параметрів моделі. Таким чином, можемо визначити оптимальне, у розумінні критерія якості (3), значення параметрів моделі (1) на першому інтервалі. Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах розбиття. На k-му кроці алгоритму процедура розрахунку оптимальних значень параметрів динамічної моделі є такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1}^*),\ r_i(t_{k-1}) = r_{i_{k-1}},\ \ t \in [t_{k-1}, t_k),\ \ i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Маємо можливість сформувати траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.

2. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_k^* = arg\min_{\alpha \in A}(r^0(r_i(t_{k-1}), t, \alpha_{k-1}^*) - \bar{r}_i(t))^2. \tag{5}$$

Розв'язком задачі (5) для вибраного k буде значення параметра α_k^*, що дозволяє оптимально перейти із точки r_{k-1} у точку r_k. Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації визначити послідовність значень параметрів α математичної моделі для моделювання поведінки та прогнозування очікуваної прибутковості акції r_i в обрані моменти заданого інвестором інтервалу часу.

Варто відмітити, що у ході розбиття інтервалу інтегрування необхідно враховувати також значення складових вектора станів системи для коректного застосування знайдених параметрів при розв'язанні відповідних траєкторних задач.

Алгоритм 2

Розглянемо рівняння формування динаміки ринкової вартості однієї акції у вигляді

$$\frac{dr_i(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_i(t) + \xi_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Тут α_1, α_2 — параметри моделі; ρ_{ij} — враховує кореляційні залежності між акціями, $-1 \le \rho_{ij} \le 1$; ξ_i — вектор збурень.

У випадку, якщо $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$ для обраного i із (6) можемо отримати

$$(\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij})r(t) = \xi(t) - \frac{dr}{dt} \tag{7}$$

Якщо вектори $\dot{r}, r, \xi$ є доступними для визначення, то (7) можна розглядати як прямий алгоритм ідентифікації параметрів математичної моделі. Похибка ідентифікації лінійно залежить від похибок визначень $\dot{r}, \xi$. Аналіз (7) вказує на те, що вплив похибок визначень r на оцінювання параметрів збільшується, якщо рівняння системи погано обумовлені, тобто коли матриця R близька до особливої, а визначник цієї матриці $|R|$ близький до 0. Для того, щоб рівняння

$$\dot{R} - \alpha R = \xi, \tag{8}$$

де $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$, $\dot{R} = \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dots \\ \dot{r}_n \end{pmatrix}$, було добре обумовленим, то необхідно, щоб $r_i(t)$ були незалежними. Якщо ж процес є стохастичним, то ця умова зводиться до некорельованості значень $r(t_i)$, $i = \overline{1,k}$.

Подальша процедура ідентифікації параметрів моделі зводиться до отримання розв'язку рівняння (8) для різних моментів часу $t \in [t_0, T]$. Розв'язки рівняння (8) для $k+2$ моментів часу дають можливість отримати систему із $k+2$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів моделі. Розглянувши $\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}$ як параметр моделі, маємо можливість уточнити кореляційні залежності між акціями на збуреному фінансовому ринку.

Недоліком першої частини алгоритму є те, що в ньому відсутнє осереднення або згладжування змінних, оскільки мають місце не лише ринкові, але й спекулятивні операції. Це може викликати великі похибки результатів обчислень у випадках, коли величини $\dot{r}$, r, ξ спостерігаються у поєднанні зі збуреннями. Помножимо (8) зліва на r^T та осереднимо за інтервалом $t \in [t_0, T]$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} r^T \dot{r} dt + \frac{1}{T}\alpha \int_{t_0}^{T} r^T r dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} r^T \xi dt.$$

Вважаючи, як і раніше, що $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$, отримаємо

$$\alpha = \left(\int_{t_0}^{T} r^T \xi dt - \int_{t_0}^{T} r^T \dot{r} dt \right) \left(\int_{t_0}^{T} r^T r dt \right)^{-1}.$$

Модифікацією цього підходу може слугувати алгоритм розрахунку середніх значень параметрів на відрізку $[t_0, t_0 + T_k]$ за достатньо значної їх зміни в межах вказаного інтервалу

$$\alpha = \left(\int_{t_o}^{t_0+T_k} r^T \xi dt - \int_{t_o}^{t_0+T_k} r^T \dot{r} dt \right) \left(\int_{t_o}^{t_0+T_k} r^T r dt \right)^{-1}.$$

Алгортим 3

Іншим підходом до розв'язання задачі параметричної ідентифікації є застосування функцій чутливості. Розглянемо задачу про побудову функцій чутливості для моделей ціноутворення однієї акції та портфеля акцій.

Для зручності перетворень праву частину позначимо через $f(t, r, \alpha)$, де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Також вважатимемо, що мають місце початкові умови $r(t_0) = r_0 = r_0(\alpha)$, $t_0 = t_0(\alpha)$, а також, що α є скаляром й $\alpha = \alpha_1$, оскільки за короткотермінового моделювання динаміки формування ціни акції α_2 є сталою. У такій постановці ρ_{ij} — коефіцієнти кореляції між акціями, які можна обчислити на основі відомої статистичної інформації. Згідно [1], за умови, що права частина (1) неперервна за своїми аргументами і неперервно-диференційована за r, α, а також за неперервної диференційованості функцій r_0, t_0 за α_1 існує неперервна похідна

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1}.$$

Ця похідна задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f(r, t, \alpha_1)}{\partial r} u + \frac{\partial f(r, t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \tag{9}$$

за початкової умови

$$u(t_0) = \frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r_0(\alpha_1), t_0(\alpha_1), \alpha_1) \frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \tag{10}$$

Рівняння (10) отримано прямим диференціюванням за α_1, а початкова умова — із диференціювання інтегрального рівняння

$$r(t, \alpha_1) = \int_{t_0(\alpha_1)}^{t} f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1) d\tau + r_0(t_0, \alpha_1)$$

і має вигляд

$$u(t, \alpha_1) = \frac{\partial r(t, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \int_{t_0(\alpha_1)}^{t} \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(r(\tau, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial r} u(\tau, \alpha_1) + \\ \dfrac{\partial f(r(t, \alpha_1), \tau, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \end{array} \right] d\tau +$$

$$+\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1} - f(r(t_0(\alpha_1),\alpha_1),t_0(\alpha_1),\alpha_1)\frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \qquad (11)$$

Початкову умову для функції чутливості $u(t_0)$ отримаємо, поклавши в (10) $t = t_0$. Отже, для (1) визначено початкову умову та функцію чутливості, що описує залежність ціни акції від параметра α_1. Застосуємо функцію чутливості до ідентифікації параметрів α_1, α_2 математичної моделі (1). Математична задача має такий вигляд

$$\min_{\alpha_1,\alpha_2}(r_i(t,\alpha_1,\alpha_2) - z_i(t))^2, \quad t \in [t_0, T].$$

Тут $z_i(t)$ — спостереження за поведінкою ціни акції на ринку.

У процесі розв'язання задач прогнозування або керування у наведених вище прикладних сферах є необхідність розробляти алгоритми та методи для отримання гарантованих фінансових результатів. Прикладом такого підходу може бути розробка методології Value at Risk, а підтвердженням актуальності — її загальне визнання як надійного математичного інструменту прийняття інвестиційних рішень. Перейдемо до задачі про побудову гарантованої множинної оцінки параметрів для математичної моделі загального вигляду (1). Сформулюємо процедуру побудови оптимальної еліпсоїдальної оцінки параметрів математичної моделі (1).

Алгоритм 4 (побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1))

Вектор параметрів моделі запишемо у вигляді $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ за умови $r(t_0) = r_0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів математичної моделі

$$\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2}).$$

Нехай це значення параметрів буде розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{0_1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{0_2})^2 = 1$$

з центром у точці з координатами $(\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку $\alpha_k = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}).$$

Нові значення параметрів α, які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N_1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \qquad \delta > 0,$$

$$\alpha_{N_2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Таким чином, отримано нове положення значення параметра $\alpha_N \in A$, де A — обмежена замкнена множина параметрів математичної моделі

$$\alpha_N = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2}).$$

Серед критеріїв якості для перевірки належності параметра допустимій множині можемо розглянути такі:

$$\min_{\alpha \in A} \sum_i (r^0(r_0, t_{i_0}, \alpha_\delta) - r_{\exp}(t_i))^2 < \varepsilon, \tag{12}$$

$$\min_{\alpha \in A} \max_{t \in T_i} (r^0(r_0, t, \alpha_\delta) - r_{\exp}(t\ )) < \varepsilon,\ t \in [t_0, t_1]. \tag{13}$$

Процедура, що наведена вище, реалізує рух параметра α вздовж нормалі до тих пір, доки виконується один із вибраних наведених вище критеріїв. Виконавши такі кроки для кожної із визначених раніше точок, отримаємо нові значення координат вектора α у просторі параметрів математичної моделі.

Алгоритм 5 (побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1))

Після побудови та аналізу розв’язків задачі ідентифікації параметрів математичної моделі формування ринкової вартості акції (або портфеля акцій) визначимо точку, що найбільш віддалена від точки $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$, координати якої визначимо за допомогою формул

$$\alpha_1^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_1^j, \quad \alpha_2^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_2^j.$$

Для цього розв’яжемо задачу одномірної оптимізації

$$R = \max_i L(\alpha_i, \alpha^c),$$

де $L(p,q)$ — функція відстані між точками p та q.

На границі кола $S(1,D)$ радіусу 1, із центром у точці $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$ сформуємо довільну δ-сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i. В кожному вузлі y_i побудуємо вектор зовнішньої нормалі $\overline{n}_{e_i}$ до кола за правилами, описаними вище, і розв'яжемо допоміжну задачу з побудови нових значень параметрів α аналогічно підходу, описаному в Алгоритмах 1, 2, 3.

Виконавши наведену процедуру для кожного із векторів n_i, $i \in K_n$ отримаємо новий набір точок $\alpha_{e_n} \in A$.

Опишемо еліпсоїд найменшого об'єму (еліпс найменшої площі у площині) навколо таким чином побудованих точок, який будемо називати «гарантованою еліпсоїдальною оцінкою» параметрів моделі (1), побудованою на основі критеріїв (12), (13) або

$$\min_{\alpha \in A} \int_{t_0}^{T} (r^0(t_0, t_1, r_0, \alpha) - r_{\exp}(t))^2 \, dt \,,$$

$$\min_{\alpha \in A} \max_{t \in [t_0, T]} \left\| (r^0(t_0, t_1, r_0, \alpha) - r_{\exp}(t)) \right\| .$$

Тут $r^0(t_0, t_1, r_0, \alpha)$ — розв'язок задачі Коші для моделі (1) за умови $r(t_0) = r_0$, $r_{\exp}(t)$ — експериментальна або програмна траєкторія.

На основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень гарантовану множинну оцінку параметрів побудуємо у класі еліпсоїдальних множин

$$Q(B, d) : \{(B(\alpha - d), \alpha - d) \le 1\} \,, \tag{14}$$

де B — симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів; d — геометричний центр еліпсоїда, $\alpha, d \in R^n$. Множину (14) будемо називати «гарантованою множинною оцінкою», якщо кожне значення параметра α, отримане для довільних спостережень, належить $Q(B, d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці. Початкову матрицю B оберемо одиничною $B^0 = E$, а початкове положення центру d визначимо як центр мас

$$d^0 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \,,$$

де k — кількість точок.

На $k+1$-му кроці процедури формули для визначення B^{k+1} та d^{k+1} мають вигляд

$$B^{k+1} = B^k + \lambda_1^{k+1} \nabla_B \{(B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k)\},$$

$$d^{k+1} = d^k + \lambda_2^{k+1} \nabla_d \{(B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k)\},$$

де λ_1^{k+1} та λ_2^{k+1} такі, що

$$(B^{k+1}(\lambda_1^{k+1})(\alpha_{\bar{i}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}), \alpha_{\bar{i}} - d^{k+1}(\lambda_{v2}^{k+1})) < (B^k(\alpha_{\bar{i}} - d^k), \alpha_{\bar{i}} - d^k),$$

де $\bar{i} = \arg\max_i (B(\alpha_i - d), \alpha_i - d)$,

$$(B^j(\alpha - d^j), \alpha - d^j) < 1.$$

На границі сфери $S(1, d^j)$ з центром у точці d^j (де j — номер кроку процедури для якого виконується нерівність $(B^j(p - d^j), p - d^j) < 1$) сформуємо довільну δ-сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i. У кожному вузлі за допомогою описаного методу побудови еліпсоїда найменшого об'єму навколо заданих точок будуємо гарантовану множинну оцінку параметрів, яка, як і визначена за допомогою Алгоритму 4, забезпечує виконання обраних критеріїв якості.

Побудована таким способом множина дозволяє сформувати допустиму множину параметрів у ході подальшої оптимізації цієї множинної оцінки логічним наступним кроком є формулювання та розв'язання задачі про побудову «ефективної» множинної оцінки.

ВИСНОВКИ

Наведені у роботі математичні процедури дають можливість аналізувати динаміку активів на фондовому ринку при прийнятті інвестиційних рішень. Для математичних моделей динаміки ринкової вартості однієї акції побудовано алгоритми розв'язання задачі параметричної та гарантованої множинної ідентифікації. На їх основі розроблено процедури визначення допустимої множини параметрів математичних моделей та розв'язано задачі побудови траєкторії ринкової вартості однієї акції для математичної моделі (1) та оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних на основі моделі (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В.В.* Моделирование и анализ динамики инвестиций // Проблемы управления и информатики. — 2001. — № 6. — С.109–119.
2. *Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицька В.В.* Застосування методів практичної стійкості для розв'язування задач інвестиційного менеджменту // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2005. — № 3. — С. 232–239.
3. *Garashchenko F., Kulian V., Rutitskaya V.* Modelling and Analysis of Investment Trends // Journal of Automation and Information. — 2011. — **43**, issue 12. — P. 8–58.

Надійшла 02.04.2015