

УДК 62-503.56

**Жученко О.А.**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**Хібеба М.Г.**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## МОДЕЛЬ ФОРМУВАННЯ ВУГЛЕЦЕВИХ ВИРОБІВ У РЕЖИМАХ ПІДГОТОВКИ ТА ПРЕСУВАННЯ

*На основі аналізу наявних методів спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами обґрунтовано вибір методу Фур'є для спрощення математичної моделі процесу формування вуглецевих виробів. Розроблено спрощені математичні моделі для двох режимів роботи – підготовки та пресування. Визначено оптимальні структури спрощених математичних моделей. Проведено їх параметричну ідентифікацію. Досліджена відповідність результатів розрахунків за спрощеною та початковою математичними моделями.*

**Ключові слова:** виробництво вуглецевих виробів, процес формування, математична модель, метод Фур'є, структурна та параметрична ідентифікація.

**Постановка проблеми.** Нині складно уявити собі сучасну промисловість без виробництва вуглецевих виробів, адже продукція цього виробництва застосовується в різних галузях промисловості: чорній та кольоровій металургії, машинобудуванні, хімічній промисловості та інших.

Значна ресурсо- та енергозатратність такого виробництва спричиняє потребу у використанні нових технологій та систем керування ними на всіх ключових етапах виробництва з метою зменшення затрат та забезпечення високої якості продукції. Одним з визначальних технологічних процесів виробництва вуглецевої продукції є процес формування вуглецевих виробів, під час якого формуються властивості вуглецевої сировини, що впливають як на перебіг наступних технологічних процесів виробництва, так і врешті-решт, на якість готової продукції [1; 2].

Синтез системи керування процесом формування вуглецевих виробів, яка забезпечувала б оптимальні режими його функціонування, неможливий без попереднього дослідження самого процесу. Дослідження на реальних об'єктах в умовах діючого виробництва досить затратне та може призвести до виходу з ладу технологічного обладнання, що фактично робить неможливим проведення промислового експерименту. Єдиною альтернативою в такій ситуації виступає метод математичного моделювання.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Математичному моделюванню процесу пресування

присвячена значна кількість наукових праць [3–8]. З огляду на те, що процес пресування як об'єкт математичного моделювання є об'єктом з розподіленими параметрами, то у цих роботах, як правило, математична модель являє собою систему нелінійних нестационарних рівнянь у частинних похідних.

Час розрахунку такої моделі на сучасному стаціонарному комп'ютері складає декілька годин. Така тривалість розрахунку, по-перше, суттєво ускладнює безпосередньо дослідження процесу формування вуглецевих виробів і, по-друге, робить неможливим використання такої моделі у системах керування реального часу. Названі обставини висувають нагальну потребу спрощення початкової складної моделі.

Натепер є значна кількість підходів до спрощення моделей, з яких найчастіше використовується метод лінеаризації нелінійних диференціальних рівнянь, методи ідентифікації, метод Фур'є.

Метод лінеаризації передбачає зведення нелінійних диференціальних рівнянь до їх лінійного наближення [9]. Розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь – задача простіша, ніж розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь, і розрахунок моделі, представленої у такому вигляді, займає набагато менше часу. Недоліками цього методу є те, що далеко не всі нелінійні диференціальні рівняння піддаються лінеаризації, а процеси, що мають явно виражений нелінійний характер можуть не досить точно описуватись такими моделями.

Методи ідентифікації дають змогу за отриманими зі складної моделі даними розрахувати коефіцієнти спрощеної моделі. Складнощі у застосуванні таких методів полягають у необхідності підбирати структуру моделі. Недолік таких методів полягає у тому, що навіть за підбраної оптимальної структури моделі зі збільшенням числа вихідних сигналів точність моделі значно зменшується [10].

Метод Фур'є передбачає представлення вихідних сигналів у вигляді ряду, що складається з суми добутків коефіцієнтів, які відображають зміну вихідних сигналів у часі, та коефіцієнтів, що відображають розподілення вихідних сигналів у просторі [11]. У таких моделях залежність вихідних сигналів від вхідних визначається ідентифікацією залежності значень коефіцієнтів, що відображають зміну вихідних сигналів у часі, від вхідних сигналів.

**Постановка завдання дослідження.** У роботі гідравлічного пресу для формування вуглецевих виробів можна виділити режим підготовки, який включає завантаження та підпресування електродної маси та безпосередньо режим пресування заготовок. Динаміка температур у цих режимах різна, тому потрібно розробляти спрощені моделі окремо для кожного з режимів.

Наведений вище короткий аналіз наявних методів спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами свідчить про те, що моделі, отримані за методом Фур'є, не мають недоліків моделей, створених за допомогою методів ідентифікації, адже кількість членів ряду, що потрібні для точного відображення вихідних сигналів (а отже, і кількість коефіцієнтів, що відображають зміну вихідних сигналів у часі), менша за кількість вихідних сигналів.

У зв'язку з цим як метод спрощення початкової складної математичної моделі процесу формування вуглецевих виробів доцільно вибрати метод розділення змінних Фур'є.

Таким чином, завданням цього дослідження є на основі методу Фур'є створити спрощену математичну модель процесу формування вуглецевих виробів для режимів підготовки та безпосередньо пресування, яка потребує короткого часу розрахунку та досить точно відтворює результати розрахунків за початковою складною моделлю.

Для того щоб реалізувати метод Фур'є необхідно отримати температурні «знімки», тобто температурні поля об'єкта за випадкових вхідних сигналів. Для отримання таких полів була використана початкова модель [3].

**Апроксимація температурних знімків.** Алгоритм формування спрощеної моделі включає такі кроки [11]:

- за отриманими раніше температурними знімками  $T_{snap}$  визначити матрицю  $R' = T_{snap}^T T_{snap}$
- визначити власні значення  $\Lambda_{R'}$  та власні вектори  $\Psi$  матриці  $R'$
- обчислити значення базисних векторів  $\phi_i = T_{snap} \Psi_i (\lambda_i)^{-1/2}$
- після визначення базисних векторів обчислити коефіцієнти Фур'є за формулою:

$$A_{snap} = [\tilde{a}_n(1) \quad \tilde{a}_n(2) \quad \dots \quad \tilde{a}_n(K)] = \Phi_K^T T_{snap}; \quad (1)$$

- обрати структуру моделі залежності між вхідним сигналом  $u(t)$  та коефіцієнтами Фур'є  $\tilde{a}_n(t)$  а на основі даних  $\tilde{y}_n(t)$  і  $\tilde{a}_n(t)$  реалізувати параметричну ідентифікацію;

– отримавши модель залежності  $a_n(t)$  від  $u(t)$  змоделювати зміну у часі коефіцієнтів Фур'є за будь-якої потрібної траєкторії вхідного сигналу;

- за формулою  $T(t) = \Phi a(k)$  знаходимо зміну температурного поля у часі для заданої траєкторії вхідного сигналу.

Цей алгоритм необхідно реалізувати для різної кількості коефіцієнтів Фур'є  $n$ . У результаті має бути отримано серію моделей для різних  $n$ , серед яких потрібно визначити таку, що найкраще відображає температурні поля об'єкта.

Матриці температурних знімків для створення спрощених моделей формування вуглецевих виробів було взято з досліджень, основаних на початковій моделі [3]. У результаті розкладу за сингулярними числами були отримані значення базис-векторів  $\phi_i$ . Далі за допомогою формули (1) визначені значення коефіцієнтів Фур'є. Результати розрахунків не наведені, тому що  $L$  (кількість точок (вузлів), в яких моделюється температура) становить сотні тисяч, а кількість кроків по часу  $K$  – сотні. З огляду на те, що  $\Phi$  – має розмірність  $L \times K$  а  $A$  –  $K \times K$  повне виведення цих матриць є неможливим.

Для оцінки якості апроксимації було обрано похибку (2) для випадків використання  $n=1..20$  перших базис-векторів.

$$\varepsilon_A = \frac{\sum_{\xi=1}^L \sum_{t=0}^K (T_{snap}(\xi, t) - T_A(\xi, t))^2}{KL} \quad (2)$$

де  $T_A = \Phi_n A_n$  матриця  $L \times K$  проксимованих температур,  $\Phi_n, A_n$  перші  $n$  базис-векторів та коефіцієнтів Фур'є відповідно. Для заданої максимально допустимої похибки  $\varepsilon_{max} = 0,01T_A$  використання у подальших дослідженнях більш ніж 11 базис-векторів для режиму підготовки та 16 базис-векторів для режиму пресування виявилось

недоцільним, оскільки така кількість уже забезпечила умову  $\varepsilon_A < \varepsilon_{\max}$  (рис.1, 2). Приймаємо  $n_{\max\_підг} = 11$  та  $n_{\max\_прес} = 16$ .

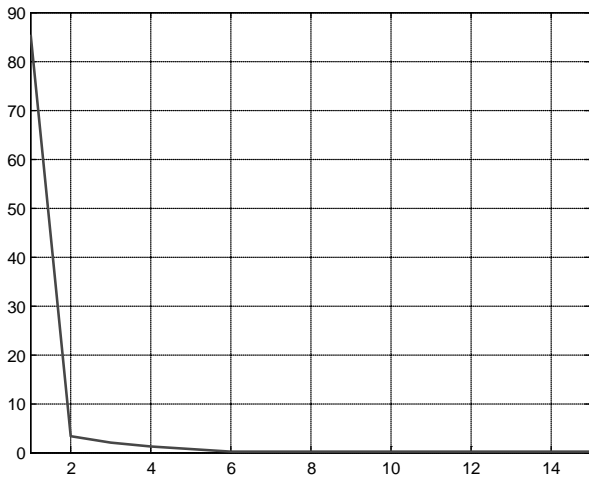


Рис. 1. Залежність похибки апроксимації від кількості членів ряду (підготовка)

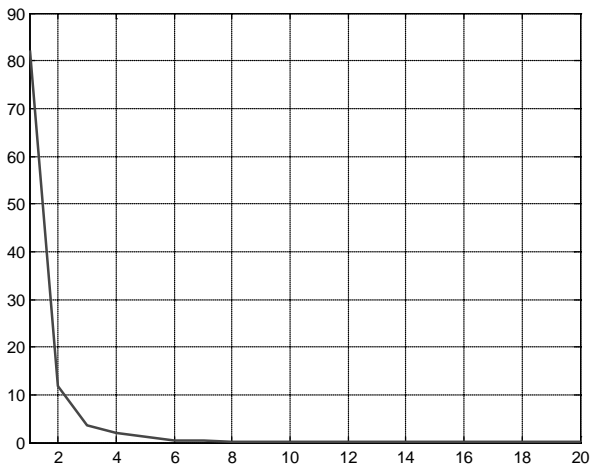


Рис. 2. Залежність похибки апроксимації від кількості членів ряду

**Ідентифікація залежностей між отриманими значеннями коефіцієнтів Фур'є та вхідними сигналами.** Для ідентифікації залежностей було використано пакет *System Identification Toolbox*, що входить до складу *Matlab* [12].

Задля автоматизації процесу пошуку оптимальної структури моделі було розроблено функції, що використовують функції з пакета *System Identification Toolbox*. У результаті ідентифікації для кожного з  $n=1..n_{\max}$  було знайдено такі моделі, що найточніше описують зв'язок між значеннями коефіцієнтів  $\alpha_i(t)$  та вхідними сигналами моделі  $u(t)$ . У всіх випадках найкраще з поставленою задачею впоралися ARX-моделі авторегресії зі структурою типу:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-n_k) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b-n_k+1) + e(t)$$

У таблицях 1, 2 містяться дані про конфігурацію оптимальних ідентифікаційних моделей режимів підготовки та пресування відповідно для кожного з  $n$  та їх точність [12].

Таблиця 1

Дані про оптимальні структури ідентифікаційних моделей режиму підготовки

$n$	$n_a$	$n_b$	$n_k$	Точність моделі, %
1	1	4	1	97,30
2	1	4	1	96,57
3	1	4	1	95,7
4	1	4	1	94,82
5	1	1	1	92,49
6	1	1	1	92,18
7	1	1	1	91,89
8	1	1	1	90,63
9	1	1	1	88,65
10	1	1	1	87,29
11	1	1	1	64,59

Таблиця 2

Дані про оптимальні структури ідентифікаційних моделей режиму пресування

$n$	$n_a$	$n_b$	$n_k$	Точність моделі, %
1	1	4	1	78,56
2	1	4	1	83,03
3	1	4	1	92,12
4	1	2	1	92,31
5	1	1	1	89,29
6	1	1	1	83,52
7	1	1	1	74,76
8	1	1	1	80,65
9	1	1	1	78,37
10	1	1	1	78,18
11	1	1	1	74,87
12	1	1	1	60,11
13	1	1	1	36,75
14	1	1	1	40,38
15	1	1	1	27,03
16	1	1	1	53,87

У цьому дослідженні є тенденція до зменшення точності моделей зі збільшенням  $n$ , адже збільшується кількість виходів моделі, характер зв'язків між входами і виходами стає складнішим. Для деяких моделей така залежність точності від  $n$  не справджується. Наприклад, для  $n = 1..4$  точність моделей навпаки збільшується (табл. 2).

**Дослідження якості роботи спрощених моделей.** Для отримання спрощених моделей матрицю, що складається з  $n$  базис-векторів необхідно помножити на вектори вихідних сигналів ідентифікаційних моделей (значення коефіцієнтів  $a_i(t)$  у момент часу  $t$ ). Оскільки в результаті моделювання отримано динаміку температури в усьому об'ємі мундштука та електродної маси, то для графічного представлення результатів доцільно зображати температури лише в деяких контрольних точках. Для графічного відображення результатів було обрано точки  $T_{11}$ ,  $T_{21}$ ,  $T_{31}$ , їх розташування показано на рис. 3.



Рис. 3. Розташування контрольних точок

Результати роботи спрощених моделей режиму підготовки представлені на рис. 4–6.

Похибки роботи отриманих моделей обраховувались за допомогою формули (2), в якій  $T_A$  амінено на  $T_M$  матрицю змодельованих спрощеними моделями температур.

Модель з  $n=1$  очікувано показала найгірші результати, відтворивши температури в середньому з похибкою у  $9^\circ\text{C}$ , що спричинено низькою якістю апроксимації температурних знімків лише одним базис-вектором (рис. 1.). Далі точність значно зростає для моделей з  $n$  від 2 до 6 (табл. 3, рис. 4–6), після чого зі збільшенням  $n$  похибка відтворення температурних знімків зменшується значно повільніше. Така динаміка зміни похибки пояснюється виконанням умови:

$$\|a_1\|_2^2 \geq \|a_2\|_2^2 \geq \dots \geq \|a_N\|_2^2. \quad (3)$$

У разі порівняння роботи моделей з  $n=10$  та  $n=11$  виявлено, що, незважаючи на більшу кількість базис-векторів, якими апроксимуються температурні знімки, похибка для  $n=11$  більша за похибку для  $n=10$ . Попри високу точність апроксимації для  $n=11$  ідентифікаційна модель з одинадцятьма виходами має досить низьку точність (табл. 1), що й спричиняє збільшення похибки роботи спрощеної моделі. З огляду на те, що кожен наступний член ряду вносить все менше «енергії» та те, що збільшення кількості виходів в ідентифікаційній моделі спричиняє зменшення її точності, слід очікувати, що подальше збільшення  $n$  призведе до значного збільшення похибки спрощеної моделі, що ще раз доводить доцільність вибору  $n_{max}=11$ .

Таблиця 3

**Похибки відтворення температурних знімків режиму підготовки**

$n$	1	2	3	4	5	6
Похибка	85,516	3,559	1,941	1,195	0,671	0,262
$n$	7	8	9	10	11	
Похибка	0,1414	0,1146	0,0927	0,0833	0,0859	

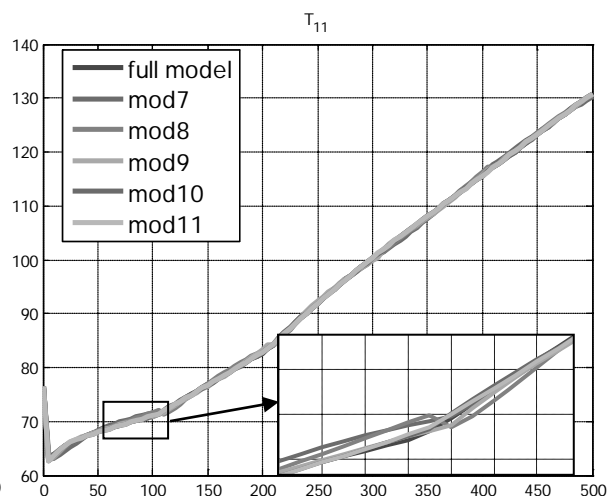
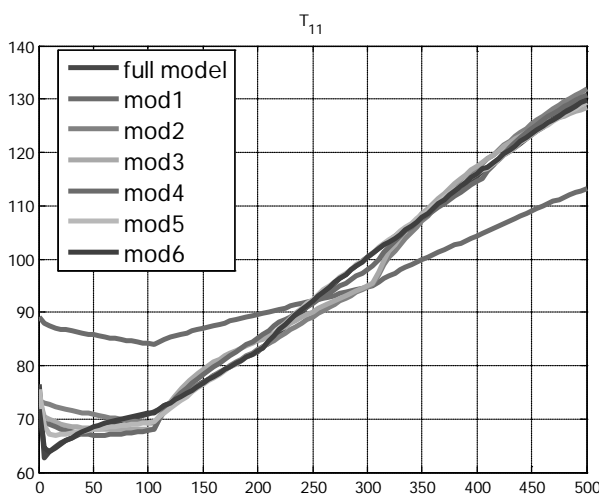


Рис. 4. Значення  $T_{11}$  отримані з повної моделі та спрощених моделей (full model – повна модель, mod1...11 – модель, що використовує 1...11 коефіцієнтів Фур'є)

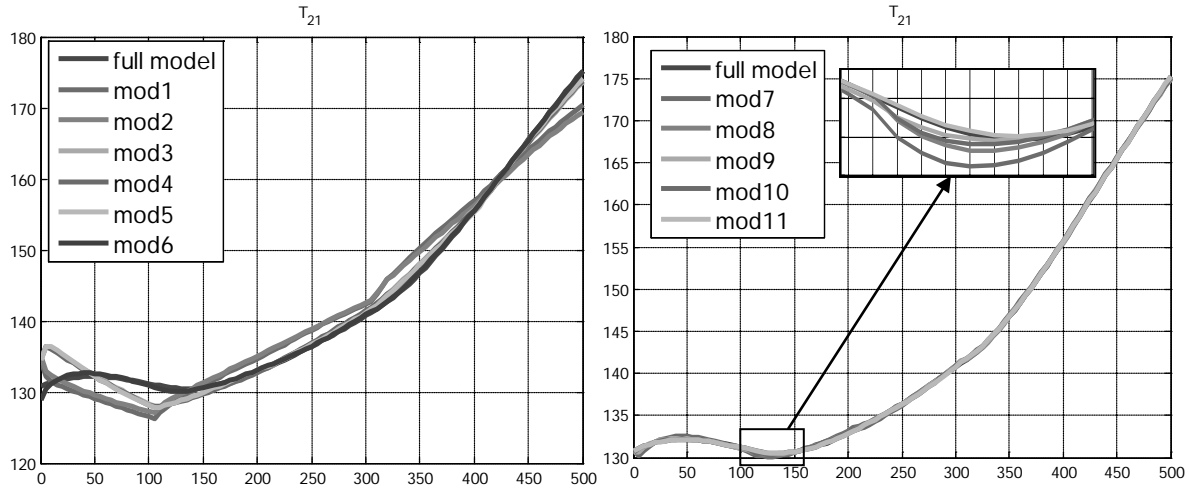


Рис. 5. Значення  $T_{21}$  отримані з повної моделі та спрощених моделей (full model – повна модель, mod1...11 – модель, що використовує 1...11 коефіцієнтів Фур'є)

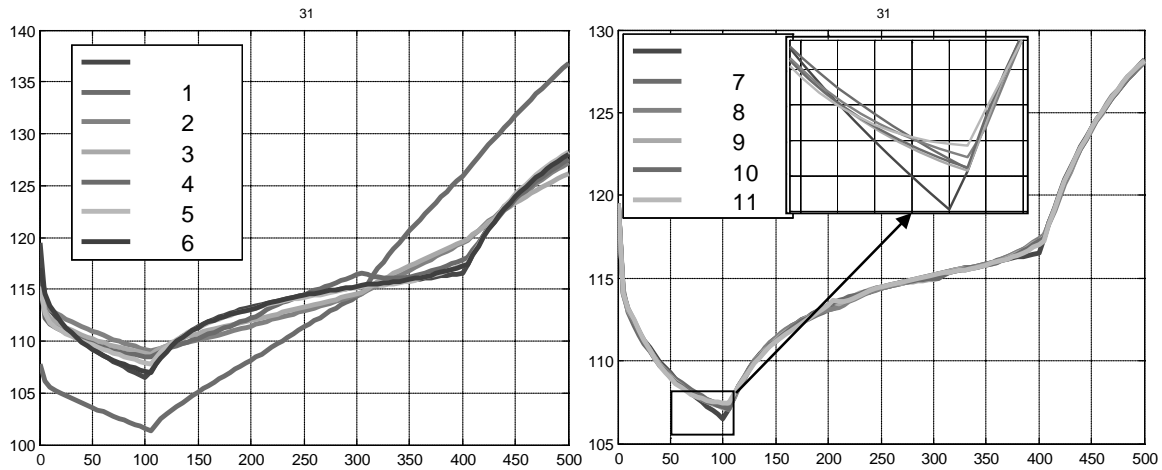


Рис. 6. Значення  $T_{31}$  отримані з повної моделі та спрощених моделей (full model – повна модель, mod1...11 – модель, що використовує 1...11 коефіцієнтів Фур'є)

Отже, в результаті дослідження якості роботи спрощених моделей у режимі підготовки було виявлено, що найбільш точною є спрощена модель, що використовує десять перших базис-векторів ( $n=10$ ).

Далі було проведено аналогічне дослідження моделей для режиму пресування.

Модель з  $n=1$ , як і у попередньому дослідженні, показала найгірші результати, відтворивши температури в середньому з похибкою в  $9,4^{\circ}\text{C}$ , що спричинено низькою якістю апроксимації температурних знімків лише одним базис-вектором (рис. 7).

Далі точність зростає для моделей з  $n$  від 2 до 10 (табл. 4, рис. 7–9). Така динаміка зміни похибки

пояснюється виконанням умови (3). Винятком є модель з  $n=7$ , її похибка відтворення температурних знімків більша, ніж похибка моделі з  $n=6$ , що спричинено значно меншою точністю ідентифікаційної моделі з  $n=7$  (табл. 2).

Моделі з  $n=11...16$  мають похибки відтворення температурних знімків, що практично не залежать від кількості базис-векторів, якими апроксимуються температурні знімки. Це пояснюється тим, що збільшення кількості базис-векторів, починаючи з 11, призводить до такого малого збільшення точності апроксимації (рис. 7–9), що є несуттєвим порівняно з настільки значним зменшенням точності ідентифікаційних моделей (табл. 4).

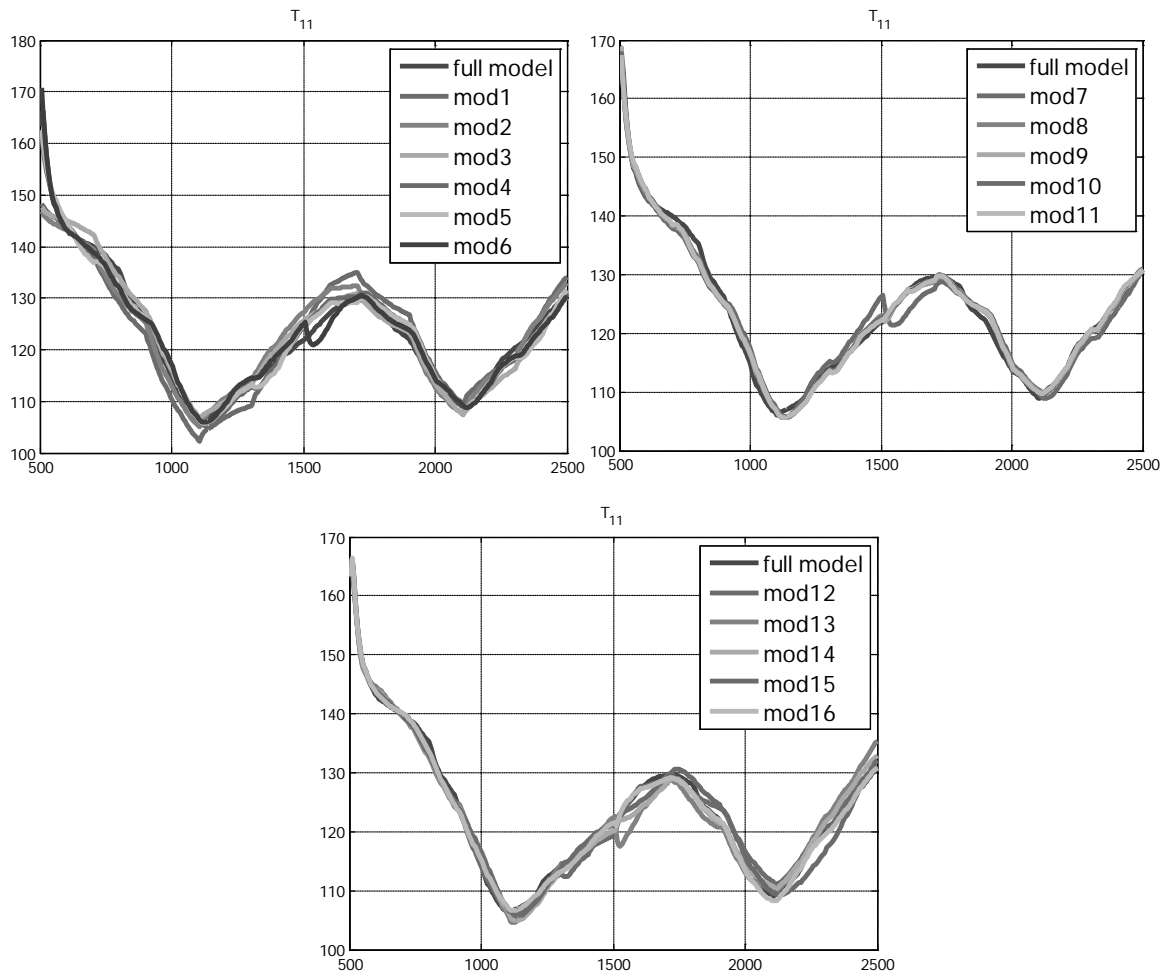


Рис. 7. Значення  $T_{11}$ , отримані зі складної моделі та спрощених моделей (full model – повна модель, mod1...16 – модель, що використовує 1...16 коефіцієнтів Фур'є)

Таблиця 4  
Похибки відтворення температурних знімків у режимі пресування

$n$	1	2	3	4	5	6
Похибка	87,578	12,432	4,562	2,494	1,801	1,376
$n$	7	8	9	10	11	12
Похибка	1,877	0,749	0,730	0,676	0,6805	1,0786
$n$	13	14	15	16		
Похибка	2,134	1,504	4,409	0,6075		

Отже, в результаті дослідження якості роботи спрощених моделей було виявлено, що найбільш точними є спрощені моделі, що використовують десять та шістнадцять перших базис-векторів (табл. 4). Для подальших досліджень доцільно використовувати модель з  $n=10$ , оскільки збільшення кількості базис-векторів, а отже, й ускладнення ідентифікаційної моделі, призведе до несуттєвого збільшення точності моделі.

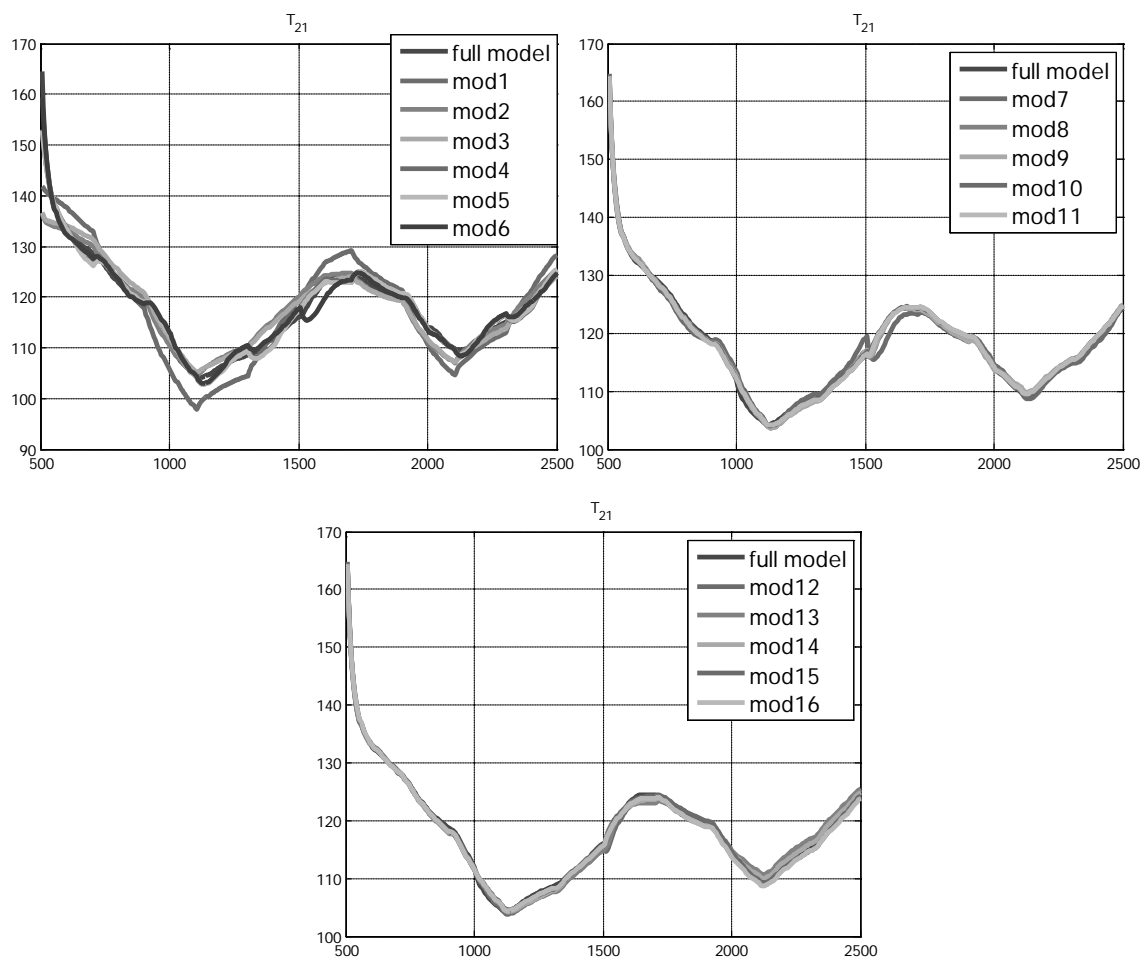
**Висновки.** Створення сучасної системи керування одним з основних технологічних процесів

у виробництві вуглецевих виробів – процесом їх формування – пов'язане із використанням математичної моделі процесу як на етапі попередніх досліджень, так і безпосередньо у системі керування реального часу.

Проведений аналіз наявних математичних моделей свідчить про неефективність останніх на етапі попередніх досліджень та неможливість їх використання у системах керування реального часу. Ці обставини спричинили потребу у розробленні спрощеної математичної моделі процесу формування.

Виконане дослідження відомих методів спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами дало можливість обґрунтовано вибрати метод розділення змінних Фур'є для спрощення початкової складної математичної моделі процесу формування.

Розроблені спрощені математичні моделі для двох режимів роботи гідравлічного пресу – підготовки та безпосередньо пресування. Визначені



**Рис. 8. Значення  $T_{21}$ , отримані зі складної моделі та спрощених моделей (full model – повна модель, mod1...16 – модель, що використовує 1...16 коефіцієнтів Фур'є)**

оптимальні структури моделей та проведена їх параметрична ідентифікація.

Проведене дослідження відповідності результатів розрахунків за спрощеною математичною моделлю результатам, отриманим з початкової складної моделі, продемонструвало

високу ефективність запропонованих спрощених моделей.

У подальших дослідженнях розроблені спрощені математичні моделі можуть бути використані для синтезу системи керування процесом формування вуглецевих виробів.

#### Список літератури:

1. Чалых А.Ф., Соседов В.П. Графитация углеродистых материалов. М.: Metallurgy, 1987. 176 с.
2. Санников А.К., Сомов А.Б., Ключников В.В. Производство электродной продукции. М.: Metallurgy, 1985. 129 с.
3. Лазарев Т.В., Карвацкий А.Я., Лелека С.В., Педченко А.Ю. Математическая модель процесса экструзии вязко-пластичной углеродной массы. Вестник НТУ «ХПИ». Серия «Новые решения в современных технологиях». 2016. № 12 (1184). С. 31–37.
4. Рауендаль К. Экструзия полимеров. С-Пб.: Профессия, 2006. 768 с.
5. Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1977. 464 с.
6. Tadmor Z. Principles of Polymer Processing. N.-Y.: Wiley-Interscience, 2006. 961 p.
7. Галыгин В.Е., Баронин Г.С., Таров В.П., Завражин Д.О. Современные технологии получения и переработки полимерных и композиционных материалов: учебное пособие. Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. 180 с.
8. Василенко В.Н., Остриков А.Н., Рязских В.И. Математическая модель течения двух вязкопластичных сред в формирующем канале экструдера при коэкструзии. Вестник ВГУИТ. 2012. № 2. С. 64–67.
9. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. БХВ-Петербург, 2016. 560 с.
10. Гончаров В.И., Нгуен Куанг Зунг, Тхан Вьет Зунг. Идентификация объектов управления с распределёнными параметрами. GISAP: Technical Sciences, Construction and Architecture. 2016. № 8. С. 8–11.

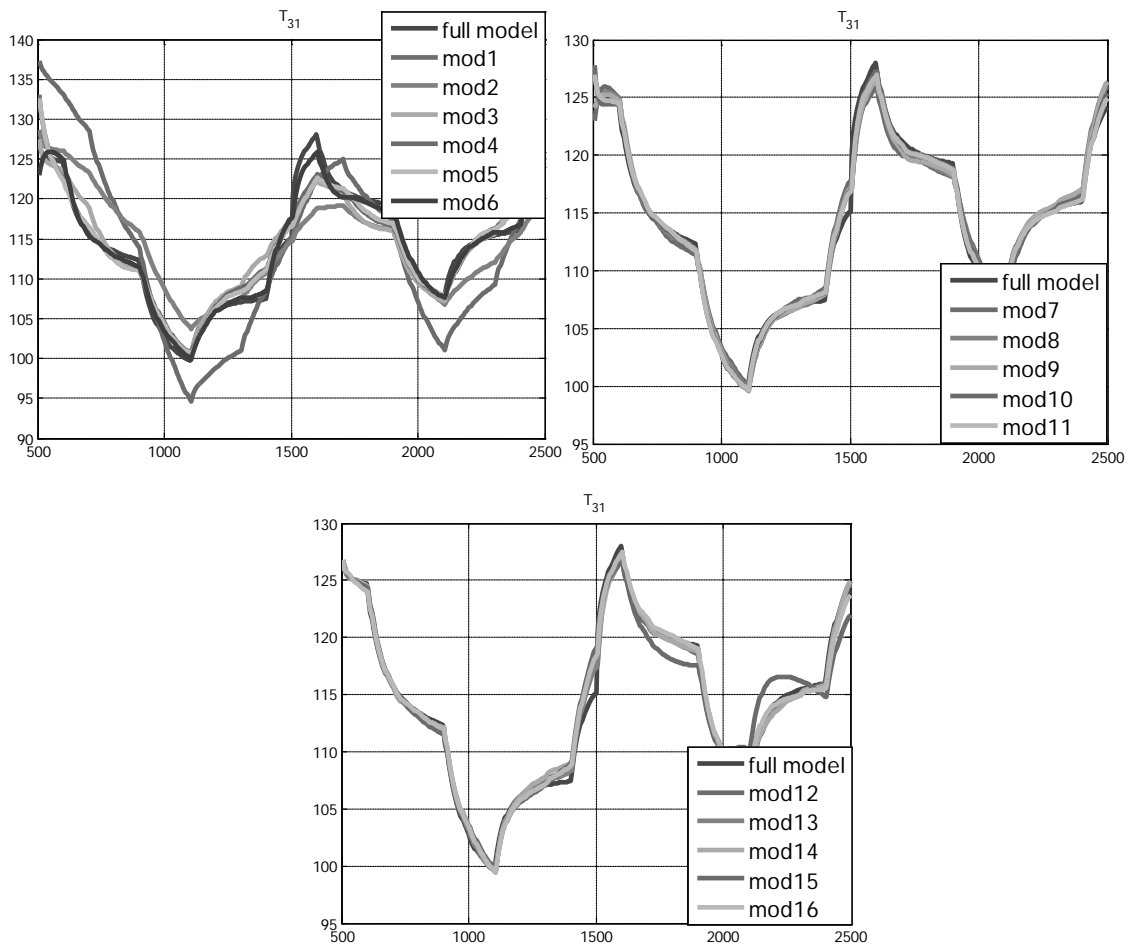


Рис. 9. Значення  $T_{31}$ , отримані зі складної моделі та спрощених моделей (full model – повна модель, mod1...16 – модель, що використовує 1...16 коефіцієнтів Фур'є)

11. Жученко О.А., Цапар В.С. Метод спрощення математичних моделей об'єктів керування із розподіленими параметрами. Автоматизація технологічних і бізнес-процесів. 2015. № 1. С. 15–25.
12. Дьяконов В.П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 576 с.

### МОДЕЛЬ ФОРМОВАНИЯ УГЛЕРОДНЫХ ИЗДЕЛИЙ В РЕЖИМАХ ПОДГОТОВКИ И ПРЕССОВАНИЯ

На основе анализа существующих методов упрощения математических моделей объектов с распределенными параметрами обоснован выбор метода Фурье для упрощения математической модели процесса формирования углеродных изделий. Разработаны упрощенные математические модели для двух режимов работы – подготовки и прессования. Определены оптимальные структуры упрощенных математических моделей. Проведена их параметрическая идентификация. Исследовано соответствие результатов расчетов по упрощенной и начальной математическим моделям.

**Ключевые слова:** производство углеродных изделий, процесс формирования, математическая модель, метод Фурье, структурная и параметрическая идентификация.

### MODEL OF CARBON PRODUCTS FORMING IN PREPARATION AND PRESSING MODES

The choice of Fourier method to simplify carbon products forming process mathematical model was substantiated based on the existing simplifying mathematical models with distributed parameters methods analysis. Simplified mathematical models for two modes of operation – preparation and pressing were developed. The optimal structures of simplified mathematical models were determined. Their parametric identification was carried out. Correspondence of the calculation results using the simplified and initial mathematical models was investigated.

**Key words:** carbon products production, forming process, mathematical model, Fourier method, structural and parametric identification.