

УДК 624.011

**ЩОДО РОЗРАХУНКУ ЕЛЕМЕНТІВ З КЛЕСНОЇ ДЕРЕВИНИ,  
ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА СТИСК ЗІ ЗГИНОМ**

*К.т.н., професор Кліменко В.З., к.т.н. Михайловський Д.В.,  
ас. Коваленко М.С.*

*Київський національний університет будівництва і архітектури (м. Київ)*

Клесна деревина, - відносно новий конструктивний матеріал, що акумулює в собі позитивні властивості деревини цільної. З впровадженням клесної деревини з'явився цілий ряд нових великопрольотних конструкцій, як то: ферми, арки, трикутні розпірні системи тощо. Основні несучі елементи цих конструкцій працюють на стиск зі згином. Розрахунок таких елементів виконується за формулою складного опору, в якій при визначенні розрахункового згинального моменту в деформованому стані (рис. 1, а) застосовується методика, що була розроблена ще в тридцяті роки минулого сторіччя проф. Заврієвим К.С. [1]. Повний згинальний момент в цій теорії визначається за формулою:

$$M_{\bar{A}} = M_q + N \cdot f_{\bar{A}} \quad (1)$$

в якій  $f_{\bar{A}}$  знаходиться за наближеною формулою  $f_{\bar{A}} = \frac{M_q}{N_{ед} - N}$ , де  $N_{кр}$  - сила

Ейлера в елементі, що працює тільки на стиск,  $N$  - розрахункове повздовжнє зусилля в елементі.

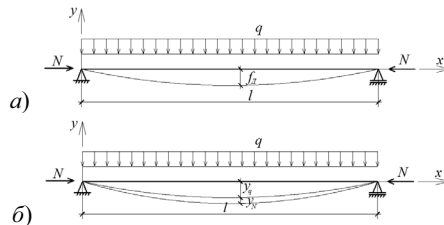


Рис. 1. Деформована схема стиснуто-згинальних стержнів

Існуюча методика адекватно відображає фізичне явище в стиснуто-згинних елементах з гнучкістю в площині згину  $\lambda \geq 55$ , коли коефіцієнт повздовжнього згину знаходиться на параболі Ейлера на графіку  $\lambda - \varphi$  коли  $\varphi = 3000/\lambda^2 < 1$ .

Для елементів з  $\lambda < 55$  коефіцієнт знаходиться на емпіричній кривій Енгессера-Кармана і не буває більше одиниці. В діапазоні гнучкостей елементів  $20 \leq \lambda \leq 55$ , що звичайні для сучасних стиснуто-згинних елементів з клесної деревини. Теорія крайових напружень перестав адекватно відображати фізичне явище. Добрий результат розрахунку подібних елементів за формулою

$M_A = M/\xi$ , в якій коефіцієнт  $\xi$  непрямо враховує деформовану схему досягається завдяки математичній структурі формули  $\xi = 1 - N/(\varphi \cdot A \cdot R_c)$ .

В ній суттєво нівелюється значення коефіцієнту  $\varphi$  в широкому діапазоні його величин. Ця обставина відмічена в [2, 3] і зроблено висновок, що випадкове співпадіння розрахунків для елементів з  $\lambda \leq 55$  не може бути обґрунтуванням методики розрахунку. Для таких стиснуто-згинних елементів коефіцієнт повздовжнього згину становиться більше одиниці, що протирічить природі стійкості стиснутого елемента. В [4] викладені пропозиції щодо заміни існуючої методики розрахунку стиснуто-згинних елементів.

Слід зазначити, що в 30-х роках минулого сторіччя вже існувало точне рішення задачі визначення дійсного згинального моменту в стиснуто-згинних елементах [5], отримане в результаті інтегрування диференційного рівняння кривизни елемента в деформованому стані.

Розрахункові формули для визначення згинального моменту та прогину в точному методі мають наступний вигляд:

$$\dot{M}_{\text{д}} = M_0 = \frac{q \cdot l^2}{u^2} \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right), \quad (2)$$

$$f_{\text{д}} = \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I \cdot u^4} \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{u}{2}} - 1 - \frac{u^2}{8} \right), \quad (3)$$

де параметр  $u = \sqrt{\frac{N}{E \cdot I}} \cdot l$ .

В цих формулах, як і в існуючій методиці завуальовано кількісне визначення складових згинального моменту  $M_{\text{д}}$  і прогину  $f_{\text{д}}$  від впливу повздовжнього зусилля  $N$  на кривизну елемента від поперечного навантаження  $q$ . Це погляд на розрахункові формули (2) і (3) авторів з методологічної позиції, як викладачів вищої школи. Формули (2) і (3) не дозволяють виконувати кількісно чисельний аналіз напружено-деформованому стану в порівнянні розрахункових схем  $a, b$  на рис. 1.

Звісно, для інженерних розрахунків краще користуватись точною методикою розрахунку стиснуто-згинних елементів. Існуюча методика, до якої є серйозна методологічна претензія в зв'язку з появою коефіцієнта  $\varphi \gg 1$ , для елементів з  $\lambda \leq 55$  дає зайвий необов'язковий запас міцності, порівняно з точною методикою.

Стиснуто-згинні елементи складають широкий клас будівельних конструкцій. В навчальному процесі цікавим виявляється виконання студентами наукових досліджень в рамках курсового та дипломного проектування з чисельним аналізом таких елементів. Для отримання необхідного для цього математичного апарату розроблена спеціальна методика. Суть її в наступному.

З опору матеріалів відомо, що прогин балки  $y$  (рис. 1, б) в стані статичної рівноваги елемента визначається з диференційного рівняння:

$$d^2 y / dx^2 = -M_x / EI . \quad (4)$$

Таким чином рівняння деформованої осі стержня визначається як другий інтеграл виразу рівняння згинального моменту по  $x$ , поділеному на  $EI$  з зворотнім знаком.

$$y_{(x)} = - \iint \frac{M(x)}{EI} dx^2 . \quad (5)$$

В загальному випадку рівняння згинального моменту з урахуванням деформованої схеми набуває вигляду:

$$M_{(x)} = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} + N \cdot y_{(x)} . \quad (6)$$

Як бачимо з формули (6), для вирішення диференційного рівняння (4) слід попередньо задатись рівнянням кривої деформованої осі. В [6, 7] запропоновано в якості кривої деформованої осі застосовувати тригонометричний ряд Фур'є (7), що повинен задовольняти крайовим умовам.

$$y_{(x)} = f_1 \sin \pi x / l + f_2 \sin 2\pi x / l + f_3 \sin 3\pi x / l + \dots \quad (7)$$

Враховуючи той факт, що при симетричному навантаженні перший член ряду дає точність, рівну 95-97%, можна обмежитися тільки ним.

Підставивши рівняння (7) в (6) і двічі проінтегрувавши (5), одержуємо рівняння деформованої осі елемента в загальному вигляді:

$$y_{(x)} = - \frac{1}{EI} \left( \frac{q \cdot L}{2} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^4}{12} - N \cdot f_1 \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) + C_1 \cdot x + C_2 \right) \quad (8)$$

Підставивши в рівняння (8) крайові умови для розрахункової схеми (рис. 1) знаходимо постійні інтегрування. Остаточо рівняння деформованої осі елемента набуває вигляду:

$$y_{(x)} = - \frac{q \cdot L \cdot x^3}{12 \cdot EI} + \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot EI} + \frac{q \cdot L^3}{24 \cdot EI} \cdot x + \frac{N}{EI} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \left( \frac{-5 \cdot q \cdot L^4}{384} \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \quad (9)$$

З (9) розрахунковий прогин в середині прольоту елемента дорівнює

$$y = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EI} + \frac{N}{EI} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \left( \frac{-5 \cdot q \cdot L^4}{384} \right) \cdot \left( \frac{N \cdot L^2}{\pi^2} - EI \right) . \quad (10)$$

Підставивши рівняння (9) в (6) отримаємо рівняння для визначення дійсного згинального моменту в будь якому перерізі по довжині стиснуто-згинного елемента:

$$M_{(x)} = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{q}{2} x^2 - \frac{N \cdot q \cdot L \cdot x^3}{12 \cdot EI} + \frac{N \cdot q \cdot x^4}{24 \cdot EI} + \frac{N \cdot q \cdot L^3}{24 \cdot EI} \cdot x + \frac{N^2}{EI} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \left( \frac{-5 \cdot q \cdot L^4}{384} \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (11)$$

Максимальний розрахунковий момент знаходиться в середині прольоту елемента. Підставивши потрібну координату перерізу і виконавши певні математичні перетворення одержуємо формулу для визначення дійсного розрахункового моменту в стиснуто-згинному елементі з урахуванням деформованої схеми:

$$M_{\text{дйс}} = \frac{q \cdot L^2}{8} + \frac{5 \cdot N \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EI} + \frac{N^2}{EI} \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \left( \frac{-5 \cdot q \cdot L^4}{384} \right) \quad (12)$$

Для спрощення розрахункових формул (10), (12) замінюємо складові рівняння для визначення згинального моменту та прогину в балці на двох опорах під дією тільки рівномірно розподіленого навантаження та параметр  $U$  (13). Остаточню одержуємо запис для визначення розрахункового згинального моменту (14) та прогину (15).

$$M_q = \frac{q \cdot L^2}{8}; f_q = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot EI}; U = N \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \quad (13)$$

$$M_{\text{дйс}} = M_q + N \cdot f_q + N \cdot U \cdot \left( \frac{-f_q}{U - EI} \right) \quad (14)$$

$$y = f_q + U \cdot \left( \frac{-f_q}{U - EI} \right) \quad (15)$$

Одержані формули (14), (15) дещо складніші за формули наведені в СНиП II-25-80 [8], але вони більш точно передають фізичне явище, яке відбувається в елементах, що працюють на стиск зі згином. З методологічної точки зору запропонована методика краща з позиції викладачів вищої школи.

Для порівняння запропонованої методики визначення розрахункового згинального моменту з іншими були проведено чисельні дослідження, що стосувались визначенню розрахункового згинального моменту та крайового напруження в панелях верхніх поясів ферм. Для можливості співставлення результатів загальна геометрія ферм і навантаження прийняті однаковими. Змінювався лише тип решітки ферм, а відповідно довжини елементів верхнього поясу. Елементом задавались фізико-механічні характеристики згідно СНиП II-25-80: розрахунковий опір на згин –  $R_{зг} = R_c = 15$  МПа (для деревини 2-го сорту); модуль пружності вздовж волокон  $E = 10000$  МПа.

Порівнювались чотири методики визначення розрахункового згинального моменту з урахуванням деформованої осі елементів верхнього поясу:

I. Методика СНиП II-25-80:  $M_{дiсд} = M_A = M_q / \xi$ , (16)

II. Наближена методика  $M_{дiсд} = M_q + N \cdot f_q$ , (17)

де  $f_q$  – прогин елемента від дії рівномірно розподіленого поперечного навантаження.

III. Точна методика – формула (2),

IV. Запропонована методика – формула (14).

Виявлено повну збіжність результатів за точною методикою III з запропонованою - IV. Результати чисельних досліджень представлено у вигляді графіку залежності додаткового згинального моменту  $M_{доd}$  від прольоту панелі верхнього поясу (рис. 2). Додатковий момент  $M_{доd}$  визначався як різниця розрахункового моменту  $M_{розр}$  та моменту тільки від поперечного рівномірно розподіленого навантаження без врахування деформованої схеми  $M_q$ .

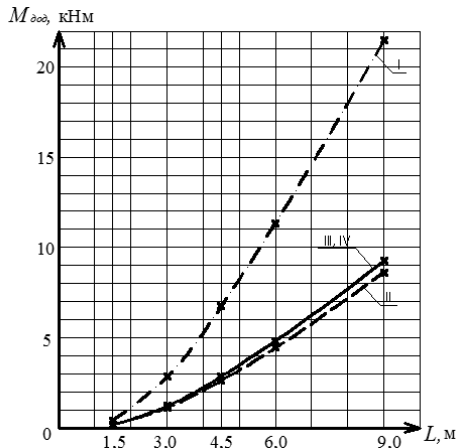


Рис. 2. Графік залежності додаткового згинального моменту від прольоту панелі верхнього поясу

З графіку чітко простежується суттєве збільшення додаткового згинального моменту зі збільшенням довжини елементів. Також можна пробачити, що непогана збіжність всіх чотирьох представлених методик відбувається лише при незначних прольотах (до 2-х метрів), а відповідно і гнучкостях  $\lambda \geq 55$ . Зі збільшенням прольоту стиснуто-зігнутого елемента різниця між наближеною методикою СНиП II-25-80 та іншими, більш точними методиками, стає все більшою. Це ще раз підтверджує думку про те, що не завжди формальний перенос вдалої методики розрахунку елементів конструкцій з суцільної деревини на елементи конструкцій з клеєної деревини без ретельного обґрунтування стає еволюційним кроком [9]. А саме це відбулось з методикою розрахунку крупнопанельних конструкцій з клеєної деревини елементи яких працюють на стиск зі згином.