УДК 519.876.2 : 623.021:005

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ СРЕДСТВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕВЗВЕШЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРАХ

к.т.н. В.Б. Кононов
(представил д.ф.-м., проф. А.А. Александрова)

В статье рассмотрен алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

Постановка задачи. При решении задач планирования в конфликтных ситуациях необходимо определить законы оптимального управления распределением разнородных сил и средств, имеющихся у оперирующей стороны, исходя при этом из поставленных целей, складывающейся ситуации и вероятных действий противника.

Планирование и последующее управление распределением разнородных сил и средств, а также управление распределением сил и средств резерва в условиях современной конфликтной ситуации представляет собой важную военно-научную задачу, актуальность которой определяется необходимостью создания в Вооружённых Силах Украины автоматизированной системы управления войсками и оружием.

Анализ литературы. Задачи оптимального управление распределением неоднородных сил и средств оперирующих сторон рассматривались в работах [1 – 7]. Так, в [1] сформулирована задача исследования и предложены критерии оптимального распределения сил и средств оперирующей стороны в динамических процессах конфликтных ситуаций. В [2] рассмотрен метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации. В [3] рассмотрена методика решения задач определения соотношения сил и средств сторон для случая разнородных средств. В [4] изложена методика решение задачи оптимального управления распределением разнородных сил и средств конфликтующей стороны по критерию минимума среднего суммарного количества основных сил противника. В [5] рассматривается решение задач оптимального управления распределением неоднородных сил и средств конфликтующей стороны по критериям максимума среднего суммарного количества основных сил в конце конфликтной ситуации, минимума среднего суммарного количества основных сил противника и максимума среднего суммарного количества основных сил за весь период конфликтной ситуации. В [6] ставится задача оптимального управления распределением разнородных сил и средств сторон по критериям максимума и минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях полной и неполной определённости и постоянных и переменных параметрах распределения сил и средств стороны A. В [7] рассматривается алгоритм оптимального управления распределением разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противоборствующей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости при постоянных параметрах распределения сил и средств стороны A. Однако в этих работах не рассматривался алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

Целью статьи является разработка алгоритма решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

Описание алгоритма. Математические модели оптимального распределения разнородных сил и средств стороны А, описанные в статьях [1 – 5], предполагают, что оперирующая сторона А владеет информацией о стратегии, которой будет придерживаться сторона B.

Рассмотрим задачу оптимального распределения разнородных сил и средств стороны A, в которой сторона A выбирает свои управляющие параметры $\alpha(t)=\left\|\alpha_{ji}(t)\right\|_{n,m}$ так, чтобы средневзвешенное количество основных сил стороны B было минимальным при известной стратегии распределения сил и средств стороны B. В данной задаче зависимость матрицы управляющих параметров $\alpha(t)$ от времени позволяет учитывать маневр сил и средств, т.е. учитывать реально возникающую необходимость перенацеливания сил и средств оперирующей стороны в зависимости от ситуаций, складывающихся в ходе ведения конфликтной ситуации.

Построим алгоритм решения данной задачи, математическая модель которой имеет вид:

$$\min_{\{\alpha(t)\}} \sum_{j=1}^{n} w_j y_j(T) = \min_{\{\alpha(t)\}} J(\alpha(t)); \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ji}(t) a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ji}(t) = 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{ji}(t) \ge 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{3}$$

где $x_i(t)$, $y_i(t)$ – математические ожидания количества средств сторон A и B, сохранившихся к моменту времени t; m, n – количество типов сил и средств сторон A и B соответственно; t – текущее время конфликтной ситуации; T – заданное время конфликтной ситуации; $w_j\left(j = \overline{1, n_1}\right)$ – коэффициент важности основного средства j-го типа стороны B; $\beta_{ij}\left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right)$ – заданные параметры распределения сил и средств стороны B; $\alpha_{ji}\left(j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \le t \le T\right)$ – искомые управляющие параметры распределения сил и средств стороны A по силам и средствам стороны B; $x_i^0, y_j^0 \left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ – количество сил и средств i-го типа стороны A и j-го типа стороны B в начале конфликтной ситуации; $a_{ji}, b_{ij}\left(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}\right)$ – эффективные скорострельности средств i-го типа стороны A и j-го типа стороны B соответственно.

Для решения задачи (1) – (3) необходимо задать класс функций – управлений. В прикладных задачах обычно рассматриваются непрерывные, кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие, а также измеряемые управления. В данном случае матричная функция $\left\|\alpha_{ji}(t)\right\|_{n,m}$ как функция, определяющая распределение средств по целям в каждый момент времени t, принадлежит классу кусочно-постоянных функций. Проблема состоит в том, что определить заранее точки разбиения отрезка $[0, T]$, как моменты времени перенацеливания, маневра и т.п. средств по объектам противника в ходе конфликтной ситуации в общем случае невозможно. Более того, проблематично определить даже количество таких точек в реальных условиях ведения конфликтной ситуации, когда применяемые оперирующими сторонами средства разнородны.

Очевидно, что чем больше точек переключения значений кусочно-постоянных управлений задать, тем глубже оптимум функционала (1). С другой стороны, может оказаться, что увеличение точек переключения либо незначительно улучшает оптимальное значение функционала, либо невозможно в силу показателей средств или возможностей организации конфликтной ситуации.

Суть предлагаемого алгоритма состоит в последовательном численном решении задачи (1) – (3) сначала для класса постоянных функций – управлений (алгоритм решения рассмотрен в работе [7]), затем для классов кусочно-постоянных функций – управлений соответственно с одной, двумя и т.д. точками переключения. При этом, исходя из требований ведения конфликтной ситуации и показателей средств, определяется длина Δ минимальных отрезков разбиения исходного промежутка $[0, T]$:

$$T / M \geq \Delta,$$

где M – количество отрезков разбиения. Следовательно, максимальное количество отрезков разбиения равно:

$$M_{max} = T / \Delta.$$

Для решения предлагается использовать следующую последовательность задач Майера, в которых $\alpha_M(t) = \left\| \alpha_{M_{ji}}(t) \right\|_{n,m}$ – матричная функция кусочно-постоянных функций управлений с $(M – 1)$-й точкой переключения:

$$\min_{\{\alpha_M(t)\}} \sum_{j=1}^{n} w_j y_j(T) = \min_{\{\alpha_M(t)\}} J(\alpha_M(t)); \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{M_{ji}}(t) a_{ji} x_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{5}$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j(0) = y_j^0, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; \quad \beta_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{M_{ji}}(t) = 1, \quad i = \overline{1, m}; \quad \alpha_{M_{ji}}(t) \geq 0; \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}; \quad 1 \leq M \leq M_{max}. \end{cases} \tag{6}$$

Вычисления прекращаются, если

$$\left| J\left[\alpha_M^*(t)\right] - J\left[\alpha_{M+1}^*(t)\right] \right| \langle\, \varepsilon; \quad \varepsilon \,\rangle\, 0; \quad 1 \leq M \leq M_{max}, \tag{7}$$

либо при $M = M_{max}$, где $\alpha_M^*(t), \quad \alpha_{M+1}^*(t)$ – оптимальные управления для задачи (4) – (6). Применим в качестве численного метода решения задачи (4) – (6) метод условного градиента. Однако в силу зависимости матрицы управлений $\alpha_M(t)$ от времени возможность использования алгоритма, изложенного в работе [7], требует обоснования. При этом будем исходить из следующих соображений. Прежде всего покажем возможность решения рассматриваемых подзадач методом условного градиента. Экстремальная задача

$$\min_{\alpha_M(t) \in D_M} \left\langle J'\left[\alpha_M^k(t)\right], \alpha_M(t) \right\rangle, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где D_M – множество матричных функций с кусочно-постоянными зависимостями, удовлетворяющими соотношения (6) по $\alpha_{M_{ji}}(t)$, может быть решена методом условного градиента, постольку минимум функционала $J'\left[\alpha_M^k(t)\right] = \left\| a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \right\|_{n,m}$ может быть представлен таким образом:

$$\min_{\alpha_M(t) \in D_M} \left\langle J'\left[\alpha_M^k(t)\right], \alpha_M(t) \right\rangle =$$

$$= \min_{\alpha_M(t) \in D_M} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \alpha_{M_{ji}}(t) \right] dt =$$

$$= \min_{\alpha_M(t) \in D_M} \sum_{p=1}^{M} \int_{\frac{(p-1)T}{M}}^{\frac{pT}{M}} \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_i(t) \eta_j(t) \alpha_{M_{jip}} \right] dt = \tag{8}$$

$$= \sum_{p=1}^{M} \min_{\left\{\alpha_{M_{jip}}\right\}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_{\frac{(p-1)T}{M}}^{\frac{pT}{M}} \left[a_{ji} x_i(t) \eta_j(t)\, dt \right] \alpha_{M_{jip}},$$

$$\alpha_{M_{ji}}(t) = \alpha_{M_{jip}} = \text{const}; \quad t \in \left[\frac{(p-1)T}{M}, \frac{pT}{M}\right]; \quad p = \overline{1, M};$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{M_{jip}} = 1, \quad i = \overline{1, M}; \quad \alpha_{M_{jip}} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}; \quad p = \overline{1, M}.$$

Соотношение (8) позволяет найти вспомогательное приближение, являющееся первым этапом предлагаемого алгоритма. Интегралы в соотношении (8) вычисляются по формуле прямоугольников:

$$I_{M_{ji}} = \int\limits_{\frac{(p-1)T}{M}}^{\frac{pT}{M}} x_i(t)\,\eta_j(t)\,dt \approx \frac{T}{N_p} \sum_{s=0}^{N_p-1} x_i(t_s)\,\eta_j(t_s);$$

$$i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}; \quad p = \overline{1, M},$$

где N_p – количество промежутков разбиения отрезка $\left[\frac{(p-1)T}{M}, \frac{pT}{M}\right]$, а значения функций $x_i(t_s), \eta_j(t_s)$ определяются в результате численного решения следующих систем дифференциальных уравнений по методу Рунге–Кутта 4-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_{ij} y_j(t); \\ \dfrac{dy_j}{dt} = -\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha^{k}_{M_{jip}} a_{ji} x_i(t); \end{cases} \tag{10}$$

$$x_i\left[\frac{(p-1)T}{M}\right] = x_i^{\frac{(p-1)T}{M}}; \quad i = \overline{1, m}; \quad y_j\left[\frac{(p-1)T}{M}\right] = y_j^{\frac{(p-1)T}{M}}; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha^{k}_{M_{jip}} a_{ji} \eta_j(t), \quad i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{d\eta_j}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_{ij} b_{ij}\, \varphi_i(t), \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{11}$$

$$\varphi_i\left[\frac{pT}{M}\right] = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \eta_j\left[\frac{pT}{M}\right] = -w_j; \quad j = \overline{1, n}.$$

Интегрирование сопряжённой системы (10) проводится в обратном направлении от $t = \frac{pT}{M}$ к $t = \frac{(p-1)T}{M}$.

Минимум в (8) достигается при

$$\overline{\alpha}^{k}_{M\,jip} = \begin{cases} 1, & j = j_k, \quad i = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, M}; \\ 0, & j \neq j_k, \quad i = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, M}, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\alpha(j_k, i, p)_M = \underset{1 \le j \le n}{\arg\min}\, a_{ji} I_{M_{ijp}}; \quad i = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, M}. \tag{13}$$

На втором этапе предлагаемого алгоритма определим шаг поиска.

Очередное (k + 1)-е приближение определится из соотношения

$$\alpha^{k+1}_M(t) = \alpha^k_M(t) + \rho_{Mk}\left[\overline{\alpha}^k_M - \alpha^k_M\right]; \quad t \in [0, T], \tag{14}$$

где

$$\overline{\alpha}^k_M(t) = \left\| \overline{\alpha}^k_{M\,jip}(t) \right\|_{n,\, m};$$

$$\overline{\alpha}^k_{M\,jip}(t) = \overline{\alpha}^k_{M\,jip}; \quad t \in \left[\frac{(p-1)T}{M}, \frac{pT}{M}\right]; \quad p = \overline{1, M};$$

$$0 \le \rho_{Mk} \le 1.$$

Длина шага ρ_{Mk} находится в результате решения задачи

$$\varphi(\rho_{Mk}) = \min_{0 \le \rho_M \le 1} \varphi(\rho_M) =$$

$$= \min_{0 \le \rho_M \le 1} J\left[\alpha^k_M(t) + \rho_M\left(\overline{\alpha}^k_M(t) - \alpha^k_M(t)\right)\right]; \quad t \in [0, T]. \tag{15}$$

Точка минимума в (15) аппроксимируется значением

$$\rho_k = 0{,}25 + \frac{0{,}25[\varphi(0) - \varphi(0{,}5)]}{0{,}5\varphi(0) - \varphi(0{,}5) + 0{,}5\varphi(1)}. \tag{16}$$

На третьем этапе алгоритма вводим критерий оптимальности.

Обобщая критерий останова алгоритма [7], получим

$$\Delta_{Mk} = \left| J(\alpha^{k+1}_M) - J(\alpha^k_M) \right| \langle\, \varepsilon; \quad \varepsilon \,\rangle\, 0$$

$$\text{или} \quad \Delta_{Mk} = \left| \sum_{j=1}^{n} w_j \left[y^{k+1}_M(T) - y^k_M(T)\right] \right| \langle\, \varepsilon, \tag{17}$$

где $\{\alpha^k_M(t), \quad x^k(t), \quad y^k(t)\}$ – k-ое приближение решения задачи (4) – (6).

Выводы. 1. В статье описан разработанный алгоритм решения задачи оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны.

2. Алгоритм оптимального распределения разнородных средств по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества основных сил противостоящей стороны в конце конфликтной ситуации в условиях определённости и переменных параметрах распределения сил и средств оперирующей стороны можно использовать при решении задач, связанных с созданием автоматизированной системы управления войсками и оружием ВС Украины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кононов В.Б., Евстрат Д.И., Рафальский Ю.И., Бабий И.Ф. Задачи оптимального распределения сил и средств в динамических процессах конфликтных ситуаций // Системи обробки інформації. – Х.: ХФВ «Транспорт України». – 2001. – Вип. 1 (11). – С. 129 – 133.*
2. *Кононов В.Б. Метод решения задачи распределения сил и средств в конфликтной ситуации // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 2 (18). – С. 155 – 158.*
3. *Кононов В.Б., Рафальский Ю.И.,Гурин А.П. Оптимальное управление распределением средств резерва // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 5 (21). – С. 45 – 47.*
4. *Кононов В.Б., Нестеренко А.П., Кожушко Я.Н. Оптимальное управление распределением неоднородных сил и средств по критерию минимума среднего суммарного количества // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 6 (22). – С. 277 – 280.*
5. *Кононов В.Б. Задачи оптимального управления распределением неоднородных сил и средств // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2002. – Вип. 1 (17). – С. 59 – 62.*
6. *Кононов В.Б. Оптимальное управление распределением разнородных сил и средств по критериям максимума средневзвешенного математического ожидания суммарного количества // Моделювання та інформаційні технології.– К.: НАНУ, ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова. – 2004. – Вип. 26. – С. 87 – 92.*
7. *Кононов В.Б. Алгоритм оптимального распределения разнородных сил и средств оперирующих сторон по критерию минимума средневзвешенного математического ожидания // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2004. – Вип. 9 (37). – С. 59 – 65.*

Поступила 17.12.2004

***КОНОНОВ Владимир Борисович**, канд. техн. наук, доцент, нач. кафедры ХУ ВС. В 1987 году окончил ХВВКИУ РВ. Область научных исследований – исследование операций.*