

УДК 539.3

© О.С. Приходько, к.т.н., Я.М. Пастернак, к.ф.-м.н.  
Луцький національний технічний університет

## **ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ДЕТАЛЕЙ ІЗ ОБЛАСТЯМИ ЗМЕНШЕНОЇ МЕЖІ МІЦНОСТІ**

*У статті запропоновано аналітичну методику дослідження граничної рівноваги масивних просторових деталей, які містять області зі зменшеною межею текучості (зокрема, області локальної термообробки). Методика заснована на припущенні, що за заданого навантаження пластичне деформування відбувається лише у заданій зоні. Розглянуто практично важливі приклади для зон зменшеної межі міцності різної форми та властивостей.*

### **ГРАНИЧНА РІВНОВАГА, ЛОКАЛЬНА ТЕРМООБРОБКА, НАПРУЖЕННЯ, РУЙНУВАННЯ.**

**Постановка проблеми.** Реальні масивні елементи конструкцій можуть містити області, межа міцності яких значно менша за межу міцності матеріалу елемента, в той час як пружні характеристики є однаковими для тіла в цілому. Сюди, зокрема, слід віднести області локальної термообробки, а саме зони термічного впливу зварювання. Такі області за розрахункових навантажень можуть переходити в пластичний стан, що рівнозначно втраті міцнісних характеристик конструкційних елементів. Для оцінки граничної рівноваги таких елементів конструкцій необхідна методика, що дає можливість враховувати пружно-пластичне деформування областей зі зменшеною межею текучості. При цьому форму цієї зони (фактично включення) з достатньою для інженерних оцінок точністю можна наблизити певним канонічним тілом, зокрема, сфероїдом. Внаслідок цього, поставлена задача зводиться до задачі дослідження просторового напруженого стану біля сфероїдного включення за врахування його пружно-пластичного деформування.

**Мета дослідження.** Розробка аналітичної інженерної методики розрахунку граничної рівноваги масивних елементів конструкцій, що містять області зі зменшеною межею текучості з урахуванням їхнього пружно-пластичного деформування.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Серед робіт, що стосуються визначення тривимірного пружного напружено-деформованого стану (НДС) тіл із включеннями, піонерською та основоположною є праця J.D. Eshelby [1]. У цій роботі розглянута

задача про визначення НДС нескінченного пружного тілі із еліпсоїдальним включенням із іншого матеріалу. Розв'язок задачі отримано в замкненому вигляді. Також, подібними задачами для еліпсоїдного пружного включення у необмеженому ортотропному середовищі займався Ю.М. Подільчук [2-3]. Зокрема, праця [2] присвячена дослідженню поля напружень біля включення, за дії однорідних довільно заданих зусиль на нескінченності. В подальшому Е.Г. Сосніною та І.А. Куніним був доведений [4] закон поліноміальної консервативності, згідно якого напруження всередині еліпсоїдного включення описуються поліномом того ж степеня, що і напруження, які діють на нескінченності анізотропного середовища.

Відомо, що біля включень, як правило, виникає значна концентрація напружень, що може привести до пружно-пластичного деформування. Такі задачі належать до числа нелінійних, які можуть бути розв'язані в загальному випадку тільки числовими методами. Загальним методом розв'язування задач теорії пластичності присвячені праці І.А. Біргера, Л.О. Галіна, О.А. Ільюшина, Ю.М. Шевченка та ін [5, 6]. У працях О.А. Ільюшина [7] створені теорії і моделі для пластичних матеріалів і математичні методи розрахунку напружень на основі них для пластин, масивних тіл, оболонок, багат шарових конструкцій.

Проте унаслідок громіздкості та обчислювальних складнощій вивченню тіл із пружно-пластичними включеннями приділено недостатньо уваги. Тому ця робота розвиває авторську методіку [8] вивчення напружено-деформованого стану тіл із пружно-пластичними включеннями у напрямі дослідження областей зі зменшеною межею текучості.

**Результати дослідження.** Вважатимемо, що розміри областей локальної термообробки значно менші порівняно із розмірами конструкційного елемента. З огляду на це та принцип Сен-Венана, зведемо задачу пружно-пластичного деформування тіла із областю зниженої текучості до розгляду нескінченного ізотропного пружного середовища, яке містить пружно-пластичну область (включення) сфероїдної форми із зменшеною межею текучості за умови ідеального механічного контакту між цими двома фазами. У центрі включення введемо систему координат  $Ox_{ij}$  (рис. 1), так, щоб головні осі сфероїда збігалися з осями цієї системи координат.

Вважатимемо, що середовище на нескінченності перебуває під дією однорідного поля напружень, заданого сталим тензором  $\sigma_{ij}^{\infty}$ . Пружні сталі включення і матриці позначимо відповідно  $E_0'$ ,  $\nu_0'$  і  $E$ ,

$\nu$ . Прийнемо також, що границя текучості включення є меншою за границю текучості матриці, тобто пружно-пластичне деформування буде відбуватись лише у включенні.

Для розв'язання задачі використаємо метод змінних параметрів Біргера, згідно якого пружно-пластична задача зводиться до пружної із залежними від напружень механічними характеристиками матеріалу [9].

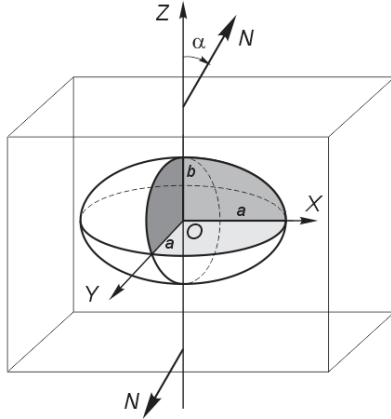


Рис. 1 – Схема для розв'язання задачі

*Розв'язання допоміжної задачі для пружного включення.* Розглянемо відому задачу Ешелбі для еліпсоїдної зони (включення) із залишковими деформаціями [1]. Згідно праць [10, 11] залишкові деформації включення  $\varepsilon_{ij}^t$  спричиняються деформаціями включення та матриці з того ж матеріалу  $\varepsilon_{ij}^c$ :

$$\varepsilon_{ie}^c = S_{iejk} \varepsilon_{jk}^t,$$

де  $S_{iejk}$  – тензор Ешелбі [1], який залежить від пружних параметрів середовища із областю залишкових деформацій та форми цієї області. Для формули використане правило Ейнштейна підсумовування за повторюваним індексом.

Додамо до розв'язку задачі Ешелбі однорідне поле деформацій

$$\varepsilon_{ij}^\infty = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij}^\infty - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kk}^\infty \right]. \quad (1)$$

Тоді деформації включення знаходяться за формулою

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^\infty. \quad (2)$$

Оскільки деформації  $\varepsilon'_{ij}$  залишкові, тобто такі, що не призводять до появи напружень, то напруження всередині включення визначаються як:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} (\varepsilon^c_{kk} + \varepsilon^\infty_{kk} - \varepsilon^t_{kk}) + 2G (\varepsilon^c_{ij} + \varepsilon^\infty_{ij} - \varepsilon^t_{ij}). \quad (3)$$

Розглянемо еліпсоїд тих же форми і розмірів, що і включення Ешелбі, але з іншими пружними параметрами  $G_0$  та  $\nu_0$ . Здеформуємо це включення пружними однорідними деформаціями (2). В разі появи напружень (3) замінимо цим еліпсоїдом початкове включення, зберігаючи при цьому неперервність переміщень вздовж межі розділу матриці і включення та вектор напружень.

При цьому отримаємо систему рівнянь відносно компонент тензора  $\varepsilon^t$  для задачі з пружним включенням:

$$\lambda_0 \delta_{ij} (\varepsilon^c_{kk} + \varepsilon^\infty_{kk}) + 2G_0 (\varepsilon^c_{ij} + \varepsilon^\infty_{ij}) = \lambda \delta_{ij} (\varepsilon^c_{kk} + \varepsilon^\infty_{kk} - \varepsilon^t_{kk}) + 2G (\varepsilon^c_{ij} + \varepsilon^\infty_{ij} - \varepsilon^t_{ij}), \quad (4)$$

де  $\varepsilon^c_{ie} = S_{iej} \varepsilon^t_{jk}$ ;  $\lambda$ ,  $G$ ,  $\lambda_0$ ,  $G_0$  – коефіцієнти Ляме включення і матриці.

Після визначення потрібного тензора деформацій  $\varepsilon^t_{ij}$ , одержимо наступну залежність для знаходження напружень у включенні:

$$\begin{aligned} \sigma^i_{ij} &= \lambda_0 \delta_{ij} (\varepsilon^c_{kk} + \varepsilon^\infty_{kk}) + 2G_0 (\varepsilon^c_{ij} + \varepsilon^\infty_{ij}) = \\ &= \lambda \delta_{ij} (\varepsilon^c_{kk} + \varepsilon^\infty_{kk} - \varepsilon^t_{kk}) + 2G (\varepsilon^c_{ij} + \varepsilon^\infty_{ij} - \varepsilon^t_{ij}). \end{aligned} \quad (5)$$

Із співвідношень (1), (4) та (5) одержимо тензорне рівняння для визначення напружень у включенні, в якому коефіцієнти  $\Sigma_{ijkm}$  залежать лише від геометричних розмірів включення та пружних параметрів матеріалів:

$$\sigma^i_{ij} = \Sigma_{ijkm} \sigma^\infty_{ij} \quad (6)$$

*Розв'язування пружно-пластичної задачі.* Згідно методу змінних параметрів [9] задача теорії пластичності для включення зводиться до розв'язування пружної задачі, для якої пружні параметри включення  $E_0$ ,  $G_0$ ,  $\nu_0$  обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \nu'_0 + \frac{1-2\nu'_0}{2} (1-\gamma), \quad G_0 = \frac{E'_0 \gamma}{3-(1-2\nu'_0)\gamma}, \quad E_0 = E'_0 \gamma, \quad \gamma = \frac{\sigma_i}{E'_0 g(\sigma_i)}, \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставивши (6) в (7), отримаємо нелінійну систему рівнянь виду

$$\Sigma_{ijkm} = \Sigma_{ijkm} (\sigma_{pq}), \quad (8)$$

де коефіцієнти тензора  $\Sigma_{ijkm}$  визначаються через пружні параметри включення і матриці. Перші, в свою чергу залежать від невідомих напружень у включенні  $\sigma_{ij}^i$ . Таким чином, поставлена задача зводиться до знаходження коренів (невідомих напружень і пружних параметрів включення) системи рівнянь (8).

Розглянемо одновісний розтяг зусиллями  $N$  (рис. 1), які діють в напрямку з напрямними косинусами  $(\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ . При такому навантаженні компоненти тензора  $\sigma_{ij}^\infty$  у рівнянні (4.5) знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^\infty &= N \sin^2 \alpha; \sigma_{yy}^\infty = 0; \sigma_{zz}^\infty = N \cos^2 \alpha; \\ \sigma_{xz}^\infty &= N \cos \alpha \sin \alpha; \sigma_{xy}^\infty = 0; \sigma_{yz}^\infty = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Межу текучості включення приймали  $\sigma_T = 200$  МПа (як у зон термообробки м'яких сталей), а межу текучості основного матеріалу – значно більшою за величиною (у числових обчисленнях ця різниця складала декілька порядків). Модуль пружності матеріалу  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона рівний 0,3, як у конструкційної сталі.

На рис. 2, а зображено розраховані залежності напружень та інтенсивності напружень у сплюсненому включенні (відношення півосей сфероїда  $b/a = 0.1$ ) від кута дії зусиль при  $N = \sigma_T = 200$  МПа.

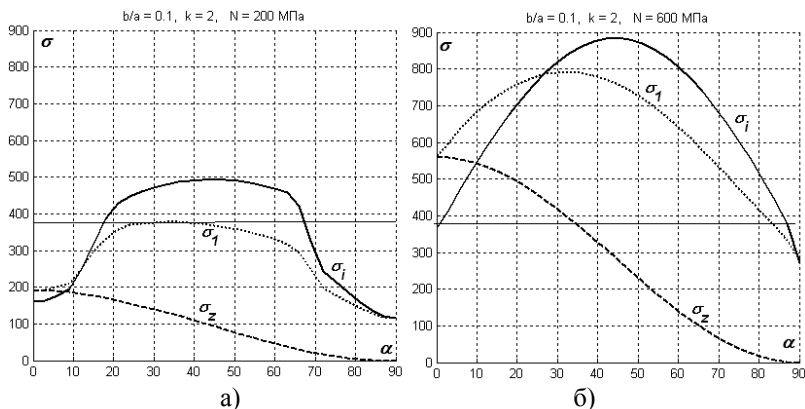


Рис. 2 - Напруження у сплюсненому сфероїдному включенні: а) при зусиллях 200 МПа; б) при зусиллях 600 МПа

Оцінка міцності деталей проводилась за критерієм найбільших головних напружень (пунктирна лінія). Межа міцності включення приймалась  $\sigma_M = 380$  МПа (така, як для конструкційної сталі Ст3) (зображена на рисунку горизонтальною суцільною лінією). Розглянуто випадок значного зміцнення матеріалу включення ( $k = 2$ ).

З рис. 2а видно, що при зусиллях, співмірних за значенням із межею текучості включення, руйнування відбувається лише при напрямку кута дії зусиль в околі значення  $35^\circ$ . Включення переходить у пластичний стан у діапазоні кута від  $10^\circ$  до  $76^\circ$ . При трикратному збільшенні зусиль (рис. 2б) руйнування сплюсненого включення з відношенням півосей 0,1 буде проходити практично при всіх значеннях напрямку дії зусиль, крім діапазону  $85-90^\circ$ .

Для оцінки впливу зміцнення матеріалу на рис. 3 зображено результати розрахунку напружень для випадку ідеально-пластичного включення ( $k = 1000$ ). Всі інші параметри такі ж як і вище.

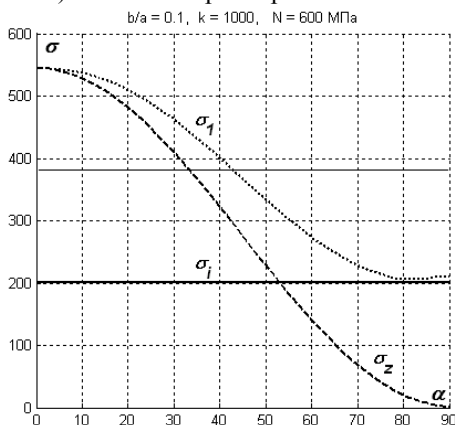


Рис. 3 - Напруження для випадку ідеально-пластичного матеріалу

З рисунку видно, що на відміну від випадку значного зміцнення матеріалу, ідеально-пластичне включення при вказаних значеннях зусиль буде руйнуватись лише за дії зусиль в діапазоні кутів  $43...90^\circ$ .

Напруження у веретеноподібному включенні (відношення півосей сфероїда 10) виявились значно меншими ніж для сплюснених, дископодібних включень. Результати обчислень зображено на рис. 4 при зусиллях  $N = 3\sigma_T = 600$  МПа, для різних значень коефіцієнта зміцнення.

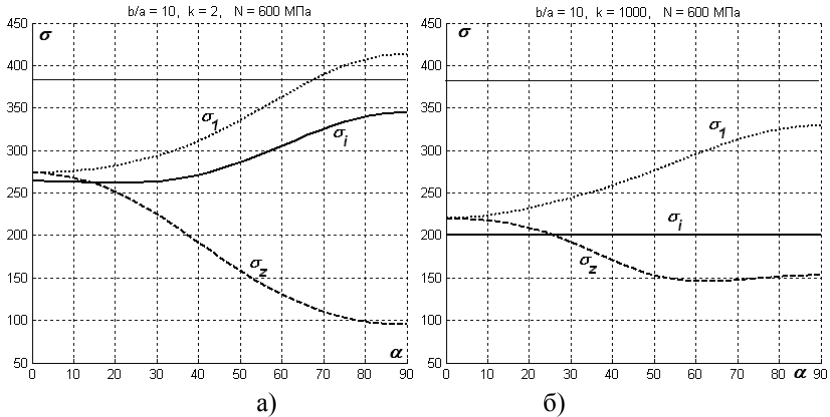


Рис. 4 - Напруження у веретеноподібному включенні: а) значне зміцнення матеріалу; б) ідеально-пластичний матеріал

З рисунку видно, що руйнування для випадку ідеально-пластичного ( $k = 1000$ ) веретеноподібного включення (рис. 4а) при вказаних зусиллях не відбуватиметься у всьому діапазоні напрямку дії зусиль. Максимальні головні напруження отримано для випадку поперечного розтягу і дорівнюють 330 МПа. Для випадку значного зміцнення ( $k = 2$ ) матеріалу (рис. 4б) руйнування включення буде відбуватися при кутах дії зусиль  $67...90^{\circ}$ .

**Висновки.** Запропонована методика дала можливість оцінити напружено-деформований стан масивних конструкційних елементів, що містять сферодні області зі зменшеною межею текучості. Зокрема, з'ясовано, що напруження у веретеноподібному включенні виявились значно меншими ніж для сплюснутих, дископодібних включень. Для веретеноподібних неоднорідностей при навантаженні 600 МПа у включенні почнеться руйнування при кутах дії зусиль  $67...90^{\circ}$ , в той час, як для того ж навантаження, включення зруйнується практично при будь-якому напрямку дії зовнішніх зусиль. З проведених досліджень можна зробити висновок, що найбільш небезпечними для конструкційних елементів є сплюснуті дископодібні області зі зниженою межею текучості.

#### Література

1. Eshelby J.D. The Determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems / J.D. Eshelby // Proceedings of Royal Society of London. – 1957. – A241. – P. 376-396.

2. Подільчук Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости. / Ю.Н. Подільчук // Киев:Наук, думка, 1979. – 375 с.
3. Подільчук Ю.М. Напружений стан біля еліпсоїдального пружного включення. / Ю.М. Подільчук // Прикл. механіка, 1964, 10, № 5, – С. 527-532.
4. Кунин И.А. Эллипсоидальная неоднородность в упругой сплошной среде / И.А. Кунин, Э.Г. Соснина // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 199. – № 3. – С. 571-574.
5. Писаренко Г.С. Уравнения и краевые задачи теории упругости и ползучести. Справ. пособие / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский // Киев: Наук. думка, 1981. – 493 с.
6. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. /Ю.Н. Шевченко, М.Е. Бабешко, Р.Г. Терехов //Киев: Наук. думка, 1992. – 328 с.
7. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теорий. / А.А. Ильюшин // М.: Изд.-во АН СССР, 1963. – 271 с.
8. Приходько О.С. Просторовий напружено-деформований стан металевих композитних матеріалів із пружно-пластичним глобулярним наповненням. / О.С. Приходько, Я.М. Пастернак // Технологічні комплекси. – Луцьк: Вид-во ЛНТУ, 2014. – № 2(4). – С. 62-67.
9. Биргер И.А. Методы дополнительных деформаций в задачах теории пластичности //Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963. – №1. – С.47-56.
10. Корнейчук. А.А. Квадратурная формула для сингулярных интегралов / А.А. Корнейчук // В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. // М.: Наука, 1964. – С. 64-74.
11. Космодамианский А.С. Анизотропные многосвязные среды: Учебн. пособие / А.С. Космодамианский. // Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1970. – С. 233.

*Рецензент д.т.н., проф. В.І. Шваб'юк*