УДК 004.942
DOI https://doi.org/10.32782/2663-5941/2022.5/21

Сікора О.В.
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Протягом усього життя людина приймає рішення: чи це в побуті, чи на виробництві, чи в якійсь іншій галузі. Вона аналізує параметри, які впливають на прийняття рішень, оцінює отримані результати та використовує їх при необхідності. Процес прийняття рішень такий давній, як і саме людство. Протягом довгих років, людина приймала рішення, підбирала для них спеціальні умови, параметри і завжди намагалася одержати найкращий результат. Довгий час особа ухвалювала рішення, не використовуючи математичний апарат, а на основі здорового глузду, запасу знань та міркувань. Цей підхід до прийняття рішень не втратив свого значення і на сьогоднішній день.

Широкий розвиток техніки та її автоматизація, а також проникнення у всі сфери життя інформаційних технологій, привело до прийняття більш загальних, науково обґрунтованих рішень на основі математичного апарату для підвищення ефективності роботи. Сама постановка питання вимагала уже побудови математичної моделі, її обґрунтування та вибір найкращого рішення за наперед визначеними критеріями. Такий підхід вимагає використання певного математичного апарату, його аналізу та обґрунтування. Для таких цілей зібрано математичні методи, які дістали назву оптимізаційних методів дослідження операцій.

Стаття присвячена використанню оптимізаційних методів для розв'язування задач та технологіям розробки проєктів для них у візуальному програмному середовищі. Для розробки програмного продукту обрано візуальне середовище системи Delphi, яке дозволяє розробляти програми з використанням готових об'єктів, властивостей та методів. У програмному коді, що орієнтований на опрацювання подій, студент вказує як слід реагувати на різні події чи дії користувача, н-д, побудувати таблицю, перерахувати дані згідно правила алгоритму, побудувати графічне зображення функції тощо.

У статті продемонстровано програмну реалізацію симплексного методу для розв'язування задачі лінійного програмування, що знаходить оптимальний розв'язок та програмну реалізацію методів безумовної оптимізації унімодальної функції однієї змінної та функції двох змінних.

Ключові слова: *оптимізаційні методи, математична модель, програмний продукт, лінійне програмування, візуальне середовище програмування.*

Постановка проблеми. Методи дослідження операцій, які включають в себе методи математичного моделювання та оптимізації, складають фундамент прикладної математичної підготовки студентів. Математичні, кількісні методи призначені для розв'язання та обґрунтування приймаючих рішень оптимізаційних задач, що зустрічаються в будь-якій сфері людського життя. Операція – це дія, або сукупність дій спрямованих на досягнення певної мети. Основними її характеристиками є поставлена мета та циклічність операцій. Якщо користувач немає мети, то і відсутня операція або їх сукупність. Якщо користувач поставив перед собою завдання, лише тоді може бути сукупність операцій для досягнення поставлених цілей. Однак шляхів досягнення мети може бути багато, користувач завжди намагається вибрати оптимальний шлях для розв'язання поставлених проблем. Розв'язки оптимізаційних задач можна отримати різними шляхами, методами, з різним наближенням, з врахуванням тих чи інших факторів, параметрів, і все це вимагає обґрунтування для прийняття кінцевого оптимального рішення. Оптимальними будуть ті рішення, які за певними критеріями є найкращими серед всіх інших.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Багато праць відомих вчених присвячено розробленню і удосконаленню оптимізаційних методів та їх практичному використанню для рішення прикладних задач. Серед них: М. Жалдак, Ю. Триус [2], Е. Санніков [9], Н. Забуранна [11], О. Клочко, В. Клочко тощо. Щодо практичного використання оптимізаційних методів, то їх розкривають в роботах такі автори: В. Вовк[12], І. Бартіш, І. Дудзяний, Г. Цегелик та інші. Теоретичні відомості щодо створення програмних додатків в середовищі візуального програмування Delphi розкрили в своїх працях такі вчені як: В. Фаронов, С. Попов, А. Архангельский, В. Рубанцев, С. Федотова, Ю. Ревіч та інші.

Постановка завдання – об'єктно-орієнтований підхід до розв'язування оптимізаційних задач.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для дослідження операції необхідно побудувати її модель, яка враховує усі фактори впливу на дану операцію. Однак здебільшого врахувати всі параметри реальної операції інколи неможливо, тому враховують тільки найбільш впливові параметри. Таким чином, модель замінює оригінал операції і зберігає найбільш важливі властивості. За допомогою моделі можна навчитися правильно керувати операціями і факторами, що впливають на неї. За допомогою математичної моделі досліджувана операція перетворюється в образ з інформацією про неї. Побудова математичної моделі і її дослідження є найбільш поширеним підходом до дослідження реальних операцій, які відбуваються в різних галузях економіки і побутового життя. Інколи математичні моделі є дуже складними, але використання математичних методів та інформаційних технологій дає можливість отримати оптимальне рішення поставленої задачі. Моделі можуть бути ігрові, детерміновані та імовірнісні. Застосування теорії методів оптимізації та дослідження операцій у наукових та практичних дослідженнях довільних систем можливе лише при існуванні наступних взаємозв'язаних факторів, зокрема методів: побудови моделей оптимізації, рішення оптимізаційних задач, математичного обгрунтування прийнятих рішень, інформаційно-комунікаційного забезпечення.

Для постановки задачі дослідження операцій необхідно визначити: мету роботи об'єкта, що досліджується; наявні можливості для вирішення проблеми та фактори впливу для досягнення поставленої мети. Кожне дослідження має свої принципи і вимагає від дослідника знань, практичних навичків, інтуїції та уявлення, щоб правильно поставити мету та отримати найкраще рішення. До головних елементів математичної моделі дослідження операцій входять: змінні керування (керовані та некеровані); обмеження на цільову функцію; функція мети.

Змінні називаються керованими, якщо в процесі роботи системи користувач може міняти їхні значення для розв'язання поставленої проблеми. Переважно це змінні, значення яких необхідно знайти, щоб отримати найкращий результат. Вони обгрунтовують приймаючі рішення з множини пропонованих альтернатив. В такій же мірі користувач повинен враховувати і некеровані змінні, але міняти їх в процесі роботи системи не може, так як, наприклад, при обчисленні найбільшого врожаю на деяких посівних площах, користувач не може впливати на погодні умови. Часто некеровані змінні називають параметрами задачі оптимізації. Трапляються випадки, що некеровані змінні можуть переходити в керовані і навпаки. Обмеження цільової функції, що записуються в математичній моделі, відображають взаємозв'язок між керованими і некерованими змінними. Обмеженнями можуть бути рівняння і нерівності. Множина рішень системи обмежень називають множиною допустимих(опорних) розв'язків. Ця множина може бути багатокутником, необмеженою областю, або порожньою множиною. Нульове рішення говорить про те, що досягнення поставленої мети при таких співвідношеннях керованих і некерованих змінних неможливе, щось необхідно міняти або в процесі виробництва, або переглянути побудову математичної моделі.

Побудуємо загальну математичну модель задачі дослідження операцій. Функція мети являє собою певну математичну функцію, яка зв'язує незалежні змінні, залежні змінні, параметри системи та величину досягнення мети:

$$F(X)=F(x_j, y_r, c_k) \qquad (1)$$

Розв'язати задачу означає, знайти такі значення керованих змінних $x_j \, (j=\overline{1,n})$, які б перетворили фунцію мети (1) в оптимальне значення. Процес вибору керованих змінних завжди залишаються обмеженими некерованими змінними та параметрами системи. В загальному випадку систему обмежень можна записати так:

$$g_i(x_j, y_r, c_k)\{\le = \ge\} b_i, \; i=\overline{1,m}. \qquad (2)$$

Залежність (2) називають системою обмежень, або системою умов задачі. Вирази (1) та (2) задають математичну модель операції.

Побудуємо математичну модель проблемної операції на конкретному прикладі.

Приклад 1. Підприємець відгодовує курей і гусей. Для цього він використовує три види сировини, а саме: пшеницю, овес і кукурудзу. Витрати сировини на одну тварину, запаси сировини та вартість від реалізації однієї штуки курей та гусей подані в таблиці 1. Визначити кількість курей і кількість гусей, які необхідно виростити, після реалізації яких отримаємо найбільший прибуток.

Таблиця 1

Вид сировини	***Витрати сировини на відгудівлю однієї штуки***		***Запаси сировини***
	курей	***гусей***	
Пшениця	2	3	180
Овес	4	1	240
Кукурудза	6	7	426
Прибуток від однієї шт	16	6	

Розв'язання: Позначимо через x_1 – кількість вирощених курей; x_2 – кількість вирощених гусей. Отже вектор керованих змінних $X(x_1, x_2)$. Функція мети, тобто наш прибуток дорівнює: $F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$. Кількість пшениці сировини, що витрачається, повинна задовільняти наступним нерівністям:

$2x_1 + 3x_2 \le 180$ – пшениці; $4x_1 + x_2 \le 240$; – вівса; $6x_1 + 7x_2 \le 426$. – кукурудзи.

Отже, ми отримали систему трьох нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426. \end{cases}$$

$$F = 16x_1 + 6x_2 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Виділяють *лінійне програмування* – функції $f(X)$ і $g_i(x_j, y_r, c_k)$ лінійні, *квадратичне* – $f(X)$ є квадратична форма, а функції $g_i(x_j, y_r, c_k)$ лінійні, *нелінійне програмування*, коли $f(X)$ і $g_i(x_j, y_r, c_k)$ – нелінійні функції [2].

В залежності від кількості невідомих, математичні моделі бувають одновимірні (одна вхідна керована змінні і одна вихідна) та багатовимірні (існує декілька вхідних і декілька вихідних шуканих змінних, їх кількості можуть бути рівними або нерівними).

При наявності обмежень на введені шуканні невідомі ми маємо задачу умовної оптимізації, якщо такі обмеження не накладаються на невідомі величини, то це задача безумовної оптимізації. Важливим елементом у процесі розв'язування оптимізаційних задач є класифікація моделей, оскільки їх алгоритми рішення адаптовані до конкретного типу[1].

Основним методом розв'язування задач лінійного програмування є симплексний метод, ідея якого полягає в переході від одного опорного розв'язку до іншого, із покращенням значення функції мети, і таким чином за скінченну кількість кроків буде знайдено рішення задачі, або з'ясовано, що вона не має розв'язків[2]. Реалізуємо алгоритм у системі візуального програмування для рішення Прикладу 1. Рис. 1 містить першу і останню симплексну таблицю розв'язування задачі. В цій формі користувач зобов'язаний ввести вхідні дані, або їх викликати за допомогою меню форми.

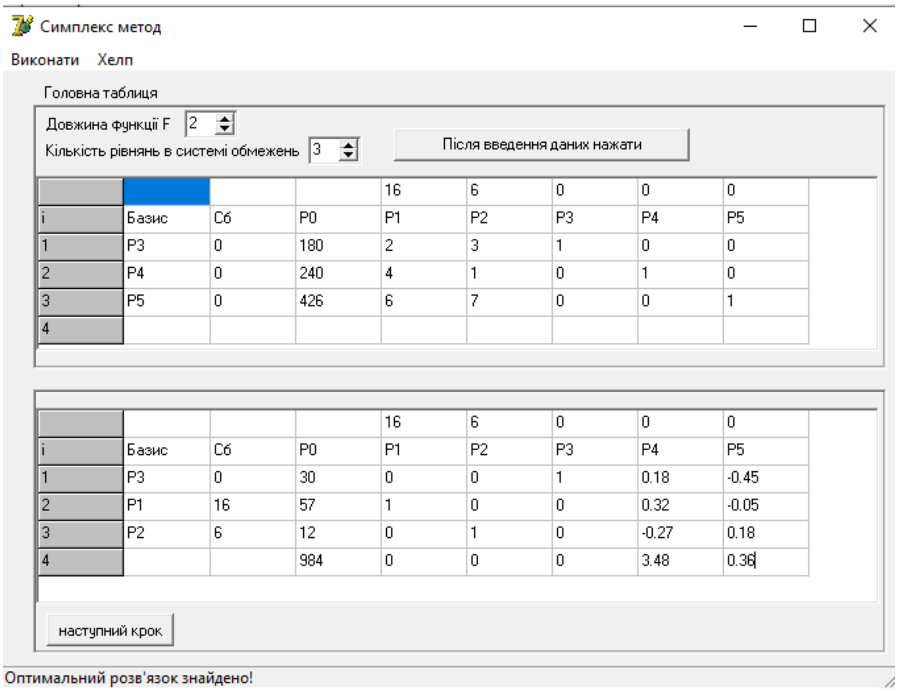

Рис. 1 Симплексні таблиці для прикладу 1

```
for i := k to stp.ColCount-1 do
  for j := 1 to stp.RowCount-2 do
    if j <> main then
        st.Cells[i,j] := FloatToStr(StrToFloat(stp.Cells[i,j]) -
                StrToFloat(stp.Cells[maxd,j])*StrToFloat(stp.Cells[i,main])/
                StrToFloat(stp.Cells[maxd,main]));
for i := 2 to stp.RowCount-2 do
  if i <> main then
   begin
    st.Cells[1,i] := stp.Cells[1,i];
    st.Cells[2,i] := stp.Cells[2,i];
   end;
st.Cells[3,st.RowCount-1] := FloatToStr(Answer(st2));
```

Рис. 2. Заповнення симплекс таблиці за правилом трикутника

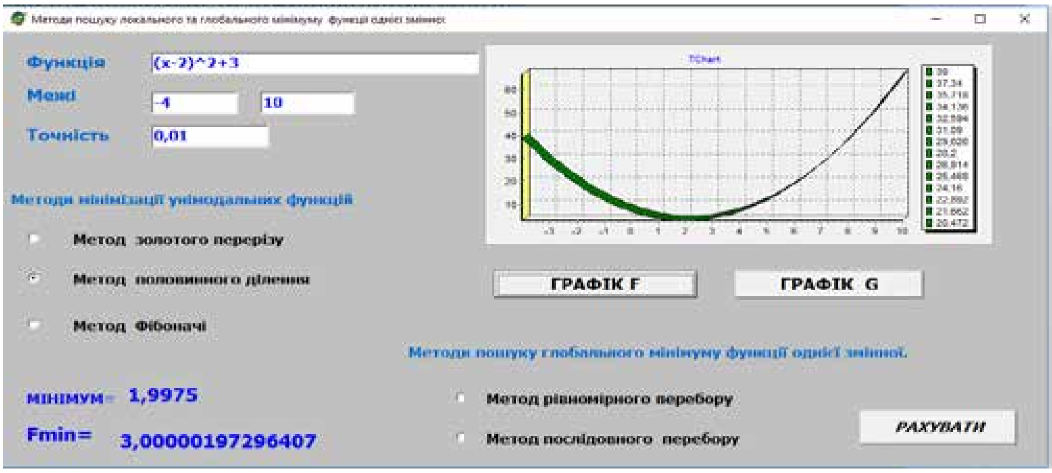

Рис. 3. Форма результату роботи методу половинного ділення для пошуку локального мінімуму функції однієї змінної

```
    if RadioButton2.Checked then begin
     a:=StrToFloat(Edit2.Text);
  b:=StrToFloat(Edit3.Text);
  acc:=StrToFloat(Edit4.Text);
 del:=acc/3;
    repeat
  x1:=(a+b-del)/2;
  x2:=(a+b+del)/2;
  f1:=IntFunction(x1);
  f2:=IntFunction(x2);
      if f1<=f2 then begin
     a:=a;b:=x2;xp:=a;fp:=f1;end
     else begin a:=x1;b:=b;xp:=b;fp:=f2 end;
  until Abs(b-a)<acc;
    Label12.Caption:=FloatToStr(xp);
    Label13.Caption:=FloatToStr(fp);
    end;
```

Рис. 4. Фрагмент програмного коду методу дихотомії

Фрагмент програмної реалізації симплекс-методу подано на рис. 2.

Іноді для знаходження оптимальних розв'язків можуть бути застосовані методи відшукання екстремальних значень функцій однієї та багатьох дійсних змінних. Задачі такого типу відносяться до задач безумовної оптимізації. Для відшукання рішень таких задач існують чисельні оптимізаційні

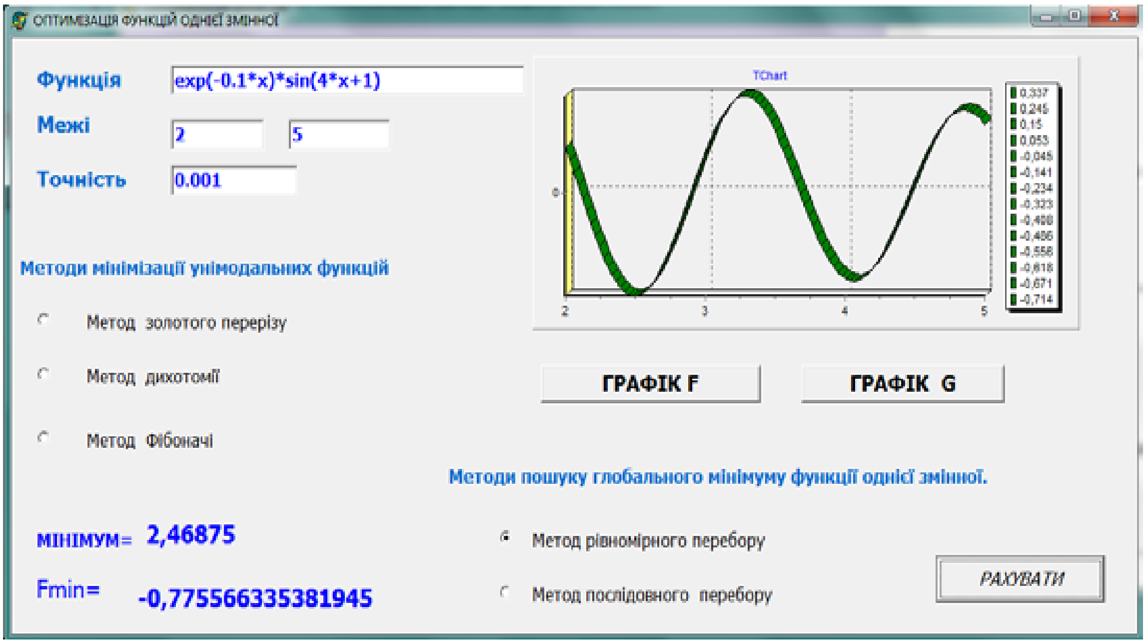

Рис. 5. Пошук мінімуму методом рівномірного перебору

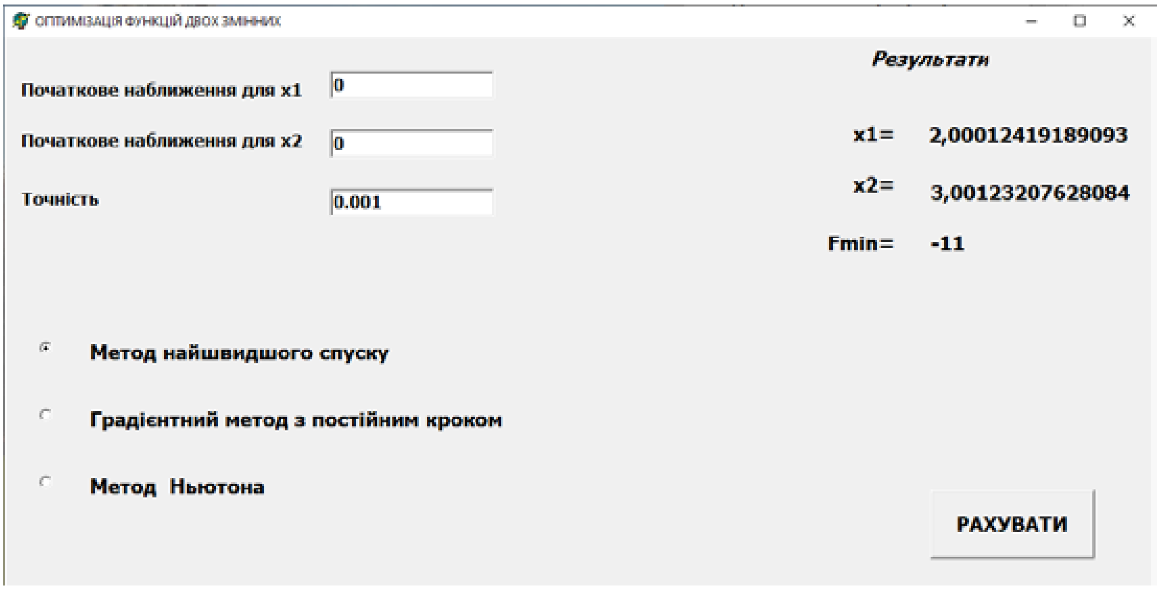

Рис. 6. Форма оптимізації функції двох змінних за методом найшвидшого спуску

методи. Якщо якщо одновимірна цільова функція унімодальна в області, яку досліджуємо то для відшукання оптимуму можна використати метод половинного ділення, метод золотого перетину, метод Фібоначі та інші.

Приклад 2. Знайти мінімальне значення функції $y = (x-2)^2 + 3$ на відрізку [-4, 10] методом половинного ділення з точність $\varepsilon = 0{,}0$[illegible] .

На рис. 3 відображена форма результату роботи методу половинного ділення для пошуку локального мінімуму функції однієї змінної та графічне зображення функції на заданому інтервалі.

Фрагмент програмної реалізації чисельного методу дихотомії для знаходження локального мінімуму унімодальної функції зображено на рис. 4.

Для пошуку глобального мінімуму функції однієї змінної доцільно використати метод рівномірного чи послідовного перебору. На рис. 5 відображена форма результату роботи методу рівномірного перебору для пошуку глобального мінімуму функції однієї змінної та графічне зображення функції на заданому інтервалі.

Для оптимізації функції кількох змінних можна використовувати методи нульового порядку, для

```
if RadioButton1.Checked then begin
   a:=StrToFloat(Edit1.Text);
   b:=StrToFloat(Edit2.Text);
   acc:=StrToFloat(Edit3.Text);
       xs[1]:=a; xs[2]:=b;

2:  nor:=Sqrt(Sqr(f1(xs[1],xs[2]))+Sqr(f2(xs[1],xs[2])));
      if Abs(NOr)<acc then begin Label3.Caption:=FloatToStr(xs[1]);
                      Label4.Caption:=FloatToStr(xs[2]);
                      Label9.Caption:=FloatToStr(f(xs[1],xs[2]));goto 3
                           end;

1:  xn[1]:=xs[1]-l*f1(xs[1],xs[2]);
      xn[2]:=xs[2]-l*f2(xs[1],xs[2]);
      if f(xn[1],xn[2])<f(xs[1],xs[2]) then
     begin      xs[1]:=xn[1];xs[2]:=xn[2]; goto 1     end
     else  begin xs[1]:=xn[1];xs[2]:=xn[2];l:=l/e; goto 2
           end;
end;
```

Рис. 7. Програмна реалізація методу найшвидшого спуску

реалізації яких потрібно тільки значення функції, методи першого порядку, де застосовуються перші похідні функції та методи другого порядку що містять другі похідні функції.

Приклад 3. З використанням методу найшвидшого спуску, знайти наближене значення координат точки мінімуму функції $f = 2x_1^2 - 5x_1 - x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2$. Почати пошук з точки (0, 0).

На рис 6 відображена форма для роботи із методами пошуку мінімуму функції двох змінних. На цій формі можна обирати один із методів: методи першого порядку (метод найшвидшого спуску та градієнтний метод з постійним кроком) та метод Ньютона-метод другого порядку.

Фрагмент програмної реалізації методу найшвидшого спуску зображений на рис. 7.

Висновок. Сьогодні особливе місце займає проблема вибору найкращого варіанта з усіх можливих. Методи безумовної та умовної оптимізації широко використовуються у різних галузях знань та практичній діяльності. Це стосується і підбору збалансованого харчування, оптимізації асортименту продукції, оптимального розподілу ресурсів, оптимізації транспортних перевезень та інші. Знання методології та програмних засобів дозволяють за допомогою розроблених програмних продуктів за мінімальний час і без великих зусиль знаходити оптимальні рішення таких прикладних задач. Сам процес створення проєкту, наприклад реалізація симплексного методу, що починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків повертає оптимальний план задачі лінійного програмування, є досить затратним по часу, громіздким та непростим. Однак створюючи такий програмний продукт, студенти отримують навички роботи в програмному середовищі і у використанні оптимізаційних методів.

Список літератури:

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: підручник. Київ, 2006. 816 с.
2. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник. Черкаси, 2005. 608 с.
3. Самсонов В.В. Алгоритми розв’язання задач оптимізації: навчальний посібник. Київ, 2014. 300 с.
4. Томашевський В.М. Моделювання систем: підручник. Київ, 2007. 352 с.
5. Костевич Л.С. Математическое программирование: учебное пособие. Минск, 2003. 424 с.
6. Бех О.В., Городня Т.А., Щербак А.Ф. Математичне програмування : навчальний посібник. Львів, 2014. 200 с.
7. Вітлінський В.В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування: навч.-метод. посіб. для сам. вивчення дисципліни. Київ, 2001. 248 с.
8. Казарєзов А.Я., Верланов Ю.Ю. Дослідження операцій: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. освіти. Ч.1. Математичне програмування. Миколаїв, 2003. 83 с.

Sikora O.V. OBJECT-ORIENTED APPROACH TO SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS

Throughout life, a person makes decisions, whether it is at home, at work, or in some other field. She analyzes the parameters that influence decision-making, evaluates the obtained results and uses them if necessary. The decision-making process is as old as humanity itself. For many years, a person made decisions, selected special conditions for them, influencing parameters and always tried to get the best result. For a long time, a person made decisions not using a mathematical apparatus, but on the basis of common sense, stock of knowledge and reasoning. This approach to decision-making has not lost its importance even today.

The wide development of technology, its automation and penetration of information technology into all spheres of life, led to the adoption of more general, scientifically based decisions based on mathematical apparatus to increase work efficiency. The very formulation of the question required the construction of a mathematical model, its substantiation and the selection of the best solution according to a predetermined criterion. This approach requires the use of a certain mathematical apparatus, its analysis and justification. For such purposes, mathematical methods were collected, which received the name of optimization methods of operations research.

The article is devoted to the use of optimization methods for solving problems and technologies for developing projects for them in a visual programming environment. For the development of the software product, the visual environment of the Delphi system was chosen, which allows you to develop programs using ready-made objects, properties and methods. In the program code focused on processing events, the student indicates how to react to various events or user actions, n-d, build a table, list data according to the rules of the algorithm, build a graphic representation of the function, etc.

The article demonstrates the software implementation of the simplex method for solving the problem of linear programming, which finds the optimal solution, and the software implementation of the methods of unconditional optimization of the unimodal function of one variable and the function of two variables.

Key words: *optimization methods, mathematical model, software product, linear programming, visual programming environment.*