УДК 624.131.542

ДО РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПЕРЕМІЩЕННЯ ҐРУНТОВОЇ ТОВЩІ ЗАГЛИБИНОЮ У ПРОЦЕСІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ

МОСІЧЕВА І. І.[1], *старший викладач*
НЕСТЕРОВА О. В.[2], *к. т. н., доц.*
ШАПОВАЛ В. Г.[3], *д.т.н., проф.*

[1] Кафедра основ і фундаментів, Державний вищий навчальний заклад "Одеська державна академія будівництва та архітектури", вул. Дідрихсона, 4, 65029, Одеса: Україна +38 (067) 486-73-30, e-mail: imosicheva@gmail.com, ORCIDID:0000-0002-2816-3675.
[2] Кафедра водопостачання, водовідведення та гідравліки, Державний вищий навчальний заклад "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпро, Україна, тел. +38 (0562) 756-34-74, e-mail: helena2010_10@mail.ru, ORCIDID:0000-0003-1035-6572.
[3] Кафедра будівництва, геотехніки і геомеханіки Національний гірничий університет, проспект Дмитра Яворницького, 19, 49600, Дніпро,Україна, тел.+380954718192, e-mail: shap-ww@mail.ru, ORCIDID 0000-0003-4826-8463

Анотація. ***Постановка проблеми.*** Існуючі в даний час методи визначення осідань водонасичених грантових основ здійснюються з використанням тих чи інших чисельних методів. У цьому випадку мають місце проблеми верифікації моделі (адекватна розбивка розрахункової області на елементи, крок інтегрування за часом і т.д.), а також проблеми розрахунку осідань областей з необмеженими розмірами. Крім того, рішення задач, що мають більш-менш істотну практичну цінність або пов'язане зі значними витратами, або взагалі неможливо. **Висновок.** Вперше отримано асимптотичне подання рішення задачі про переміщення ґрунтової товщі за глибиною у процесі фільтраційної консолідації в рамках моделі пружного водонасиченого півпростору, до верхньої межі якого прикладена вертикальна зосереджена сила. Дане рішення є фундаментальним при вирішенні задач про розподіл напружень за глибиною ґрунтової товщі, до поверхні якої прикладена довільно розподілене навантаження.

Ключові слова: фільтраційна консолідація, вертикальні переміщення, поровий тиск, асимптотичне уявлення рішення, аналітичне рішення.

BY THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF SOIL DISPLACEMENTS ON THE DEPTH IN THE PROCESS OF FILTRATION CONSOLIDATION

MOSCHEVA I. I.[1], *senior lecturer*
NESTEROVA E.V.[2], *Ph.D.,As. Prof.*
SHAPOVAL V.G[3]. *dr. prof.*
[1] Department of bases and foundations, State higher educational institution "Odessa state Academy of construction and architecture", vul. Adriana, 4, 65029, Odessa, Ukraine +38 (067) 486-73-30, e-mail: imosicheva@gmail.com, ORCIDID:0000-0002-2816-3675
[2] Department of water-supply, water- diversion and hydraulics, State higher educational establishment the "Pridneprovskaya state academy of building and architecture", street of Chernyshevskogo, 24-a, 49600, Dnepr, Ukraine, bodies. +38 (0562) 756-34-74, e-mail: helena2010_10@mail.ru, ORCID ID:0000-0003-1035-6572
[3] Dept. of construction, geotechnics and geomechanics, National Mining University, prospect Dmytro Yavornytsky, 19, Dnepr, Ukraine, bodies. .+380954718192, e-mail: shap-ww@mail.ru,

Abstract. ***Statement of the problem.*** Currently existing methods of determining water-saturated sediment of the ground of the foundations are carried out using various numerical methods . In this case, there are problems of model verification (adequate breakdown of the computational domain into elements, the step of time integration, etc.), as well as the problem of calculation of the residue regions of unlimited size. In addition, the tasks which have significant practical value or too expensive, or impossible. ***Conclusions.***It was obtained first time an asymptotic representation of the solution of the problem of soil displacements on the depth in the process of filtration consolidation, according to the model of water-saturated elastic half-space, to the upper limit of which is attached a vertical concentrated force. This solution is fundamental in solving the problems of the stress distribution on the depth of soil to the surface of which is applied an arbitrary distributed load.

Keywords: filtration consolidation, vertical displacements, pore pressure, asymptotic representation of the solution, analytical solution

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ПОЧВЕННОЙ ТОЛЩИ ПО ГЛУБИНЕ В ПРОЦЕССЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

МОСИЧЕВА И.И.[1], *старший преподаватель*
НЕСТЕРОВА А.В.[2], *к. т. н., доц.*
ШАПОВАЛ В.Г.[3], *д.т.н., проф.*

[1] Кафедра оснований и фундаментов, Государственное высшее учебное заведение "Одесская государственная академия строительства и архитектуры", вул. Дідрихсона, 4, 65029, Одесса: Украина +38 (067) 486-73-30, e-mail: imosicheva@gmail.com, ORCIDID:0000-0002-2816-3675
[2] Кафедра водоснабжения, водоотведения и гидравлики, Государственное высшее учебное заведение "Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры", вул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепр, Украина, тел. +38 (0562) 756-34-74, e-mail: helena2010_10@mail.ru, ORCIDID:0000-0003-1035-6572
[3] Кафедра строительства, геотехники и геомеханики, Национальный горный университет, проспект Дмитрия Яворницкого, 19, 49600, Днепр, Украина, тел.+380954718192, e-mail: shap-ww@mail.ru,

Аннотация. Постановка проблемы. Существующие в настоящее время методы определения осадок водонасыщенных грантовых основ осуществляются с использованием тех или иных численных методов. В этом случае имеют место проблемы верификации модели (адекватная разбивка расчетной области на элементы, шаг интегрирования по времени и т.д.), а также проблемы расчета осадок областей с неограниченными размерами. Кроме того, решение задач, имеющих более-менее существенную практическую ценность или связано со значительными затратами, или вообще невозможно. **Вывод.** Впервые получено асимптотическое представление решения задачи о перемещении почвенной толщи по глубине в процессе фильтрационной консолидации в рамках модели упругого водонасиченого полупространства, к верхней границе которого приложена вертикальная сосредоточенная сила. Данное решение является фундаментальным при решении задач о распределении напряжений по глубине грунтовой толщи, к поверхности которого приложена произвольно распределенная нагрузка.

Ключевые слова: фильтрационная консолидация, вертикальные перемещения, поровое давление, асимптотическое представление решения, аналитическое решение.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими практичними завданнями.

Існуючі в даний час методи визначення осідань водонасичених грантових основ здійснюються з використанням тих чи інших чисельних методів [1, 2]. У цьому випадку мають місце проблеми верифікації моделі (адекватна розбивка розрахункової області на елементи, крок інтегрування за часом і т.д.), а також проблеми розрахунку осідань областей з необмеженими розмірами. Крім того, рішення задач, що мають більш-менш істотну практичну цінність або пов'язане зі значними витратами, або взагалі неможливо.

Відомі рішення базуються на припущенні про те, що основа знаходиться в стані компресії [3, 4], або при розрахунку осідання з шаруватою текстурою використовуються наведені властивості [5, 6], а, як правило, реальний напружено-деформований стан ґрунтових основ відрізняється від компресії. Тому викладений в роботах [3, 4] підхід має обмежене застосування.

Визначення осідань основи з використанням усереднених характеристик також викликає заперечення, оскільки в даному випадку в недостатній мірі враховуються умови на контакті ґрунтових шарів

У зв'язку з цим представляють інтерес методи розрахунку процесу розвитку в часі осідань, аналогічні загальновідомому методу пошарового підсумовування [7].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття.

Одним з варіантів реалізації цього підходу є розрахунок осідань $S_i(\infty)$ для кожного елементарного i - того грунтового шару за методикою [7] для моменту часу $t \to \infty$ і далі – визначення осідання у поточний момент часу t як добуток $S_i(\infty)$ на ступінь консолідації даного елементарного шару $U_i(t)$, який відповідає розрахунковому моменту часу, тобто нами пропонується для розрахунку поточних осідань використовувати формули виду:

$$\left.\begin{aligned} S(t) &= \sum_{i=1}^{n} S_{\infty,i} \cdot U_i(t); \\ S_{\infty,i} &= \beta \cdot \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{z\gamma,i}}{E_i} \cdot h_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{z\gamma,i}}{E_{e,i}} \cdot h_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{zp,i}}{E_i} \cdot h_i \right); \\ U_i(t) &= \frac{S_i(t)}{S_{\infty,i}}. \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $S(t)$ – среднє осідання основи в розрахунковий момент часу t; $S_i(t)$ – те ж саме, елементарного i - того грунтового шару в розрахунковий момент часу t; $S_{\infty,i}$ – те ж саме, елементарного i - того шару при $t \to \infty$; $U_i(t)$ – ступінь консолідації i -того шару в розрахунковий момент часу t; $\beta = 0{,}8$ – емпіричний коефіцієнт; $\sigma_{zp,i}$ – нормальна вертикальне напруга в центрі i - того елементарного шару завтовшки h_i, обумовлене навантаженням від фундаменту; $\sigma_{z\gamma,i}$ – те ж саме, обумовлене вагою віддаленого з котловану грунту; n – кількість шарів, на які розбита товща, що стискається; E_i – модуль загальної деформації основи, встановлений по гілці первинного завантаження основи; $E_{e,i}$ – те ж саме, встановлений по гілці вторинного завантаження [7].

Для визначення ступеня консолідації ґрунтових шарів необхідно знати залежності осідання основи від часу на різній глибині. На вирішення цього завдання і спрямовані викладені в цій статті дослідження.

Основний матеріал дослідження. Розглянемо водонасичений напівпростір, до верхньої межі якого прикладена зосереджена сила P (рис. 1).

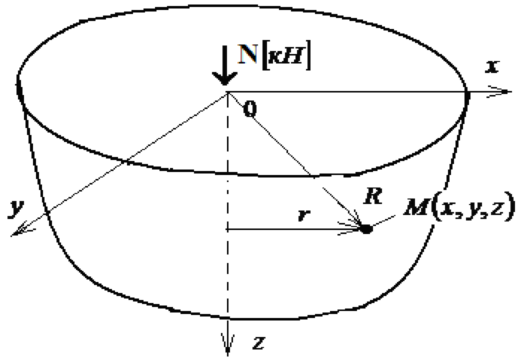

Рис. 1 До розрахунку НДС водонасиченого на півпростору / Calculation of stress-strain state of half-saturated

Для вирішення задачі використовуємо викладений в [8] алгоритм. На першому етапі знайдемо НДС півпростору в момент часу $t = 0$. Згідго [8] в цьому випадку слід використовувати модель ґрунтової основи у вигляді пружного ізотропного середовища [9] і покласти пружну константу Ламе $\lambda \to \infty$. Визначення напружено-деформованого стану основи в даному випадку зводиться до вирішення системи рівнянь виду:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^2 F_0 = 0; U_0 = -\dfrac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_0; W_0 = \Delta F_0 - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} F_0; \\ \sigma_{zz,0} = G \cdot \dfrac{\partial}{\partial z} \cdot \left(3 \cdot \Delta F_0 - 2 \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} F_0\right); \sigma_{rr,0} = G \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial z} \Delta F_0 - 2 \cdot \dfrac{\partial^3}{\partial r^2 \partial z} F_0\right); \\ \sigma_{\theta\theta,0} = G \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial z} \Delta F_0 - 2 \cdot \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_0\right); \tau_{rz,0} = G \cdot \dfrac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\Delta F_0 - 2 \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} F_0\right); \\ \sigma_{kk,0} = 3 \cdot G \cdot \dfrac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta F_0; P_0 = -\dfrac{1}{3} \cdot \sigma_{kk,0} = -G \cdot \dfrac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta F_0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

при граничних умовах:

$$\left.\begin{array}{c}\sigma_{zz,0}(r,z) = -\dfrac{N \cdot \delta(r)}{2 \cdot \pi \cdot r}; \tau_{rz,0}(r,z) = 0; \\ W(\infty, z) = U(\infty, z) = 0; \\ W(r, \infty) = U(r, \infty) = 0; \end{array}\right\}, \quad (3)$$

де F – бігармонічна функція; Δ оператор Лапласа в циліндричній системі координат; U_0 и W_0 – радіальне і вертикальне переміщення; $\sigma_{zz,0}, \sigma_{rr,0}$ и $\sigma_{\theta\theta,0}$ – відповідно, вертикальне, радіальне и тангенціальне нормальні переміщення; $\tau_{rz,0}$ – те ж саме, дотичне; P_0 – поровий тиск; r, z – координати; $\delta(r)$ – Дельта – функція Дірака [10].

Рішення шукаємо у виді:

$$F_0 = \int_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[A_0(\alpha) + \alpha \cdot z \cdot B_0(\alpha)\right] \cdot exp(-\alpha \cdot z) \cdot \alpha \cdot d\alpha \quad (4)$$

де $J_0(x)$ – функція Бесселя першого роду з нульовим індексом [10]; $A_0(\alpha)$ и $B_0(\alpha)$ – деякі функції параметра α, які слід визначати шляхом задоволення граничним умовам (3).

Осідання основи S_0 в будь-якій довільній точці М (рис. 1) і поровий тиск P_0 у момент часу $t \to 0$ в даному випадку дорівнюють:

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = -\dfrac{N}{4 \cdot \pi \cdot G} \cdot \displaystyle\int_0^\infty (1 + \alpha \cdot z) \cdot exp(-\alpha \cdot z) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \\ P_0 = \dfrac{N}{2 \cdot \pi} \cdot \displaystyle\int_0^\infty \alpha \cdot exp(-\alpha \cdot z) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha; \end{array}\right\} \quad (5)$$

Далі знайдемо осідання основи для моменту часу $t \to \infty$. Згідно [8] в цьому випадку слід використовувати модель ґрунтової основи у вигляді пружного ізотропного середовища [9]. Визначення напружено-деформованого стану основи в даному випадку зводиться до вирішення системи рівнянь виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^2 F_\infty = 0; U_\infty = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_\infty; W_\infty = \frac{\lambda + 2\cdot G}{\lambda + G}\cdot \Delta F_\infty - \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_\infty;\\
&\sigma_{zz,\infty} = 2\cdot G\cdot\left(\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_\infty - \frac{\partial^3 F_\infty}{\partial z^3}\right) + \lambda\cdot\left(\frac{G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_\infty\right);\\
&\sigma_{rr,\infty} = -2\cdot G\cdot\frac{\partial^3 F_\infty}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\lambda\cdot G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_\infty;\\
&\sigma_{\theta\theta,\infty} = 2\cdot G\cdot\left(-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 F_\infty}{\partial r \partial z}\right) + \lambda\cdot\left(\frac{G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_\infty\right);\\
&\tau_{rz,\infty} = G\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\Delta - 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot F_\infty.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Осідання основи S_0 в будь-якій довільній точці М (рис. 1) і поровий тиск P_0 у момент часу $t \to \infty$ в даному випадку дорівнюють:

$$\left.\begin{aligned}
&S_\infty = -\frac{N}{4\cdot\pi\cdot G}\cdot\int_0^\infty \left[2\cdot(1-\nu)+\alpha\cdot z\right]\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha;\\
&P_\infty = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Далі знайдемо функцію часу $f(z,t)$, яка пов'язує між собою осідання основи при $t \to 0$ и $t \to \infty$.

Спочатку знайдемо поровое тиск Р в інтервалі часу $0 < t < \infty$. Для цієї мети, згідно [8], використовуємо рівняння виду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_v\cdot\Delta P - \frac{1}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{kk,0}, \quad (8)$$

при початкових умовах:

$$\left.\begin{aligned}
&P(r,0,t) = P(\infty,z,t) = P(r,\infty,t) = 0;\\
&P(r,z,0) = \frac{N}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^\infty \alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha;
\end{aligned}\right\}, \quad (9)$$

де c_v – коефіцієнт просторової консолідації основи [11, 12]; t – час; $\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{kk,0} \equiv 0$.

Потенціал обумовлених віджиманням порової рідини переміщень і переміщення в напрямку осі *0z*, згідно [8], дорівнюють:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi = \frac{c_v}{\lambda+2\cdot G}\cdot\int_0^t P(r,z,\tau)\cdot d\tau;\\
&W_P = \frac{\partial}{\partial z}\Phi.
\end{aligned}\right\}. \quad (10)$$

Тут Φ – потенціал обумовлених віджиманням порової рідини переміщень; W_P – обумовлене віджиманням порової рідини вертикальне переміщення.

Рішення шукаємо в області зображень за Лапласом по змінному «t» [10].

В цьому випадку рівності (8) ... (10) приймуть такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
&P^* = c_v \cdot \Delta P^* + \frac{N}{2\cdot\pi\cdot\omega}\cdot\int_0^\infty \alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha;\\
&P^*(r,0,\omega) = P^*(\infty,z,\omega) = P^*(r,\infty,\omega) = 0;\\
&P^*(r,z,0) = \frac{N}{2\cdot\pi\cdot\omega}\cdot\int_0^\infty \alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha;\\
&\Phi^* = \frac{c_v}{\lambda+2\cdot G}\cdot\frac{P^*}{\omega};W_p^* = \frac{\partial}{\partial z}\Phi^*.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Тут ω – параметр одностороннього перетворення Лапласа [10];

$P^*(r,z,t) = \int_0^\infty P(r,z,\omega)\cdot e^{(-\omega\cdot t)}\cdot dt$, и $\Phi^*(r,z,\omega) = \int_0^\infty \Phi(r,z,t)\cdot e^{(-\omega\cdot t)}\cdot dt$ –

односторонні перетворення по змінній «t» порового тиску і потенційної функції переміщень, зумовлених віджиманням порової рідини.

Рішення верхньої рівності (11) з урахуванням граничних умов (друга зверху рівність (11)) має вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
&P^* = \frac{N}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^\infty \frac{exp(-\alpha\cdot z)-exp(-\gamma\cdot z)}{\omega}\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\alpha\cdot d\alpha;\gamma=\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2};\\
&\Phi^* = \frac{N}{2\cdot\pi}\cdot\frac{c_v}{\lambda+2\cdot G}\cdot\int_0^\infty \frac{exp(-\alpha\cdot z)-exp(-\gamma\cdot z)}{\omega^2}\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\alpha\cdot d\alpha;\\
&W_p^* = -\frac{N}{2\cdot\pi}\cdot\frac{c_v}{\lambda+2\cdot G}\cdot\int_0^\infty \frac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)-\gamma\cdot exp(-\gamma\cdot z)}{\omega^2}\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\alpha\cdot d\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Оригінал для порового тиску (верхнє рівність (12)) було отримано Ю.К. Зарецьким [12].

Для побудови асимптотики, що зв'язує значення осідань в нулі і на нескінченності розглянемо підінтегральної функції останньої рівності (12) і знайдемо її граничні значення при $t \to 0$ и $t \to \infty$. З урахуванням теореми операційного числення про граничні значення оригіналу маємо:

$$\left.\begin{aligned}
&F^*(\alpha,\omega)=\frac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)-\gamma\cdot exp(-\gamma\cdot z)}{\omega^2};\gamma=\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2};\\
&\lim_{t\to 0}it\left[F(\alpha,t)\right]=\lim_{\omega\to\infty}it\left[\omega\cdot F^*(\alpha,\omega)\right]=0;\\
&\lim_{t\to\infty}it\left[F(\alpha,t)\right]=\lim_{\omega\to 0}it\left[\omega\cdot F^*(\alpha,\omega)\right]=\frac{1+\alpha\cdot z}{\alpha\cdot c_v}\cdot exp(-\alpha\cdot z).
\end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Далі знайдемо оригінал функції $F^*(\alpha,\omega)$.

1. Оригінал функції $F_1^*(\alpha,\omega)=\dfrac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)}{\omega^2}$ має вигляд:

$$F_1^*(\alpha,\omega)=\frac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)}{\omega^2}\rightleftharpoons\alpha\cdot t\cdot exp(-\alpha\cdot z). \rightarrow \tag{14}$$

2. Точне знаходження оригіналу функції

$$F_2^*(\alpha,\omega)=\frac{\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2}\cdot exp\left(-z\cdot\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2}\right)}{\omega^2}$$

викликає значні труднощі. Тому знайдемо його асимптотику. Для цієї мети використовуємо викладений в роботі [13] алгоритм. Як «внутрішньої» функції виберемо експоненту

$$\varphi=exp\left(-\alpha^2\cdot c_v\cdot t\right). \tag{15}$$

Зображенням (15) є функція:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi=exp\left(-\alpha^2\cdot c_v\cdot t\right)\rightleftarrows\xi=\frac{1}{\omega+\alpha^2\cdot cv};\\
&\lim_{\omega\to 0}it(\xi)=\frac{1}{\alpha^2\cdot cv};\lim_{\omega\to\infty}it(\xi)=0;
\end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

З врахуванням (16) знайдемо:

$$\omega=\frac{1-\xi\cdot\alpha^2\cdot cv}{\xi}. \tag{17}$$

Далі підставимо (17) в функцію $\omega^2\cdot F_2^*(\alpha,\omega)$. Маємо:

$$\left.\begin{aligned}
&F_3^*(\alpha,\xi)=\omega^2\cdot F_2^*(\alpha,\xi)=\\
&=\lim_{\omega\to\frac{1-\xi\cdot\alpha^2\cdot cv}{\xi}}it\left[\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2}\cdot exp\left(-z\cdot\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2}\right)\right]=\\
&=\frac{1}{\sqrt{cv\cdot\xi}}\cdot exp\left(\frac{z}{\sqrt{cv\cdot\xi}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Після цього розкладемо функцію $F_3^*(\alpha,\xi)$ в ряд Тейлора за новою змінною ξ в околі точки $\xi = \dfrac{1}{\alpha^2 \cdot cv}$ [10]. Оскільки цій точці відповідає значення комплексної змінної $\omega \to 0$, ці коефіцієнти є коефіцієнтами розкладу в асимптотичний ряд по змінної ‘t’ при $t \to \infty$. Маємо:

$$\left.\begin{aligned} F_3^*(\alpha,\xi) &= \omega^2 \cdot F_2^*(\alpha,\xi) = a_0 + \frac{a_1}{1!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2\cdot cv} - \xi\right) + \frac{a_2}{2!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2\cdot cv} - \xi\right)^2 + \ldots = \\ &= a_0 + \frac{a_1}{1!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2\cdot cv} - \frac{1}{\omega+\alpha^2\cdot cv}\right) + \frac{a_2}{2!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2\cdot cv} - \frac{1}{\omega+\alpha^2\cdot cv}\right)^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Тут:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z); \\ a_1 &= -\frac{1}{2}\cdot\alpha^3\cdot c_v\cdot(1-\alpha\cdot z)\cdot exp(-\alpha\cdot z); \\ a_2 &= -\frac{1}{4}\cdot\alpha^5\cdot c_v^2\cdot\left(5\cdot\alpha\cdot z - 3 - \alpha^2\cdot z^2\right)\cdot exp(-\alpha\cdot z); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

З урахуванням (19) і (20) підінтегральна функція (13) може бути представлена у вигляді:

$$F^*(\alpha,\omega) = \frac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z) - \gamma\cdot exp(-\gamma\cdot z)}{\omega^2} \approx$$

$$\frac{1}{\omega^2}\cdot\left\{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z) - \left[\begin{aligned} & a_0 + \frac{a_1}{1!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2\cdot cv} - \frac{1}{\omega+\alpha^2\cdot cv}\right) + \\ & \frac{a_2}{2!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2\cdot cv} - \frac{1}{\omega+\alpha^2\cdot cv}\right)^2 + \ldots \end{aligned}\right]\right\} \tag{21}$$

Для практичних розрахунків досить утримати перші два члена ряду (21). маємо:

$$\begin{aligned} F^*(\alpha,\omega) &= \frac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z) - \gamma\cdot exp(-\gamma\cdot z)}{\omega^2} \approx \\ &\approx \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\alpha}{\omega\cdot\left(\omega + c_v\cdot\alpha^2\right)} - \frac{\alpha^2\cdot z}{\omega\cdot\left(\omega + c_v\cdot\alpha^2\right)}\right]\cdot exp(-\alpha\cdot z) \end{aligned} \tag{22}$$

Оригінал (22) має вигляд:

$$F(z,\alpha,t) = \frac{1-\alpha\cdot z}{2\cdot c_v\cdot\alpha}\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot\left[1 - exp\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right)\right]. \tag{23}$$

Далі знайдемо функцію $f(z,\alpha,t)$, яка пов'язує між собою асимптотическіе значення осідань при $t \to 0$ и $t \to \infty$.

Маємо:

$$f(z,\alpha,t)=\frac{F(z,\alpha,t)}{F(z,\alpha,\infty)}=1-exp\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right). \tag{24}$$

З урахуванням (24) остаточне рішення задачі має вигляд:

$$W_z=-\frac{N}{4\cdot\pi\cdot G}\cdot\int\limits_0^\infty\left\{\begin{matrix}1+\alpha\cdot z+\\(1-2\cdot\nu)\cdot\left[\begin{matrix}1-\\e^{\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right)}\end{matrix}\right]\end{matrix}\right\}\cdot e^{(-\alpha\cdot z)}\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha. \tag{25}$$

Оскільки (25) надалі передбачається використовувати в якості фундаментального рішення, доцільно позбутися невласного інтеграла.

Для цього представимо функцію $e^{\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right)}$ у вигляді ряду експонент:

$$e^{\left(-\eta^2\right)}\approx\sum_{i=1}^n a_i\cdot e^{\left(-k_i\cdot\eta\right)}. \tag{26}$$

Для цієї мети використовуємо метод найменших квадратів і елементи теорії оптимізації [10, 14]. Значення коефіцієнтів a_i и k_i представлені в таблиці 1.

У графічному вигляді початкова функція (ряд 1) і її апроксимація (ряд 2) представлені на рис. 2.

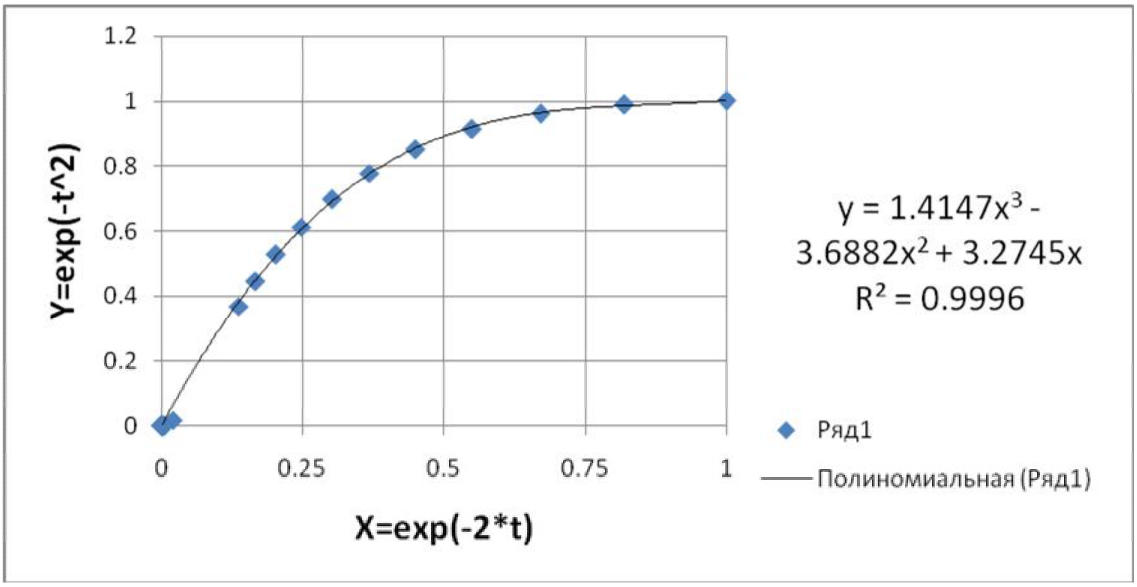

Рис. 2. До апроксимації функції / By approximating function $exp\left(-\eta^2\right)$

З урахуванням (26) знайдемо:

$$e^{\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right)}\approx\sum_{i=1}^n a_i\cdot e^{\left(-k_i\cdot\alpha\cdot\sqrt{c_v t}\right)}. \tag{27}$$

Таблиця 1.

№ п/п	Значення коефіцієнтів		
a_i	3,2745	3,6882	1,4147
k_i	2,0	4,0	6,0

З урахуванням (27) і представлених в таблиці 1 даних невласний інтеграл (25) може бути представлений в аналітичній формі:

$$W_z = -\frac{1}{4\cdot\pi\cdot G}\cdot\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}+\dfrac{z^2}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\left(1-2\cdot\nu\right)\cdot\\ \cdot\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\dfrac{1,4137}{\sqrt{r^2+\left(6\cdot\sqrt{c_v\cdot t}+z\right)^2}}+\\ +\dfrac{3,6882}{\sqrt{r^2+\left(4\cdot\sqrt{c_v\cdot t}+z\right)^2}}-\dfrac{3,2745}{\sqrt{r^2+\left(2\cdot\sqrt{c_v\cdot t}+z\right)^2}}\end{array}\right]\end{array}\right\}. \qquad (28)$$

Отримане нами рішення задачі має такі асимптотичні оцінки:

$$\left.\begin{array}{r}W_z\left(r,z,0\right)=-\dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot G}\cdot\dfrac{r^2+2\cdot z^2}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}};\\ W_z\left(r,z,\infty\right)=-\dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot G}\cdot\dfrac{2\cdot\left(1-\nu\right)\cdot r^2+z^2\cdot\left(3-2\cdot\nu\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}};\\ \dfrac{S\left(r,\infty\right)}{S\left(r,0\right)}=\dfrac{W_z\left(r,0,\infty\right)}{W_z\left(r,0,0\right)}=2\cdot\left(1-\nu\right).\end{array}\right\}. \qquad (29)$$

Остання оцінка (29) повністю збігається з отриманими Ю. К. Зарецьким результатами [12].

На закінчення відзначимо, що отримані в даній роботі результати (формула (28)) в подальшому будуть використані для розробки методики розрахунку осідань осушуваних з використанням вертикальних дрен основ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Справочник Plaxis V 8.2 / пер. М.Ф. Астафьева. 2006. 182 с
2. Парамонов В.Н. Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники. Санкт-Петербург, 2012 – 264 с.
3. Цытович Н.А. «Механика грунтов (краткий курс).»: Учебник для строит. вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1983. – 288 с., ил.
4. Цытович Н.А., Зарецкий Ю.К., Малышев М.В., Абелев М.Ю., Тер-Мартиросян З.Г. Прогноз скорости осадок оснований и сооружений.- М.: Стройиздат, 1967. - 238 с.
5. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации: Монография. -Днепропетровск: Пороги, 2009-311 с.
6. Шаповал В.Г. Прогноз осадок и кренов фундаментов на пылевато – глинистом основании, находящихся под воздействием статической и циклической нагрузки: Автореферат докторской диссертации. - Днепропетровск, 1996. - 50 с.
7. ДБН В.2.1-10-2009. Основи та фундаменти споруд. Київ. Мінрегіонбуд України, 2009-104 с.
8. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Алгоритм побудови асимптотичних рішень задач про осідання водонасичених основ. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. Випуск 28 – Рівне, 2014 – с. 463 – 469.
9. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, - 1975. - 872 с.
10. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1974. - 840 с.
11. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации: Монография. -Днепропетровск: Пороги, 2009-311 с.
12. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. - М.: Наука. 1967 - 270 с.

13. Шаповал В.Г., Шаповал А.В., Титякова Е.С. Алгоритм построения разложений в асимптотические ряды при нахождении обратного преобразования Лапласа в задачах тепломассопереноса и фильтрационной консолидации.//Світ геотехніки. № 4. 2005. –С. 12-16.
14. Почтман Ю.М., Колесниченко А.Л. Методы математической оптимизации в механике грунтов. - Киев - Донецк: Вища школа, 1977. - 104 с.

REFERENCES

1. Spravochnik Plaxis V 8.2 / per. M.F. Astafeva. 2006. 182 s.
2. Paramonov V.N. *Metod konechnyih elementov pri reshenii nelineynyih zadach geotehniki*.[Finite element method in solving nonlinear problems of geotechnics. Saint Petersburg]. Sankt-Peterburg, 2012 – 264 s.
3. Tsyitovich N.A. «*Mehanika gruntov (kratkiy kurs*)»[Soil mechanics]: Uchebnik dlya stroit. vuzov. – 4-e izd., pererab. i dop. – M.: Vyissh. shk., 1983. – 288 s., il.
4. Tsyitovich N.A., Zaretskiy Yu.K., Malyishev M.V., Abelev M.Yu., Ter-Martirosyan Z.G. *Prognoz skorosti osadok osnovaniy i sooruzheniy*[Forecast the speed of the residue of grounds and facilities].- M.: Stroyizdat, 1967. - 238 s.
5. Shapoval A.V., Shapoval V.G. *Teoriya vzaimosvyazannoy filtratsionnoy konsolidatsii*[The interconnected theory of filtration consolidation]: Monografiya. -Dnepropetrovsk: Porogi, 2009-311 s.
6. Shapoval V.G. *Prognoz osadok i krenov fundamentov na pyilevato – glinistom osnovanii, nahodyaschihsya pod vozdeystviem staticheskoy i tsiklicheskoy nagruzki* [Forecast sediment and banks of foundations on silty – clay base under static and cyclic loading]: Avtoreferat doktorskoy dissertatsii. - Dnepropetrovsk, 1996. - 50 s.
7. DBN V.2.1-10-2009. *Osnovi ta fundamenti sporud*[Principles that fundament of spared]. KiYiv. MInregIonbud UkraYini, 2009-104 s.
8. Shapoval A.V., Shapoval V.G. *Algoritm pobudovi asimptotichnih rIshen zadach pro osIdannya vodonasichenih osnov*[The algorithm for constructing asymptotic solutions of problems of precipitation of water-saturated grounds. Resource-economical materials, design, buildings and structures]. ResursoekonomnI materIali, konstruktsIYi, budIvlI ta sporudi. ZbIrnik naukovih prats. Vipusk 28 – RIvne, 2014 – s. 463 – 469.
9. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti*[Theory of elasticity]. - M.: Mir, - 1975. - 872 s.
10. Korn G. i Korn T. *Spravochnik po matematike*[Handbook of mathematics]. - M.: Nauka, 1974. - 840 s.
11. Shapoval A.V., Shapoval V.G. *Teoriya vzaimosvyazannoy filtratsionnoy konsolidatsii* [The interconnected theory of filtration consolidation]: Monografiya. -Dnepropetrovsk: Porogi, 2009-311 s.
12. Zaretskiy Yu.K. *Teoriya konsolidatsii gruntov*[The theory of consolidation of soils]. - M.: Nauka. 1967 - 270 s.
13. Shapoval V.G., Shapoval A.V., Tityakova E.S. *Algoritm postroeniya razlozheniy v asimptoticheskie ryadyi pri nahozhdenii obratnogo preobrazovaniya Laplasa v zadachah teplomassoperenosa i filtratsionnoy konsolidatsii* [The algorithm for constructing the expansions in asymptotic series when finding the inverse Laplace transform in problems of heat and mass transfer and filtration consolidation]///SvIt geotehnIki. № 4. 2005. –S. 12-16.
14. Pochtman Yu.M., Kolesnichenko A.L. *Metodyi matematicheskoy optimizatsii v mehanike gruntov*[Mathematical optimization methods in soil mechanics]. - Kiev - Donetsk: Vischa shkola, 1977. - 104 s.

Статья рекомендована к публикации д-рами техн. наук, В.И. Большаковым и Д.В. Лаухиным (Украина)