УДК 625.717.2

# РАСЧЕТ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ОБОБЩЕННЫМ ПРОЕКЦИОННО–СЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ

***доц. Машков И.Л.***
*Национальный авиационный университет, Киев*

**Постановка проблемы.** Разработки эффективных моделей и методов расчета конструкций сложной формы в различных областях строительства и машиностроения приводят к необходимости дальнейших исследований в направлении развития приближенных методов расчета тел разнообразных форм, имеющих сложный характер области, характеризующихся различными соотношениями между компонентами и широко применяемых в строительстве, самолетостроении и т.д. Стремление к более точному решению задач неизбежно приводит к большому числу неизвестных и, как следствие, к системам уравнений высокого порядка со значительными погрешностями в процессе решения. В этой связи целесообразным представляется развитие обобщенного проекционно-сеточного метода в качестве контрольного для МКЭ и других методов, а также для получения в ряде задач более точных результатов вычислений и экономии времени затрачиваемого для их решения [2].

**Цель работы.** В работе разработаны основные положения обобщенного проекционно-сеточного метода применительно к общему случаю смешанной граничной осесимметричной задачи определения напряженно-деформированного состояния тела вращения сложной формы в цилиндрической системе координат.

Процесс реализации обобщенного проекционно-сеточного метода может быть разделен на следующие этапы:

– формирование граничной задачи, соотношений между компонентами напряженно-деформированного состояния, уравнений равновесия, граничных условий, анализ и математическое моделирование формы заданного тела вращения;

– составление сеточных операторов метода в зависимости от конфигурации и размеров подобласти, положения узла, играющего роль основного и граничных условий на той части границы всей области, которая совпадает с границей рассматриваемой подобласти;

– запись соответствующего оператора для очередного рассматриваемого узла с учетом принятой общей нумерации узлов; при этом формируется разрешающая система линейных алгебраических уравнений;

– решение разрешающей системы и вычисление узловых значений компонентов напряженно-деформированного состояния.

Из рассмотренных этапов реализации обобщенного проекционно-сеточного метода наиболее трудоемким является этап составления сеточных операторов. Метод представляет собой дискретную форму метода определяющих состояний [1], основанную на применении финитных функций [4]. В качестве неизвестных разыскиваются значения искомых компонентов вектора смещения в выбранных узлах области $\Omega$. В общем случае область имеет форму клина, который определяется углом $\varphi$. В случае осесимметричной задачи рассматривается область с углом $\varphi = 1$, так как все параметры задачи не зависят от угла $\varphi$.

При формировании основных положений обобщенного проекционно-сеточного метода [3] применительно к случаю осесимметричной задачи определения напряженно-деформированного состояния тел вращения сложной формы принято, что в заданной области $\Omega$ выбрано общее число $N$ узлов. Значения искомых функций перемещений $u$, $w$ неизвестны соответственно в $N_u$ и $N_w$ узлах. Для каждого i-го узла выделяется подобласть $\Omega_i$, которой принадлежит $N_i$ из принятого набора $N$ узлов, в том числе i-ый узел. Этот узел является основным и может находиться как внутри, так и на границе подобласти [2]. Подобласти могут пересекаться, т.е. узел, принадлежащий одной подобласти, одновременно может быть граничным или внутренним узлом другой подобласти. Общее число неизвестных $n = \sum_{i=1}^{N_u} N_i^{(u)} + \sum_{i=1}^{N_w} N_i^{(w)}$. Каждая из подобластей может быть отнесена к тому или иному типу в соответствии с ее формой, числом узлов, размерами.

Для определения неизвестных значений функций необходимо составить и решить систему $n$ линейных алгебраических уравнений. Каждое из таких уравнений соответствует определенному типу конечного элемента, который характеризуется в данном случае формой подобласти, системой узлов, положением основного узла, определяющим состоянием и строится в соответствии с разработанным алгоритмом метода [3]. Во многих случаях оказывается достаточным применение подобласти с девятью узлами в форме прямоугольника и девятиузловой подобласти с двумя криволинейными границами [3]. Такими подобластями представляется возможным аппроксимировать с заданной точностью практически любую область.

Для i-го конечного элемента ($i=1,2,\ldots, N$), занимающего область $\Omega_i$ с границей $S_i$ можно записать интегральное соотношение теоремы о взаимности работ [5]

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_i}(R'u + Z'w)d\Omega + \int_{S_i}(\overline{R'}u + \overline{Z'}w)dS = \\ &= \int_{\Omega_i}(Ru' + Zw')d\Omega + \int_{S_i}(\overline{R}u' + \overline{Z}w')dS,\end{aligned} \tag{1}$$

где штрихом обозначены компоненты некоторого вспомогательного, без штрихов – искомого состояний.

Систему линейных алгебраических уравнений метода можно представить в виде:

$$\mathrm{T}\times \mathrm{E} = \mathrm{M}, \tag{2}$$

где T – матрица коэффициентов,

E – матрица узловых перемещений,

M – матрицы правых частей уравнений.

Матрицы Е и М представлены в виде матриц-столбцов:

$$E = \left[u_1, w_1, ..., u_n, w_n\right]^T; \; M = \left[m_{1u}, m_{1w}, ..., m_{nu}, m_{nw}\right]^T. \tag{3}$$

В рассматриваемом классе задач в узлах сетки имеем по два неизвестных перемещения. Поэтому для каждого узла строим по два определяющих состояния с применением финитных функций [4]. Так как каждая строка матрицы коэффициентов соответствует определенному узлу, принимаемому в качестве основного и типу неизвестного, характеризуемого соответствующим состоянием, в обозначения коэффициентов при неизвестных введем соответствующую индексацию. В общем виде эти коэффициенты можно представить как $T_{nx}^{(t)}$, где $t$ – показатель перемещения, при котором находится данный коэффициент, $n$ – номер основного узла, $x$ – вид определяющего состояния:

$$\begin{bmatrix} T_{nu}^{(u_i)} \\ T_{nu}^{(w_i)} \\ T_{nw}^{(u_i)} \\ T_{nw}^{(w_i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_{nui} & \overline{R}'_{nui} & \overline{R}'_{nui} \\ Z'_{nui} & \overline{Z}'_{nui} & \overline{Z}'_{nui} \\ R'_{nwi} & \overline{R}'_{nwi} & \overline{R}'_{nwi} \\ Z'_{nwi} & \overline{Z}'_{nwi} & \overline{Z}'_{nwi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} D \\ G \\ L \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Каждая строка в матрице коэффициентов соответствует одному из узлов, рассматриваемых в качестве основного и одному из двух определяющих состояний для каждого основного узла.

Значения $R'_{nui}$, $\overline{R}'_{nui}$, и $Z'_{nui}$, $\overline{Z}'_{nui}$ определяются из уравнений равновесия и граничных условий путем подстановки в них соответствующих определяющих состояний для каждого основного узла.

Компоненты искомого состояния в тех узлах, где они не заданы условиями задачи, выражаются через перемещения в узлах конечного элемента.

Компоненты матрицы М можно представить в виде значений искомого состояния $R_n, \overline{R}_n, Z_n, \overline{Z}_n$ с соответствующими коэффициентами [3].

Интегралы, входящие в выражение (1) могут быть представлены в виде:

$$\int_{\Omega_i} R'ud\Omega \approx \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} d_j R'_j \, u_j; \qquad \int_{\Omega_i} Z'wd\Omega \approx \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} d_j Z'_j \, w_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{5}$$

$$\int_{S_i} \overline{Z}w'dS \approx \sum_{j=1}^{N_{is}^{(u)}} g_j \overline{Z}_j w'_j \; .$$

Коэффициенты $d_j$ можно представить выражением

$$d_j = \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} P_j^{(mt)} K_{mt}, \qquad (6)$$

где $P_j^{(mt)} = \beta_i A_m A_t$ .

Значения коэффициентов $K_{mt}$ в общем виде можно определить по следующей зависимости:

$$K_{mt} = \frac{1}{m+2}\Big[\sum_{p=1}^{2m+5} \frac{c}{p+t} B_1\left(Z_3^{(p+t)} - Z_1^{(p+t)}\right) + \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{l}{k+t+2} B_2\left(Z_3^{(k+t+2)} - Z_1^{(k+t+2)}\right) + \\ + \frac{3m(m-1)}{t+5} B_3\left(Z_3^{(t+5)} - Z_1^{(t+5)}\right)\Big], \qquad (7)$$

$m=0,1,2;\ t=0,1,2.$

Выражения для коэффициентов $B_1$ и $B_2$ получены из предположения, что криволинейная граница рассматриваемой подобласти аппроксимируется параболой [3]. Структура выражений для $K_{mt}$ зависит от характера области, числа и расположения узлов.

В ходе разработки алгоритма метода в приложении к расчету тел вращения сложной формы получены выражения для компонентов, входящих в формулу (6), а также компоненты формулы приближенного интегрирования по поверхности для криволинейного участка границы с произвольно расположенным средним узлом.

В рассматриваемом классе задач в узлах выбранной сетки имеем по два неизвестных перемещения *u* и *w*. Поэтому для каждого узла с неизвестными перемещениями *u* и *w* строим по два определяющих состояния с перемещениями, равными попеременно единице для одного из неизвестных перемещений в основном узле и нулю для остальных узлов и другого перемещения.

Пользуясь выражениями (5) и вычислив значения всех компонентов определяющего состояния в узлах области $\Omega_i$ интегральное соотношение (1) можно представить в виде:

$$A_u(u,w) = \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} (\alpha_{uj} u_j + \alpha_{wj} w_j) + \sum_{j=1}^{N_{is}^{(u)}} \beta_{Rj} \overline{R_j} = \sum_{j=1}^{N_i^{(u)}} d_j R_j u'_{ij}, \qquad (8)$$

где: $\alpha_{uj} = d_j R'_{ij} + g_j \overline{R'_{ij}}; \alpha_{wj} = d_j Z'_{ij} + g_j \overline{Z'_{ij}}, j = 1,2,\ldots, N_{is}^{(u)};$

$$\alpha_{uj} = d_j R_{ij}^{'}; \alpha_{wj} = d_j Z_{ij}^{'}; j = N_{is}^{(u)} + 1, N_{is}^{(u)} + 2, ..., N_i^{(u)};$$

$$\beta_{Rj} = -g_j u_{ij}^{'}, j = 1, 2, ..., N_{is}^{(u)}.$$

Выражение (8) является записью в общем виде дискретного оператора метода, соответствующего выбранному типу конечного элемента и применяемым формулам приближенного интегрирования. В оператор (8) подставляются все заданные условиями величины компонентов искомого состояния в узлах. Компоненты искомого состояния в тех узлах, где они не заданы условиями задачи, выражаются через перемещения в узлах конечного элемента.

Изложенная последовательность действий реализуется для всех выбранных типов конечных элементов. В результате, в общем случае, получаем полную разрешающую систему уравнений для определения перемещений в выбранных узлах.

**Выводы.** В процессе развития обобщенного проекционно-сеточного метода применительно к расчету тел вращения сложной формы получены следующие результаты:

– для девятиузловой подобласти с двумя криволинейными границами построена аппроксимирующая функция, выражаемая степенным многочленом;

– разработан алгоритм построения определяющих состояний и формул приближенного интегрирования для подобластей данного типа;

– метод развит применительно к расчету тел вращения сложной формы, находящихся под осесимметричной нагрузкой.

Характерной особенностью метода является его общность и оптимальная трудоемкость реализации при определении основных компонентов напряженно-деформированного состояния конструкции. Выполненный анализ особенностей метода определяющих состояний позволяет сделать вывод о целесообразности его развития в дискретной форме применительно к решению сложных граничных задач.

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лисицин Б.М. Об одном методе решения задач теории упругости //Прикл. механика.–1967. №4. – С.87-92.
2. Лисицин Б.М. Об одном варианте проекционно-сеточного метода для решения задач механики деформированного твердого тела //Прикл. механика.–1987. №11.–С.62-71.
3. Лисицин Б.М., Машков И.Л. Развитие обобщенного проекционно-сеточного метода применительно к решению осесимметричных задач теории упругости //Сопротивление материалов и теория сооружений.–1988. Вып.52.–С.59-63.
4. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы.–М.: Наука, 1981.–416 с.
5. Новожилов В.В. Теория упругости.–Л.:Судпромгиз, 1958.–370 с.