УДК 629:78

Юрій Миколайович Зінченко

ІМІТАТОР ТАКТИЧНИХ ДІЙ JCATS В ПЛАНУВАННІ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Постановка проблеми. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Об'єднаний імітатор тактичних дій JCATS [1] є результатом багаторічного глибокого вивчення об'єкту моделювання і надає змогу досліднику враховувати при моделюванні величезну кількість факторів. Але без застосування спеціальних планових підходів ефективне врахування доступних досліднику факторів представляється неможливим.

Нерідко трапляються випадки, коли дуже багато (до ста та більше) різних факторів є потенційно важливими в дослідженні. Спеціальні плани (наприклад, план Плаккета-Бермана чи плани з застосуванням матриці Адамара) дозволяють ефективно просіяти велику кількість факторів, використовуючи мінімальну кількість спостережень. Наприклад, можна спланувати та проаналізувати експеримент із 127-а факторами, використовуючи всього 128 дослідів, а потім оцінити головний ефект кожного фактору, таким чином легко визначивши, які із факторів важливі при вивченні процесу.

У багатьох випадках достатньо розглянути всього два рівня факторів, які визначають кінцевий результат [3]. Експериментатор хотів би встановити, чи впливають будь-які із зазначених змін на кінцевий результат. Найбільш очевидний підхід у даному випадку полягає у повному переборі комбінацій рівнів факторів, що цікавлять. Це відмінно спрацьовує, якби кількість необхідних дослідів в такому експерименті не зростала експоненціально. Наприклад, якщо дослідник бажає провести експеримент з 7-а факторами, то повний перебір потребує кількість дослідів 2^7=128. Щоб вивчити вплив 10-и факторів, потрібно 2^{10}=1024 дослідів. Оскільки для проведення кожного досліду потрібне тривале та коштовне переналаштування досліджуваної системи, то на практиці часто нереально ставити настільки велику кількість дослідів. У цьому випадку при плануванні експерименту зазвичай використовують дробові плани, які відкидають взаємодії високого порядку та приділяють найбільшої уваги головним ефектам.

У теперішній час використовується понад 20 різних критеріїв оптимальності планів, які поділяються на дві основні групи. До першої групи відносять критерії, пов'язані з помилками оцінок коефіцієнтів функції відгуку, а до другої – з помилками оцінки поверхні відгуку. Критерії першої групи становлять інтерес для задач оптимізації, виділення домінуючих (найбільш значимих) параметрів на початкових етапах рішення оптимізаційних задач та для виявлення несуттєвих параметрів в задачах відновлення закономірностей функціонування об'єкту.

Формулювання мети статті. Виклад основного матеріалу

Критерію D-оптимальності відповідає мінімальний об'єм еліпсоїда розсіювання помилок (мінімум добутку усіх дисперсій коефіцієнтів полінома функції відгуку). У відповідному плані ефекти факторів максимально незалежні один від одного. Цей план мінімізує очікувану помилку передбачення функції відгуку. Критерію A-оптимальності відповідає план з мінімальною сумарною дисперсією усіх коефіцієнтів, критерію E-оптимальності – план, в якому максимальна дисперсія коефіцієнтів буде мінімальною.

Критерії другої групи застосовуються при вирішенні задач опису поверхні відгуку, визначення обмежень на значення параметрів. В цьому випадку головним є критерій G-оптимальності, який дозволяє побудувати план з мінімальним значенням найбільшої помилки в описі функції відгуку.

При вивченні впливу окремих факторів на поведінку об'єкта застосовують критерій E-оптимальності.[2]

На початкових етапах оптимізації для функції відгуку об'єкта досліджень застосовують неповні поліноми другого порядку або лінійні поліноми. Обчислення оцінок коефіцієнтів таких поліномів здійснюється на основі обробки результатів реалізації найбільш простих планів, у яких кожний фактор ухвалює тільки два значення $v_{i\min}$ або $v_{i\max}$, розташовані симетрично щодо центру плану по даному фактору. Значення рівнів варіювання обирає дослідник, виходячи із можливого діапазону зміни кожного фактора й можливості застосування лінійної апроксимації функції відгуку в обраному діапазоні змін параметру. Без обмеження спільності можна вважати, що кодовані нормовані значення $x_i = \frac{v_i - v_{i0}}{\Delta v}$ приймають значення – 1 і +1 відповідно (прийнято позначати – або +). Прийняті позначення: v_i – натуральне значення фактору, v_{i0} – натуральне значення основного рівня фактору, Δv – інтервал варіювання. Безліч усіх крапок в k-мірному просторі, координати яких є комбінаціями "+" та "–", називається повним факторним планом або планом повного факторного експерименту типу 2^k (ПФЕ). Кількість крапок у цьому плані $N = 2^k$.

Для прикладу візьмемо повний факторний експеримент із трьома незалежними змінними x_1, x_2 та x_3, табл. 1.

Таблиця 1

Повний факторний експеримент із трьома незалежними змінними

Матриця планування								Вектор результатів
x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1\ x_2$	$x_1\ x_3$	$x_2\ x_3$	$x_1\ x_2\ x_3$	y
+	–	–	–	+	+	+	–	y_1
+	–	–	+	+	–	–	+	y_2
+	–	+	–	–	+	–	+	y_3
+	–	+	+	–	–	+	–	y_4
+	+	–	–	–	–	+	+	y_5
+	+	–	+	–	+	–	–	y_6
+	+	+	–	+	–	–	–	y_7
+	+	+	+	+	+	+	+	y_8

Існує кілька способів побудови подібних матриць планування [4]. Зокрема можна скористатися прийомом, характерним для запису послідовності двійкових чисел. У стовпці останньої змінної x_3 знаки змінюються по черзі, у стовпці передостанньої змінної x_2 – чергуються через два елементи, третьої праворуч змінної x_1 – через чотири елементи. Аналогічно будується матриця для будь-якої кількості змінних, порядок перерахування змінних не відіграє ролі. Стовпці з добутками змінних обчислюються шляхом множення значень елементів у відповідних стовпцях простих змінних.

З аналізу матриці планування видно, що повний факторний експеримент має властивості:

ортогональності. Сума парних добутків елементів будь-яких двох різних стовпців дорівнює зокрема, для простих змінних

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} = 0, \quad i \neq j, \ i, j = \overline{0, k};$$

симетричності. Сума всіх елементів будь-якого стовпця, за винятком першого, дорівнює нулю. Наприклад,

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu} = 0, \quad i = \overline{1, k};$$

нормованості. Сума квадратів елементів будь-якого стовпця дорівнює числу дослідів, так для i-ї змінної

$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 = N, \quad i = \overline{0, k}.$$

Перші дві властивості забезпечують незалежність оцінок коефіцієнтів моделі й допустимість їх фізичної інтерпретації. Порушення цих властивостей приводить до взаємної залежності оцінок і неможливості надання змісту коефіцієнтам функції відгуку.

З ростом кількості факторів k - число крапок плану в ПФЕ росте по показовій функції 2^k. Плани ПФЕ дозволяють одержати незміщені оцінки градієнта функції відгуку в центральній точці, але у випадку застосування лінійного полінома виявляються недостатньо ефективними по кількості дослідів при великій кількості незалежних змінних, тому що залишається занадто багато ступенів свободи на перевірку адекватності моделі. Наприклад, при $k = 5$ на перевірку адекватності лінійної моделі залишається 26 ступенів. Хоча велика кількість дослідів і приводить до істотного зниження похибки в оцінці коефіцієнтів, все-таки таке число ступенів волі для перевірки адекватності є надмірним.

Таким чином, у випадках, коли використовуються тільки лінійні наближення функції відгуку, кількість дослідів слід скоротити, використовуючи для планування так звані регулярні дробові репліки ПФЕ, що містять необхідне число дослідів та зберігають основні властивості матриці планування. Репліка, що включає тільки половину експериментів ПФЕ, називається напівреплікою, що включає четверту частину дослідів – чвертьреплікою, тощо. Коротке позначення зазначених дробових реплік 2^{k-1}, 2^{k-2} відповідно.

Побудова регулярної дробової репліки або проведення дробового факторного експерименту (ДФЕ) типу 2^{k-p} передбачає відбір з безлічі k факторів k–p основних, для яких будується план ПФЕ. Цей план доповнюється p стовпцями, які відповідають іншим факторам. Кожний із цих стовпців формується за спеціальним правилом, а саме, виходить як результат поелементного множення не менш двох і не більш k–p певних стовпців, відповідних до основних факторів. Інакше кажучи, у дробових репліках p лінійних ефектів прирівняні до ефектів взаємодії. Але саме така побудова матриці планування й дозволяє забезпечити її симетричність, ортогональність та нормованість. Правило створення кожного з p стовпців ДФЕ називають генератором плану. Кожному додатковому стовпцю відповідає свій генератор (для плану типу 2^{k-p} повинно бути задане p різних генераторів). Генератор задається як добуток основних факторів, які визначають значення елементів відповідного додаткового стовпця матриці планування. Прикладом запису генератора для плану 23^{-1} служить вираз $x_3 = x_1 x_2$, табл. 2. Матриця планування ДФЕ типу 2^{k-p} містить $k+1$ стовпець і $N = 2^{k-p}$ рядків.

Коли основним джерелом похибки є випадкові помилки вимірів, то в точках плану зазвичай проводяться однократні досвіди. У такій ситуації помилки різних досвідів вважають взаємно незалежними випадковими величинами, розподіленими за нормальним законом з нульовим математичним очікуванням і однаковою, хоча й невідомою, дисперсією. Отже, функція відгуку в різних крапках плану також розподілена нормально. Її математичні очікування невідомі й можуть бути різними. Оцінка впливу фактору в цих умовах проводиться на основі застосування методу дисперсійного аналізу, суть якого полягає у визначенні значимості відмінностей між середніми значеннями функції відгуку для різних значень досліджуваного фактору. Таке порівняння проводиться не шляхом безпосереднього порівняння середніх значень, а шляхом зіставлення факторної дисперсії функції відгуку й залишкової дисперсії, викликаної випадковими причинами. Якщо дисперсія функції відгуку, породжена впливом різних значень фактору, значно перевищує залишкову дисперсію, то фактор впливає на функцію відгуку. А це значить, що й середні значення функції відгуку на різних рівнях фактору різняться суттєво.

Таблиця 2

Прикладом запису генератора для плану 23^{-1}

Матриця·планування				Вектор·результатів
x_0	x_1	x_2	x_3	y
+	–	–	+	y_1
+	–	+	–	y_2
+	+	–	–	y_3
+	+	+	+	y_4

Отже, для довільної кількості рівнів вхідних факторів вихідними даними є:

план ДФЕ з кількістю рівнів зміни факторів, рівному n. Нехай рівні аналізованого фактору P відповідаю стовпцям квадрата;

матриця значень функції відгуку $Y = \|ykj\|$ розмірністю $n \times n$;

рівень значимості для перевірки статистичної гіпотези α.

Дисперсійний аналіз включає наступні кроки.

1. Обчислення середнього значення функції відгуку по всіх значеннях досліджень і середнього значення по різних рівнях фактору P

$$\mu_1 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{kj}\ ,\ \mu_1(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{kj},\quad j = \overline{1, n}\ .$$

2. Оцінка факторної дисперсії

$$\mu_{2,ф} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_1 - \mu_1(j)\right]^2 .$$

3. Оцінка залишкової дисперсії

$$\mu_{2,зал} = \frac{1}{n^2 - n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\mu_1(j) - y_{kj}\right]^2 .$$

4. Оцінка значимості фактору P проводиться на основі методу перевірки статистичних гіпотез. Нульова гіпотеза H_0 відповідає рівності середніх значень функції відгуку при різних значеннях фактору. У цьому випадку факторна й залишкова дисперсія є незміщеними оцінками невідомої генеральної дисперсії функції відгуку й тому не повинні суттєво різнитися. Очевидно, якщо оцінка факторної дисперсії не перевищує оцінку залишкової дисперсії, те слушна гіпотеза H_0. Альтернативна гіпотеза H_1 відповідає твердженню, що факторна дисперсія суттєво більша залишкової дисперсії, отже, середні значення також значно різняться. Перевірка здійснюється на основі критерію Фішера $F = \frac{\mu_{2,ф}}{\mu_{2,зал}}$. Критичне значення критерію $F_{кр} = F(\alpha; n-1; n^2 - n)$ знаходять

стандартним чином, тут $n-1$ відповідає кількості ступенів свободи факторної дисперсії, а n^2-n – кількості ступенів свободи залишкової дисперсії. Якщо виконується умова $F > F_{кр}$, то фактор P суттєво впливає на функцію відгуку, інакше – вплив фактору не суттєвий.

Критерій Фішера застосовуємо тільки при порівнянні дисперсій нормально розподілених величин. Якщо такої впевненості немає, то до отриманого висновку слід ставитися обережно. У випадку проведення повторних дослідів у точках плану розподіл середніх значень функції відгуку буде наближатися до нормального зі збільшенням кількостей дослідів. І застосування критерію Фішера буде досить обґрунтоване.

Висновки

Таким чином, можна спланувати і практично реалізувати дослідний експеримент на моделі тактичного імітатора і визначити впливові та невпливові на кінцевий результат фактори. При цьому кількість дослідів факторного експерименту може приблизно дорівнювати кількості факторів, вплив яких на кінцевий результат підлягає дослідженню.

Результати такого дослідного експерименту в подальшому дозволяють проводити оцінку дієвості оперативних планів з варіюванням невеликою, найбільш значущою, частиною впливових факторів, тим самим здійснюючи підтримку прийняття рішення відповідними посадовими особами при проведенні різних тактичних дій.

Література

1. Довідник користувача системи JCATS: Пер з англ. – New York: Cubic Defense Application Team, 2006. – 60 с. **2. Клейнен Дж.** Статистические методы в имитационном моделировании /Клейнен Дж. – М.: Статистика, 1978. – 221с. **3. Тоценко В.Г.** Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект / В.Г. Тоценко. – К.:Наукова думка, 2002. – 381с. **4. Шеннон Р.** Имитационное моделирование систем – искусство и наука – М.: Мир, 1978. – 420 с.

В статье рассмотрен рациональный подход к проведению экспериментов с использованием имитационных моделей. Оптимизация проведения эксперимента основывается на уменьшении числа испытаний без существенной потери точности вычислений.

Ключевые слова: оптимизация, имитационные модели, точность вычислений.

In the article a rational approach to conducting experiments using simulation models is considered. Optimization of the experiment is based on reducing the number of trials without significant accuracy loss.

Key words: optimization, simulation models, accuracy.