УДК 004.421.2:519.17

Юрій Васильович Кравченко
Роман Антонович Миколайчук

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ З ДИНАМІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ

Постановка проблеми. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Розвиток інформаційних технологій призводить до можливості обробки великих обсягів інформації у стислі терміни. Збільшення потужності та швидкодії сучасних обчислювальних машин дозволяє не тільки аналізувати результати функціонування складних технічних систем але й оперативно вносити зміни до структури системи в залежності від зовнішніх умов. Це забезпечує можливість створення систем з динамічною структурою, що, в свою чергу, висуває задачу математичного моделювання зазначених систем.

Поняття структури вводиться для визначення складу, місця і зв'язків між підсистемами й елементами системи. Структура системи – часткове впорядкування елементів і відносин між ними, тобто побудова деякої ієрархії відносин у системі [1, 2]. Таку ієрархію можна побудувати, тому що завжди сукупна функція системи розділяється на підфункції, яким відповідають окремі підсистеми. Відповідно до апробованих підходів, декомпозицію системи на підсистеми доцільно проводити так, щоб вони представляли самостійні функціональні частини системи (функціональні комплекси, що вирішують певні узгоджені задачі в інтересах найкращого виконання поставлених перед системою загальних задач). Однак, структурні та функціональні властивості тісно пов'язані. Найбільш апробований апарат для моделювання ієрархічних систем надає теорія графів [3].

Математичному моделюванню структури складних технічних систем присвячено низку наукових робіт. В роботах [4-7] відображено підходи до моделювання структури складних технічних систем з використанням основних положень теорії графів. Пропонується формалізувати структуру системи у вигляді навантаженого орієнтованого графу, що дає можливість визначити низку показників та критеріїв ефективності структури системи, а також забезпечити її синтез.

Разом з тим в зазначених роботах не повною мірою враховується особливості складних технічних систем з динамічною структурою. Окрім того, динамічний характер структури призводить до значного зростання потужності пов'язаного з нею графу, що викликає необхідність пошуку шляхів спрощення моделі без втрати її адекватності.

Формулювання мети статті. Виклад основного матеріалу

У зв'язку з цим, метою статті є розробка математичної моделі складної технічної системи з динамічною структурою для забезпечення вирішення задачі побудови зазначеної системи.

Під структурою системи з динамічною структурою будемо називати взаємопов'язану між собою сукупність підсистем і елементів об'єднаних деякою метою взаємодії з об'єктами впливу. Зазначена структура характеризується не тільки сукупністю підсистем і елементів, але і їхнім розташуванням у часі й просторі.

Головне, що характеризує структуру системи з динамічною структурою – склад, наявність достовірного сигналу від елементів та їх місце розташування. Отже, при зміні одного із зазначених елементів відбувається зміна структури. Формування структури, варіантів її поетапної зміни є частиною рішення загальної задачі побудови системи, що не повністю розкриває її в цілому. Тому при проектуванні в структурній схемі необхідно відображати не тільки склад системи з динамічною структурою, але й функціональні зв'язки. Однією з істотних особливостей системи з динамічною структурою є її ієрархічна організація, що визначається тим, що окремі елементи системи поєднуються в сукупності взаємозалежних підсистем за ієрархічною ознакою.

Підсистемами системи з динамічною структурою можуть бути наступні:

підсистема виявлення об'єктів впливу, яка містить множину датчиків Dc , $\mathrm{Dc} \subset \mathrm{V}$;

підсистема взаємодії з об'єктами впливу, що містить множину виконавчих модулів Bm, $\mathrm{Bm} \subset \mathrm{V}$;

підсистема зв'язку, яка містить множину засобів зв'язку Ls , $\mathrm{Ls} \subset \mathrm{V}$;

розподілена інформаційна підсистема, з множиною елементів Ip , $\mathrm{Ip} \subset \mathrm{V}$.

Окрім того, до моделі системи з динамічною структурою слід включити множину об'єктів впливу R .

Враховуючи вищенаведене, пропонується

представити математичну модель структури системи у вигляді навантаженого орієнтованого графу $G\alpha = (V, D, \Phi)$, де $\Phi = h_{\Phi}(V, D, F)$ – вага ребер графу, отримана в результаті певного відображення функціонального стану елементу структури системи з динамічною структурою. Враховуючи просторово-часовий розподіл структури системи, зазначений граф можливо подати у вигляді диз'юнктного об'єднання підграфів, кожен з яких відповідає деякій підмножині структури системи $G\alpha_{E_i}(\tau_j) \mapsto \alpha_{E_i}(\tau_j)$ (E, τ – відповідно решітка сегментів простору та ланцюг інтервалів часу функціонування системи; $i \in \overline{0, |E|-1}, j \in \overline{1, |\tau|-1}$):

$$G\alpha = \dot{\bigcup_E} \dot{\bigcup_\tau} G\alpha_{E_i}(\tau_j). \qquad (1)$$

Слід зазначити, що граф може бути заданим чотирма способами:

– матрицею суміжності розміром n×n

$$M = ||a_{ij}||,$$
$$i, j = 1..n, \qquad (2)$$
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad l_{ij} \in Lm; \\ 0, & \text{при} \quad l_{ij} \notin Lm; \end{cases}$$

– списками зв'язності розміром 1×m; m=$|D|$;

– списком суміжності, якому кожній вершині v_i ставиться у відповідність список N_{v_i} вершин, суміжних з v_i. Під цей список досить відвести deg(v_i)+1 чарунок – по одній на кожен елемент і одна чарунка для позначення кінця списку. Крім того, формується список N=(N_1,N_2,…,N_n), де N_i – номер чарунки, у якій зберігається перший елемент списку N_{v_i}. Отже, такий спосіб представлення графа вимагає $\sum_{v=V}(\deg(v)+1)+n = 2m+2n$ чарунок пам'яті, m=$|D|$;

– матрицею інцидентності розмірністю n×m [3].

Кожен з зазначених способів визначає орграф з точністю до ізоморфізму. В даній роботі прийнято для визначення графу використовувати матриці суміжності його окремих підграфів (див. вирази (1,2)).

Позначимо порядок входження вищенаведених множин до матриці суміжності $M_{(|R|+|V|,|R|+|V|)}$ у вигляді ланцюгу: $Lm, Lm = \{R \prec Dc \prec Bm \prec Ls \prec Ip\}$, а принципову можливість наявності зв'язків між елементами Lm, у тому числі й зв'язків всередині окремої множини у вигляді матриці, у якій одиницями позначені заповнені, а нулями – пусті блоки матриці M відповідно:

$$M_{Lm} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (3)$$

Тоді матрицю суміжності можливо визначити виразом:

$$M = M_{Lm(h_{Lm}(i), h_{Lm}(j))} \cdot M_{i,j}; \; i, j \in \overline{1, |R|+|V|}, \qquad (4)$$

де $h_{Lm}(x)$ – функція визначення належності аргументу до елементу ланцюгу Lm:

$$h_{Lm}(x) = y : \sum_{i=0}^{y-1} |Lm_i| < x \le \sum_{i=0}^{y} |Lm_i|;$$
$$Lm_0 = 0, y \in \overline{1, |Lm|}.$$

Застосування виразів (3, 4) дасть змогу уникнути необхідності визначення елементів матриці суміжності в незаповнених блоках.

При дослідженні графових моделей будемо використовувати наступні параметри графів [3]:

1) потужність множини вершин n= $m_{r\cup v}$ $=|R|+|V|$;

2) потужність множини ребер m_d=$|D|$;

3) локальні ступені вершин (валентність) – число інцидентних ребер стосовно вершини v_i: $\alpha_i = \deg(v_i)$;

4) характеристичні числа матриці суміжності графа (слід графа) λ_i, i=1,2,…,n, які являються рішенням матричного рівняння: $M - \lambda E = 0$, де: M – матриця суміжності графа; λ^T = {λ_1,λ_2,…,λ_n} – вектор характеристичних чисел; $E = \|e_{ij}\|$ – одинична матриця:

$$e_{ij} = \begin{cases} 0, \text{при } i \ne j; \\ 1, \text{при } i = j; \end{cases}$$

5) число реберної зв'язності λ(G);

6) число вершинної зв'язності χ(G);

7) наявність, кількість та вага маршрутів виду $(i, j, k, l \in N)$: $r_i \to dc_j \to lc_k \to ip_l$ (виявлення об'єкту впливу), $ip_l \to lc_k \to bm_j \to r_i$ (взаємодія з об'єктами впливу), $ip_l \to lc_k \to ip_i$ (контроль стану системи).

Разом з тим, в ході функціонування системи, будуть відбуватися зміни в її структурі, як за рахунок виходу з ладу елементів системи через вплив противника чи з інших причин, так і внаслідок відновлення та нарощування структури системи. Стосовно запропонованої математичної моделі системи, зазначені чинники будуть впливати, передусім на підмножину v вершин графу $G\alpha$. Враховуючи те, що згадана множина є кінцевою, а також упорядкованою в матриці суміжності графу, множину вершин можливо представити у векторному вигляді : $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, де $v_1, v_2, ..., v_n$ – показники стану елементів структури, що вказують ймовірність існування зазначеного елементу в даний момент часу. Будемо вважати що наявність зв'язку між двома елементами множини v залежить тільки від наявності зазначених елементів, що не суперечить принципам побудови та функціонування системи з динамічною структурою.

Тоді загальний стан структурних елементів системи в будь який момент часу описуватиметься системою диференційних рівнянь вигляду [4]:

$$\dot{v}_i = \varphi_i(v_1, v_2, \ldots, v_n), i \in \overline{1,n}, \quad (5)$$

а наявність зв'язку d_{ij} між елементами v_i та v_j, відповідно:

$$d_{ij} = M_{i,j} \cdot v_i \cdot v_j; i, j \in \overline{1,n}, \quad (6)$$

де M – матриця суміжності графу $G\alpha$.

Таким чином, поточний стан структури системи та його зміна протягом часу можуть бути описані системою диференційних рівнянь (5, 6), при чому система рівнянь (6) однозначно визначається системою (5) та матрицею суміжності графу $G\alpha$.

Для визначення системи рівнянь (5) розглянемо для деякої структури α окремий елемент $v_i, v_i \in \alpha$. Зазначений елемент може знаходитись в двох станах: працездатному (нормальне виконання своїх функцій) або несправному (неможливість виконання функцій). На момент часу, який відповідає створенню структури α, даний елемент перебуває у першому стані. У подальшому під впливом випадкових подій може відбуватися вихід елементу v_i з ладу з інтенсивністю $\gamma_i(t)$ або його відновлення у структурі α з інтенсивністю $\psi_i(t)$. Тоді ймовірність існування елементу v_i на певний момент часу можливо визначити виразом [8] ($\bar{v}_i = 1 - v_i$):

$$\dot{v}_i = \bar{v}_i \cdot \psi_i - v_i \cdot \gamma_i, \quad (7)$$

або, для випадку $\psi_i, \gamma_i = \text{const}$:

$$v_i = \frac{\psi_i}{\psi_i + \gamma_i}. \quad (8)$$

Висновки

Отже, ймовірність знаходження будь якого елемента графу (1) в працездатному стані може бути визначено за допомогою отриманих аналітичних залежностей (5-8). Зазначені вирази в сукупності з матрицею суміжності графу (1) складають математичну модель структури системи з динамічною структурою. Застосування даної моделі дасть змогу вирішувати задачі оцінки ефективності системи, а також здійснювати її структурний синтез.

Аналіз розробленої математичної моделі структури системи з динамічною структурою, а також існуючої теорії графів і методів дискретної оптимізації в цілому дозволяє зробити висновок про те, що рішення задач синтезу на отриманому орграфі пов'язано з певними труднощами. Це викликано тим, що теорія випадкових графів розроблена для моделей з випадковою кількістю ребер і детермінованою кількістю вершин орграфа. Математична модель структури системи крім випадкової кількості елементів множини ребер характеризується і випадковою кількістю вершин, що відповідно враховує ймовірний вплив внутрішніх і зовнішніх чинників.

У зв'язку з цим подальші дослідження доцільно проводити в напрямку пошуку методів оптимізації побудови складних технічних систем з динамічною структурою.

Література

1. Баранов Г. Л. Структурное моделирование сложных динамических систем / Г. Л. Баранов, А. В. Макаров. – К. : Наукова думка, 1986. – 272 с. **2. Михалевич В. С.** Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем / В. С. Михалевич, В. Л. Волкович. – М. : Наука, 1982. – 286 с. **3. Харари Ф.** Теория графов / Фрэнк Харари // – М.: УРСС, 2003. – 296 с. **4. Бенькович Е. С.** Практическое моделирование динамических систем / Е. С. Бенькович, Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков. − СПб. : БХВ-Петербург, 2002. − 464 с. **5. Кравченко Ю.В.** Математическая модель остаточной стоимости навигационного оборудования летательного аппарата / Ю.В. Кравченко, А.Д. Мельник // Праці наукової конференції "Dynamical System Modeling and Stability Investigation ". – К.: КГНУ им. Т.Г. Шевченко – 2001. – С. 179. **6. Неделько С.Н.** Структурно-динамический подход к представлению решений в интеллектуальных автоматизированных системах обслуживания воздушного движения / С.Н. Неделько, В.Н. Неделько, Е.А. Дубровский // Проблеми аеронавігації: Тематич. зб. наук. праць. - Вип. III. Част. II: Моделювання та управління в аеронавігаційних системах. - Кіровоград: ДЛАУ, 1998. - С. 5-12. **7. Кравченко Ю.В.** Принципи побудови та застосування системи динамічного мінування. / Кравченко Ю.В., Миколайчук Р.А. // К. : НУОУ, Збірник наукових праць "Труди університету". – 2012. – №1 (107). – С.146-152. **8. Вентцель Е. С.** Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Вентцель. – М.: КноРус, 2010. – 192 с.

Определена математическая модель системы с динамической структурой на основе теории графов. Проведена формализация матрицы смежности. Предложена система дифференциальных уравнений для описания структуры системы.

Ключевые слова: сложная техническая система, динамическая структура, математическая модель, матрица смежности, синтез.

The mathematical model of the system with a dynamic structure based on graph theory was defined. The formalization of the adjacency matrix was proposed. The system of differential equations to describe the structure of the system was proposed.

Key words: complex technical system, dynamic structure, the mathematical model, the adjacency matrix, synthesis.