

УДК 539.3:624.074.435:624.073

## ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ЗАМКНУТЫХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

КАРАСЁВ А. Г.<sup>1</sup>, к.т.н., доц.

<sup>1</sup> Кафедра безопасности жизнедеятельности, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24а, г. Днепропетровск, Украина, 49600, тел. +38 (0562) 47-16-01, e-mail: [karasev.alexey@mail.ru](mailto:karasev.alexey@mail.ru), ORCID ID: 0000-0002-1294-8021

**Аннотация.** Цель. В последнее десятилетие в Украине была выполнена большая серия испытаний на устойчивость при внешнем давлении малогабаритных образцов пологих замкнутых круговых конических оболочек в широком диапазоне изменения их геометрии. Были проведены сравнения полученных экспериментальных данных с результатами расчетов. Эти исследования показали, что остается ряд недостаточно изученных вопросов. Цель работы – заключается в анализе результатов численных решений двух задач о деформировании и выпучивании замкнутых пологих конических оболочек при внешнем давлении: 1) линейного (бифуркационного) решения по определению критического давления ( $q^{cr}$ ) (задача 1); 2) геометрически нелинейного решения задачи о деформировании и выпучивании рассматриваемых оболочек с определением предельного давления ( $q^{lim}$ ) при использовании осесимметричных оболочечных КЭ (задача 2). **Методика.** Задачи решались численно в среде ПК ANSYS. При решении задачи 1 использовался четырехугольный конечный элемент (КЭ) SHELL 181, а при решении задачи 2 осесимметричный КЭ SHELL 208. **Результаты.** В среде ПК ANSYS выполнено численное решение двух задач о деформировании и выпучивании при внешнем поперечном давлении упругих замкнутых пологих круговых конических оболочек: линейной и геометрически нелинейной задач. Исследования проводились для случаев неподвижных жесткой заделки и шарнирного опирания основания конуса в широком диапазоне изменения геометрии оболочек ( $100 \leq R/h \leq 2000$  и  $0^\circ.5 \leq \alpha \leq 20^\circ$ ). **Научная новизна.** В работе выявлены особенности геометрически нелинейного решения задачи 2, реализующие в процессе нагружения оболочки осесимметричное ее деформирование на всех этапах: до и после предельной точки, вплоть до получения «выворотки» (за исключением области вершины конуса). **Практическая значимость.** Результаты численного исследования позволяют уточнить расчёт исследуемых оболочек и, в дальнейшем, провести совместный сравнительный анализ решений линейной и нелинейной задач устойчивости, направленный на выявление опасной модели выпучивания рассматриваемых оболочек.

**Ключевые слова:** полая коническая оболочка, внешнее давление, деформирование, устойчивость, численные решения, опасные модели выпучивания, программный комплекс

## ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО РІШЕННЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ І СТІЙКОСТІ ПОЛОГИХ ЗАМКНУТИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ЗОВНІШНЬОМУ ТИСКУ

КАРАСЬОВ О. Г.<sup>1</sup>, к.т.н., доц.

<sup>1</sup> Кафедра безпеки життєдіяльності, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, м. Дніпропетровськ, Україна, 49600, тел. +38 (0562) 47-16-01, e-mail: [karasev.alexey@mail.ru](mailto:karasev.alexey@mail.ru), ORCID ID: 0000-0002-1294-8021

**Анотація.** Мета. В останнє десятиліття в Україні була виконана велика серія випробувань на стійкість при зовнішньому тиску малогабаритних зразків пологих замкнутих кругових конічних оболонок в широкому діапазоні зміни їх геометрії. Були проведені порівняння отриманих експериментальних даних з результатами розрахунків. Ці дослідження показали, що залишається ряд недостатньо вивчених питань. Мета роботи - полягає в аналізі результатів чисельних рішень двох задач про деформацію і випинання замкнутих пологих конічних оболонок при зовнішньому тиску: 1) лінійного (бифуркаційного) рішення щодо визначення критичного тиску ( $q^{cr}$ ) (задача 1); 2) геометрично нелінійного рішення задачі про деформацію і випинання розглянутих оболонок з визначенням граничного тиску ( $q^{lim}$ ) при використанні осесиметричних оболонкових СЕ (задача 2). **Методика.** Задачі вирішувалися чисельно в середовищі ПК ANSYS. При виконанні задачі 1 використовувався чотирикутний скінчений елемент (СЕ) SHELL 181, а при вирішенні задачі 2 осесиметричний СЕ SHELL 208. **Результати.** У середовищі ПК ANSYS виконано чисельне рішення двох задач про деформування і випинання при зовнішньому поперечному тиску пружних замкнутих пологих кругових конічних оболонок: лінійної та геометрично нелінійної задач. Дослідження проводилися для випадків нерухомих жорсткої защемлення і шарнірного обпирання основи конуса в широкому діапазоні зміни геометрії оболонок ( $100 \leq R/h \leq 2000$  і  $0^\circ.5 \leq \alpha \leq 20^\circ$ ). **Наукова новизна.** В роботі виявлено особливості геометрично нелінійного рішення задачі 2, що реалізують в процесі навантаження оболонки осесиметричне її деформування на всіх етапах: до і після граничної точки, аж до отримання «виворотки» (за винятком області вершини конуса). **Практична значимість.** Результати чисельного дослідження дозволяють уточнити розрахунок досліджуваних оболонок і, в подальшому,

провести спільний порівняльний аналіз рішень лінійної і нелінійної задач стійкості, спрямований на виявлення небезпечної моделі випинання розглянутих оболонок.

*Ключові слова:* полого конічна оболонка, зовнішній тиск, деформування, стійкість, чисельні рішення, небезпечні моделі випинання, програмний комплекс

## PROPERTIES OF NUMERICAL SOLUTION OF THE DEFORMATION AND BUCKLING PROBLEM IN SHALLOW CONICAL SHELLS UNDER EXTERNAL PRESSURE

KARASEV A. G.<sup>1</sup>, *Ph.D. in Technical Sciences, associate professor.*

<sup>1</sup> Department of Life Safety, State Higher Education Establishment «Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture», 24-A, Chernishevskogo st., Dnipropetrovsk, Ukraine, 49600, тел. +38 (0562) 47-16-01, e-mail: [karasev.alexey@mail.ru](mailto:karasev.alexey@mail.ru), ORCID ID: 0000-0002-1294-8021

**Abstract. Aim.** In the last decade, a large series of tests of buckling under external pressure of small specimens of shallow closed circular conical shells in a wide range of variation of their geometry was carried out in Ukraine. A comparison of the experimental data with the results of the calculations was done. These studies have shown that there remain a number of issues insufficiently studied. The aim of the work is to analyze the results of numerical solution of two problems of deformation and buckling of closed shallow conical shells under external pressure: 1) linear (bifurcation) solution to determine the critical pressure ( $q^{cr}$ ) (Problem 1); 2) geometrically nonlinear solution of the problem of deformation and buckling of shells with the definition of the limit pressure ( $q^{lim}$ ) using axisymmetric shell FE (Problem 2). **Methodology.** The problems are solved numerically in the ANSYS software. To solve the Problem 1 is used quadrangular finite element (FE) SHELL 181, and to solve the Problem 2 an axisymmetric FE 208 SHELL. **Results.** The numerical solution of two problems of deformation and buckling under external pressure of elastic closed shallow conical shells was done in ANSYS. Research carried out for the cases of fixed encastre and hinged support of base of the cone in a wide range of shells geometry ( $100 \leq R/h \leq 2000$  and  $0^\circ.5 \leq \alpha \leq 20^\circ$ ). **Scientific novelty.** The features of geometrically nonlinear solution of the Problem 2 was defined. These features realising its shell axially symmetric deformation at all stages: before and after the limit point (except the area of the top of the cone). **Practical significance.** The results of numerical studies allow clarifying the calculation of the studied shells. Further, it will allow carrying out a comparative analysis of linear and nonlinear problems of buckling in solutions aimed at identifying of dangerous shells buckling model.

**Keywords:** shallow conical shell, external pressure, deformation, buckling, numerical solutions, dangerous buckling model, software

### Постановка проблемы

Задача устойчивости замкнутых упругих пологих круговых тонкостенных конусов при внешнем давлении относится к классическим задачам теории оболочек [1, 3]. В развитие геометрически нелинейной теории деформирования и устойчивости линейно упругих конических оболочек большой вклад внесли [1, 2, 3, 5, 6]. В этих работах даны постановки задач, методы и результаты их решения, приведены обзоры, позволяющие оценить этапы развития исследований в области нелинейной механики конических оболочек. Наиболее близкими к рассматриваемой в работе тематике являются работы [5, 6], в которых использовались нелинейные уравнения теории пологих оболочек.

### Анализ последних исследований, выделение нерешенных ранее частей общей проблемы

В последнее десятилетие в Украине была выполнена большая серия испытаний на устойчивость при внешнем давлении малогабаритных образцов (более 100 штук) пологих замкнутых круговых конических оболочек в достаточно широком диапазоне изменения их геометрии [4]. Были проведены сравнения полученных экспериментальных данных с результатами расчетов, выполненных на основе различных

известных теорий и расчетных моделей, построенных для идеальных оболочек и оболочек с начальными несовершенствами, включая расчеты с использованием программных комплексов (ПК) [4, 8], основанных на методе конечных элементов (МКЭ). Эти исследования показали, что в рамках рассматриваемой задачи остается ряд недостаточно изученных вопросов, представляющих теоретический и прикладной интерес. Так, в частности, отсутствует совместный сравнительный анализ решений линейной и нелинейной задач устойчивости, направленный на выявление опасной модели выпучивания рассматриваемых оболочек. Наиболее эффективным инструментом для проведения этих исследований и выполнения уточненного расчета исследуемых оболочек в настоящее время являются современные ПК, в частности, ПК ANSYS. Учитывая, что пологие конические оболочки используются в качестве силовых и ограждающих элементов различных объектов, в том числе, конструкций особой ответственности, используемых в авиа- и ракетной технике, в химической и нефтехимической промышленности, уточнение расчета таких оболочек всегда было и остается важной и актуальной задачей.

**Цель работы** заключается в анализе результатов численных решений в среде ПК ANSYS (ANSYS Inc. Academic Research, Mechanical Analysis, Release 13.0

customer 298728) двух задач о деформировании и выпучивании замкнутых пологих конических оболочек при внешнем давлении: 1) линейного (бифуркационного) решения по определению критического давления ( $q^{cr}$ ) (задача 1); 2) геометрически нелинейного решения задачи о деформировании и выпучивании рассматриваемых оболочек с определением предельного давления ( $q^{lim}$ ) при использовании осесимметричных оболочечных КЭ (задача 2). При этом рассматривалось два условия закрепления основания конических оболочек: неподвижное шарнирное опирание и жесткая заделка.

### Изложение основного материала исследований

Геометрические модели идеальных замкнутых конических оболочек строились путем вращения образующей вокруг оси оболочки.

Для создания расчетной трехмерной модели конической оболочки при решении задачи 1 из библиотеки программ ПК ANSYS использовался четырехугольный КЭ SHELL 181 с 4 узловыми точками, каждая из которых имеет 6 степеней свободы (рис.1, а, [7]).

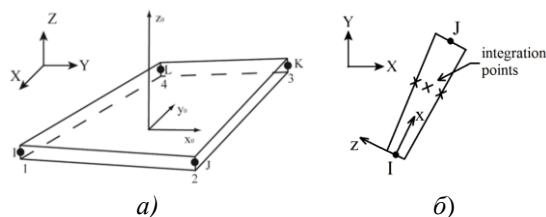


Рис. 1. Геометрия оболочечных КЭ SHELL 181 (а) и КЭ SHELL 208 (б) [7] / Geometry of shell elements FE SHELL 181 (a) and FE SHELL 208 (b)

Этот элемент хорошо подходит для расчета тонкостенных оболочек и применим при решении линейных и нелинейных задач с большими деформациями и углами поворота. Элемент имеет свойства линейной упругости. Из упругих материалов применимы изотропные, ортотропные и анизотропные. При решении задачи 2 использовался 2-х узловой осесимметричный КЭ SHELL 208 (рис.1, б, [7]).

Расчетные модели строились при помощи генератора сеток ПК. Задавалась длина КЭ в радиальном направлении. Число КЭ ( $N$ ) выбиралось путем сгущения сетки до получения стабильных результатов расчета, как по НДС, так и по критическим нагрузкам (рис. 2).



Рис. 2. КЭ модель конической оболочки с  $N = 768$  (а) и  $N = 3888$  (б) / Finite element model of conical shell built of  $N = 768$  (a) and  $N = 3888$  (b) elements

Численный анализ проводился при расчете оболочек заданной геометрии в широком диапазоне изменения показателя тонкостенности ( $R/h = 100 \div 2000$ ,  $R$  – радиус основания конуса,  $h$  – толщина оболочки) и угла наклона образующей к плоскости основания ( $\alpha = 0^\circ.5 \div 20^\circ$ ). Толщина оболочек –  $h = 0.4 \div 16$  мм, (рассматривались в основном оболочки с  $h = 4$  мм). Материал оболочек – сталь 30ХГСА (модуль Юнга –  $E = 2 \times 10^5$  МПа; коэффициент Пуассона –  $\nu = 0.3$ , предел текучести  $\sigma_m = 800$  МПа). Нагружение осуществлялось равномерно распределенным внешним поперечным давлением ( $q$ ). Условия закрепления основания конуса соответствовали неподвижному шарниру и заделке. Расчетная схема оболочки для случая шарнирного опирания основания приведена на рис.3, а.

**Результаты численного анализа. Задача 1.** Как отмечалось ранее, результатом решения линейной задачи является критическое давление  $q^{cr}$ , представляющее собой минимальную величину давления из спектра собственных значений линеаризованной задачи устойчивости, а также соответствующая форма выпучивания в виде регулярных вмятин и выпучин, вытянутых вдоль образующей (рис.3, б). При решении задачи на собственные значения учитывалось линейное докритическое деформирование оболочки.

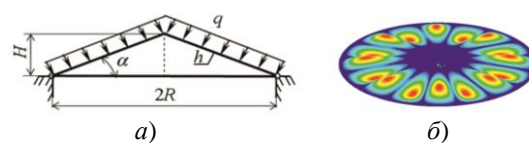


Рис. 3. Расчетная схема оболочки при шарнирном опирании основания (а) и форма потери устойчивости задачи 1 (б) / Loading schyme of the shell with hinged ends (a) and a buckling mode in problem no. 1 (b)

На рис.4 для рассматриваемых оболочек с  $R/h = 500$  во всём исследуемом диапазоне угла  $\alpha$  (рис.4, а), а также в области малых углов (рис.4, б) приведены характерные зависимости критического давления от угла  $\alpha$  « $q^{cr} - \alpha$ », для условий жесткой заделки (кривая 1) и шарнирного опирания (кривая 2) края оболочки. Следует отметить, что по мере увеличения угла  $\alpha$  на участке  $\alpha = 0-10^\circ$  значения  $q^{cr}$  увеличиваются с незначительной жесткой нелинейностью, а на участке  $\alpha = 10^\circ-20^\circ$  увеличение  $q^{cr}$  близко к линейному.

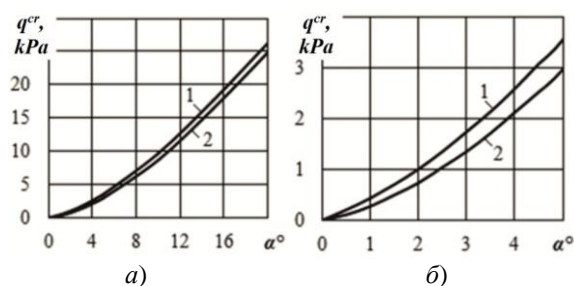


Рис. 4. Зависимости « $q^{cr} - \alpha$ » для оболочек с  $R/h = 500$  в исследуемом диапазоне изменения угла  $\alpha$  (а), а также в области малых углов (б) /

Dependences  $qcr - \alpha$  for shells with  $R/h = 500$  in the whole range of  $\alpha$  (a) and in the small angle  $\alpha$  range (b)

**Задача 2.** При решении геометрически нелинейной задачи исследовалось деформирование и выпучивание оболочки, путём построения зависимостей перемещений оболочки (прогибов), в первую очередь, ее вершины, а также отдельных точек её поверхности от величины давления  $q$ . При этом определялась величина предельного давления  $q^{lim}$ .

На рис.5 приведены зависимости перемещений вершины тонкостенного конуса ( $u_z$ ) от величины давления « $q - u_z$ » для оболочки с  $R/h = 500$  (здесь и во всех дальнейших задачах толщина оболочки  $h = 4$  мм) при шарнирном опирании края и трех различных углах наклона образующей к основанию оболочки, полученные при расчётах с использованием осесимметричного КЭ SHELL 208. Следует отметить, что контроль за перемещением вершины конуса, является достаточно показательным и легко реализуется как в эксперименте [4, 6], так и на практике.

Эти зависимости наглядно демонстрируют процесс потери устойчивости в виде осесимметричной «выворотки». При постоянном давлении, равном предельному его значению  $q^{lim}$ , происходит скачкообразный рост перемещений, вплоть до значения, которое приближается снизу к удвоенной высоте конуса (в вершине конус, как жесткий элемент не «выворачивается»). «Прощёлкивание» отмечено на приведенных зависимостях стрелкой от докритической ветви к устойчивой восходящей закритической ветви.

Здесь следует отметить, что рассматриваемая задача, решалась в статической постановке и заключалась в получении последовательных равновесных состояний оболочки. Естественно, что динамические эффекты при этом не учитывались. В реальной ситуации, если давление в процессе закритической деформации оболочки не изменяется, то «перескок» к закритическому устойчивому равновесному состоянию (восходящая закритическая ветвь) произойдёт, как отмечено стрелкой на зависимостях, приведенных на рис.5. Если, после прохождения предельной точки, внешнее давление резко снижается до нуля, то «перескок» будет осуществляться по штриховой линии (рис.5,  $\alpha = 0^\circ.5$ ).

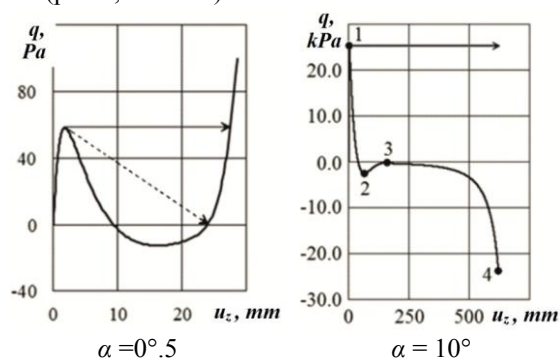


Рис. 5. Зависимости « $q - u_z$ » для вершины конической оболочки с  $R/h = 500$  / Graph of  $q - u_z$  dependence for a top of conical shell with  $R/h = 500$ : a)  $\alpha = 0.5^\circ$ , b)  $\alpha = 10^\circ$

Следует отметить, что при увеличении угла  $\alpha$  характер поведения закритической равновесной ветви изменяется, причем изменяется, в основном, характер закритического деформирования в области отрицательных давлений. Здесь кривая равновесных состояний имеет два локальных минимума (точки 2 и 4, в абсолютных величинах – максимумы): первый – в области малых перемещений вершины конуса, второй, более выраженный, – в области больших ее перемещений. Между ними отрицательное давление снижается практически до нуля, формируя тем самым локальный максимум (точка 3, в абсолютных величинах – минимум). По мере увеличения угла  $\alpha$  происходит резкое увеличение второго локального минимума. Более того, при  $\alpha \geq (7-8)^\circ$  ( $R/h = 500$ ) построить восходящую закритическую ветвь удается не всегда. Связано это с резким изломом при переходе от нисходящей ветви к восходящей (эти ветви в области излома практически параллельны). Подобрать параметры расчета (4 показателя), используя метод оптимальной длины дуги, которые одновременно позволяют успешно определить величину предельного давления  $q^{lim}$  и минимум нижней критической нагрузки, представляет исключительно трудоемкую задачу. Однако, поскольку восходящая закритическая ветвь практически вертикальна, о правильности полученного решения можно судить по величине перемещений для нисходящей ветви. Эти перемещения должны приближаться «снизу» к удвоенной высоте рассматриваемой оболочки. В то же время задача определения предельного давления  $q^{lim}$  с использованием осесимметричного КЭ SHELL 208 успешно решается во всем рассматриваемом диапазоне изменения геометрии оболочек.

На рис.6 для оболочки с  $R/h = 500$  и  $\alpha = 4^\circ$  при шарнирном опирании основания представлены формы диаметрального сечения оболочки в процессе ее деформирования на нескольких этапах (рис.6, а), а также зависимость перемещений вершины конуса от давления (рис.6, б). Очевидно, что, в докритическом состоянии, в оболочке возникают мембранные окружные и радиальные напряжения. При достижении предельной точки у края оболочки возникает радиальный осесимметричный изгиб, который в закритическом состоянии перемещается от края к центру оболочки. При этом в зависимости от формы осесимметричного равновесного состояния, наряду со сжимающими мембранными напряжениями (область близкая к вершине конуса), действуют радиальные изгибающие напряжения, а так же растягивающие напряжения вдоль радиуса, которые возникают у края оболочки. По мере закритической деформации оболочки, область радиальных сжимающих напряжений уменьшается, смещаясь к вершине конуса.

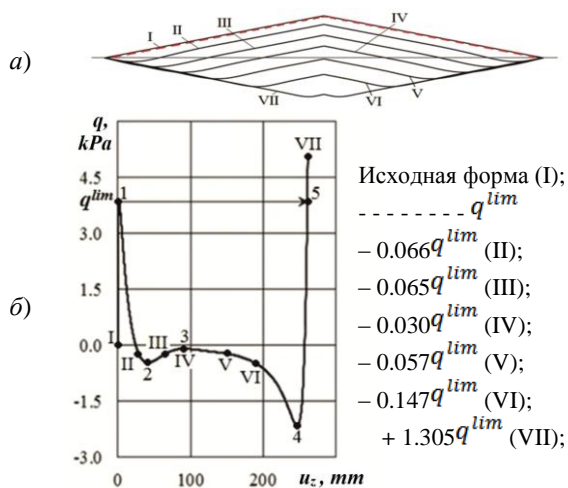


Рис. 6. Формы диаметрального сечения оболочки ( $\alpha = 4^\circ$ ) в процессе ее деформирования (а) и зависимость перемещений вершины конуса от давления (б) / Vertical cross-section of the shell with  $\alpha = 4^\circ$  in the process of deformation (a) and top displacement pressure dependence (b)

Здесь же приведены относительные значения давлений, при которых зафиксированы приведенные формы (указаны римскими цифрами). Форма, соответствующая предельному давлению (отмечена пунктиром), слабо отличается от исходной (значения прогибов меньше толщины оболочки  $h = 4$  мм). Зона максимального прогиба, являющаяся зоной максимального сжатия и кривизны оболочки, перемещается в процессе деформирования от края оболочки к ее центру. В процессе деформирования не удается достичь полной выворотки. Связано это с большой жесткостью вершины конуса, а также с условиями на краю оболочки.

Необходимо отметить резкий рост предельного давления  $q^{lim}$  по мере увеличения угла  $\alpha$ . Очевидно, что это приводит к существенному увеличению как мембранных, так и изгибных напряжений, возникающих в оболочке. В этой связи в табл.1 в точках экстремумов зависимостей « $q - u_z$ » рассматриваемых оболочек приведены значения максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу ( $\sigma_{Mis}$ ).

Таблица 1

**Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу ( $\sigma_{Mis}$ , МПа) для шарнирно опёртых оболочек с  $R/h = 500$  при различных равновесных состояниях / Maximum von Mises stress  $Mis$ [MPa] for shells with hinged ends with  $R/h = 500$  in different stability states**

№ точки	1	2	3	4	5
$\alpha = 2^\circ$	24.2	62.9	59.8	56.5	117
$\alpha = 4^\circ$	63.2	176	160	352	434
$\alpha = 10^\circ$	222	690	600	1480	-----

В таблице точкам 1 – 5 соответствуют: 1 – предельная точка; 2 – точка первого локального минимума; 3 – точка локального максимума; 4 – точка

второго локального минимума; 5 – точка на закритической восходящей ветви при величине предельного давления  $q^{lim}$ . На рис.5 эти точки нанесены на кривые рассматриваемых зависимостей « $q - u_z$ ».

Из приведенной таблицы видно, что увеличение угла  $\alpha$ , как и для предельного давления, приводит к резкому увеличению напряжений в оболочке. Причем величина максимальных эквивалентных напряжений зависит не столько от величины собственно давления  $q$ , сколько от особенностей упругого деформирования оболочки при исследуемых равновесных состояниях. Видно также, что наименьшими среди максимальных эквивалентных напряжений рассматриваемых состояний являются те, которые возникают в оболочке при достижении предельной точки, т.е. напряжения, соответствующие предельному давлению  $q^{lim}$  (точка 1). Реализуются эти напряжения у края оболочки. Для всех приведенных случаев они далеки от условного предела текучести для материала.

Наибольшие максимальные эквивалентные напряжения возникают в оболочке в состоянии «выворотки» при величине давления  $q = q^{lim}$ . Эти напряжения локализуются в окрестности вершины оболочки, величина их при больших значениях угла  $\alpha$  может существенно превышать все предельные прочностные характеристики материала.

Характер НДС оболочки на всех этапах ее деформирования является осесимметричным. О соотношении величин максимальных эквивалентных мембранных и изгибных напряжений, а также максимальных мембранных радиальных и окружных нормальных напряжений для рассматриваемых 5 равновесных НДС можно судить по величине максимальных напряжений для оболочки с  $R/h = 500$  и  $\alpha = 4^\circ$ , приведенных в табл.2. Здесь представлены максимальные напряжения: эквивалентные по Мизесу –  $\sigma_{Mis}$ ; мембранные эквивалентные по Мизесу –  $\sigma_{Mis}^m$ ; мембранные радиальные –  $\sigma_r^m$  и мембранные окружные напряжения –  $\sigma_c^m$ .

Таблица 2

**Максимальные нормальные напряжения для шарнирно опёртой оболочки с  $R/h = 500$  и  $\alpha = 4^\circ$  при различных равновесных состояниях / Maximum normal stresses for shells with hinged ends with  $R/h = 500$  and  $\alpha = 4^\circ$  in different states of equilibrium**

№ точки	1	2	3	4	5
$\sigma_{Mis}$ , МПа	63.2	176	160	352	434
$\sigma_{Mis}^m$ , МПа	41.5	50.8	45.3	112	145
$\sigma_r^m$ , МПа	-16.9	-10.6	-11.4	-70.9	-123
$\sigma_c^m$ , МПа	-46.6	-53.7	-48.7	-129	-166

В частности, из табл.2 видно, что до предельной точки в оболочке преобладают эквивалентные мембранные напряжения, величина которых составляет порядка 2/3 суммарных нормальных напряжений, из которых примерно 2/3 являются окружными напряжениями. В закритической стадии соотношение между эквивалентными мембранными и изгибными

напряжениями кардинально меняется. Здесь изгибные напряжения составляют  $2/3$  суммарных напряжений, а радиальные мембранные напряжения, составляя в начальной закритической области  $1/5$  от окружающих мембранных напряжений, по мере развития закритических деформаций выравниваются до уровня  $3/4$ .

Таким образом, на докритической стадии рассматриваемых оболочек превалируют деформации сжатия-растяжения, на закритической – изгибные, что отражает физический смысл исследуемой задачи.

### Выводы

В среде ПК ANSYS выполнено численное решение двух задач о деформировании и выпучивании при внешнем поперечном давлении упругих замкнутых пологих круговых конических оболочек: 1) линейной (бифуркационной) задачи по определению критического давления  $q^{cr}$  линейного докритического деформирования и форм потери устойчивости с использованием оболочечного четырехугольного КЭ SHELL 181 (задача 1); 2) геометрически нели-

нейной задачи осесимметричного докритического и закритического деформирования с определением предельного давления  $q^{lim}$  при использовании оболочечного осесимметричного конечного элемента SHELL 208 (задача 2). Исследования проводились для случаев неподвижных жесткой заделки и шарнирного опирания основания конуса в широком диапазоне изменения геометрии оболочек ( $100 \leq R/h \leq 2000$  и  $0^\circ.5 \leq \alpha \leq 20^\circ$ ).

Выявлены особенности геометрически нелинейного решения задачи 2, реализующие в процессе нагружения оболочки осесимметричное ее деформирование на всех этапах: до и после предельной точки, вплоть до получения «выворотки» (за исключением области вершины конуса). Успешное решение этой задачи возможно только при значениях  $\alpha < (7-8)^\circ$ , что связано со сложностью подбора исходных параметров расчета. В то же время задача определения предельного давления с использованием осесимметричного КЭ SHELL 208 ( $q_{208}^{lim}$ ) успешно решается во всем рассматриваемом диапазоне изменения геометрии оболочек.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алумяэ Н. А. Об определении состояний равновесия круговой конической оболочки при осесимметричных нагрузках / Н. А. Алумяэ // Прикладная математика и механика. – 1953. – Т. 17, № 5. – С. 23-26.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки / А. С. Вольмир – М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.
3. Григолюк Э. И. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов – М.: Наука, 1978. – 359 с.
4. Красовский В. Экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости замкнутых пологих конических оболочек при внешнем давлении / В. Красовский, Е. Прокопало, М. Варяничко // Теоретичні основи будівництва.- Дн-ськ: ПДАБтаА. – 2005. №13. –С. 175-188.
5. Шкутин Л. И. Определение критической величины давления для пологих конических оболочек / Л. И. Шкутин // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1966. – С. 849-852.
6. Шубин И. А. Экспериментальное исследование устойчивости пологих конических оболочек при статическом нагружении давлением / И. А. Шубин, Л. И. Шкутин // Прикладная механика. – 1966. – Т.2, № 6. – С. 63-70.
7. ANSYS Inc. Academic Research, Release 13.0, Help System, Mechanical Analysis Guide.
8. Karasev A. G. Initial imperfection influence on the buckling load of closed elastic isotropic shallow conical shells / A. G. Karasev // Mathematics and Mechanics of Solids – April 2016 vol. 21 no. 4 pp.444-453, doi: 10.1177/1081286514526082.

### REFERENCES

1. Alumiyaе N.A. *Ob opredelenii sostoyaniy ravnovesiya krugovoy konicheskoy obolochki pri osesimmetrichnykh nagruzkah* [To determination of stability state of circular conical shell under axisymmetric loads]. *Prikladnaya matematika i mehanika* [Applied mathematics and mechanics]. – 1953. – V. 17, № 5. – pp. 23-26. (in Russian)
2. Volmir A.S. *Gibkie plastiny i obolochki* [Flexible plates and shells]. – М.: Gostehizdat, 1956. – 419 p. (in Russian)
3. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustoychivost obolochek* [Stability of shells]. – М.: Nauka, 1978. – 359 p. (in Russian)
4. Krasovskiy V., Prokopalo E., Varyanichko M. *Eksperimentalnoe i teoreticheskoe issledovanie ustoychivosti zamknytykh pologikh konicheskikh obolochek pri vneshnem davlenii* [Experimental and theoretical study of stability of closed shallow conical shells under external pressure]. *Teoretychni osnovy budivnytstva* [Theoretical Foundations of Civil Engineering]. – Polish-Ukrainian Transactions – Dnepropetrovsk – 2005. №13. –pp. 175-188. (in Russian)
5. Shkutin L.I. *Opredelenie kriticheskoy velichinyi davleniya dlya pologikh konicheskikh obolochek* [Determination of the critical value of the pressure for shallow conical shells]. *Trudy VI Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastin* [Proceedings of the VI All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates]. – М.: Nauka, 1966. – pp. 849-852. (in Russian)
6. Shubin I.A., Shkutin L.I. *Eksperimentalnoe issledovanie ustoychivosti pologikh konicheskikh obolochek pri staticheskoy nagruzhennii davleniem* [Experimental study of the stability of shallow conical shells under static pressure loading]. *Prikladnaya mehanika* [Applied mechanics]. – 1966. – V.2, № 6. – P. 63-70. (in Russian)
7. ANSYS Inc. Academic Research, Release 13.0, Help System, Mechanical Analysis Guide.
8. Karasev A.G. Initial imperfection influence on the buckling load of closed elastic isotropic shallow conical shells. *Mathematics and Mechanics of Solids* – April 2016 vol. 21 no. 4 pp.444-453, doi: 10.1177/1081286514526082.

Статья поступила в редколлегию 02.09.2016