

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ СЛОЖНОЙ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В.Ю. Дубницкий<sup>1</sup>, В.Л. Чернявский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Харьковский банковский институт Украинской академии банковского дела НБУ,  
<sup>2</sup>Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры)

*На основе аксиом теории полезности предложены требования к функции оценки состояния сложной физико-химической системы, взаимодействующей с внешней средой. Определены возможности применения оценок состояния различного вида и выбрана наиболее подходящая по физическому смыслу.*

**теория полезности, оценка состояния, физико-химическая система**

**Постановка задачи.** В настоящее время термин «состояние системы» применяется при изучении объектов различной природы и различного назначения.

Словосочетания «состояние объекта», «состояние материала» используют довольно часто не только в качестве лингвистической переменной, а скорее вербального определения, часто допускающего весьма произвольное толкование. Поэтому необходимо сформулировать общие требования к различным вариантам оценки состояния сложной физико-химической системы (СФХС), взаимодействующей с внешней средой, учитывающей все многообразие условий её эксплуатации и, следовательно, многообразие функций, которые СФХС должна выполнять.

**Цель работы.** Формулировка и обоснование требований к виду и свойствам функции оценки состояния СФХС, изменяющей свои характеристики в процессе взаимодействия с внешней средой.

**Анализ литературы.** При оценке систем различной природы обычно исходят из того, что понятие состояния является первичным, т.е. определяемым через более простые понятия, оцениваемые по результатам первичных измерений. Результаты этих измерений обрабатывают по заранее заданным правилам, совокупность которых определяют как оператор оценки состояния системы [1]. Например, в теории автоматического регулирования состоянием системы называют вектор ее фазовых координат [1], в квантовой механике состоянием системы из  $n$  спинов называют вектор единичной длины в  $2^n$ -мерном комплексном пространстве [2]. В тео-

рии технических систем состоянием называют множество коэффициентов, равных отношению фактических и заданных характеристик объекта [6].

Учитывая особенности психологического восприятия оценки состояния системы ее возможным пользователем желательно, чтобы эта оценка была скалярной величиной. Известно [3], что свёртка показателей, характеризующих различные свойства состояния в скалярную величину, широко распространена при решении задач векторной оптимизации [4].

Наиболее распространено выражение вида

$$S_t = \sum_{i=1}^n (\alpha_i K_i^t)^{1/t}, \quad t \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

при условии, что 
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad \forall \alpha_i > 0,$$

где  $\alpha_i$  – весовые коэффициенты, отражающие важность или значимость  $i$ -го состояния (вес отдельного признака).

При  $t = 1$  получаем линейную свертку вида

$$S = \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i. \quad (2)$$

Без ограничения общности примем, что  $\alpha_1 = \alpha_2 \dots \alpha_i \dots = \alpha_n$ .

В (1) и (2) принято, что  $K_i$  – операнд оператора, оценивающего  $i$ -ю составляющую понятия «состояние».

Кроме свертки вида (1) – аддитивной свертки, используют мультипликативную свертку вида

$$S = \prod_{i=1}^n K_i^{\alpha_i}. \quad (3)$$

В [4, 5] были введены величины  $S_t$  для оценки состояния СФХС вида:

$$S_t = \sum_{i=1}^n \frac{|x_{it} - x_{ik}|}{x_{ik}}; \quad (4) \quad S_t = \prod_{i=1}^n \frac{|x_{it} - x_{ik}|}{x_{ik}}, \quad (5)$$

где  $x_{it}$  – значение  $i$ -го свойства СФХС во время  $t$ ;  $x_{ik}$  – пороговое (допустимое) значение  $i$ -го свойства системы, определяемое исходя из условий задачи. Как правило, величина  $x_{ik}$  соответствует пределу безопасной эксплуатации системы. Таким образом, для обоснованного выбора вида оценки состояния СФХС необходимо сформулировать требования, которым эта оценка должна удовлетворять.

**Изложение результатов исследования.** Ввиду того, что конечным предназначением СФХС является удовлетворение определенных потребительских свойств, то при построении оценки состояния следует предусмотреть, чтобы она давала возможность оценить полезность системы для при-

менения её в конкретных условиях. Известны два определения функции полезности для технических систем. Первое принято в теории векторной оптимизации и гласит, что «под полезностью технической системы понимают количественную меру степени выполнения данной системой своего функционального назначения». Следует отметить, что это определение близко к определению эффективности системы введенному в [6].

В теории принятия решений [7] для определения понятия полезности принята система из пяти аксиом: сравнимости (полноты); транзитивности; сильной независимости; измеримости; ранжирования.

Аксиома сравнимости означает, что если состояние  $x$  предпочтительнее  $y$  ( $x \succ y$ ), то оценка  $S_x > S_y$  или  $S_x < S_y$ . Первое условие соответствует случаю «больше – лучше», второе – случаю «меньше – лучше».

Аксиома транзитивности означает возможность строгого упорядочения состояния по предпочтительности.

Аксиома третья и пятая не соответствуют условиям нашей задачи, т.к. они ориентированы на оценку в условиях игровой ситуации, которая в рамках решаемой задачи отсутствует.

Четвертая аксиома (аксиома измеримости) особо важна для оценки состояния технических систем. Применительно к нашей задаче ее можно интерпретировать так.

Существуют такие значения аргументов функции, характеризующей состояние материала, не все равные нулю, что при этих значениях функция равна нулю. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  – аргументы  $S_t$ . Тогда

$$\left[ \exists ((x_i \neq 0) \wedge (x_i = x_{\text{inp}})) \right] \Rightarrow [S_t = 0].$$

Иными словами это означает, что есть такие значения аргументов  $x_{\text{min}}$ , что система, существуя как физический объект, становится неспособной выполнять свои потребительские функции.

Кроме того, вид функции оценки состояния СФХС должен удовлетворять некоторым дополнительным условиям.

Условию прагматичности, т.е. направление изменения численного значения величины  $S_t$  должно совпадать с направлением изменения потребительских свойств материала.

Условию физичности, т.е. соответствия физического смысла величины  $S_t$  его численному значению (выполнение аксиомы измеримости). Если одно из слагаемых в (4) равно нулю, то  $S_t \neq 0$ , что противоречит физической сущности явления, т.к. состояние есть оценка комплексная и при исчерпании ресурса хотя бы по одной переменной система становится непригодной к эксплуатации. В этом смысле оценка (5) свободна от указанного недостатка.

Пусть на практике недостаток запаса (ресурса) по аргументу  $x_i$ , т.е. величина  $\Delta_i = |x_i - x_{ik}|$  может частично компенсироваться избытком ресур-

са по переменной  $x_j$  [8]. В этом случае оценка состояния должна допускать возможность оценивать количественно величину такой компенсации.

Одним из способов решения этой задачи есть построение функции эластичности. Для этого функция  $S_t$  должна быть дифференцируема хотя бы один раз по каждому аргументу  $x_i$  и допускать существование вторых и выше частных производных по каждому аргументу функции  $S_t$  в области ее существования. Поэтому введём условие (6) эквивалентное (4) и (5) по физическому смыслу, но допускающее дифференцирование по каждому из аргументов:

$$S_t = \prod_{i=1}^n \frac{x_{it} - x_{ik}}{x_{ik}} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{x_{ik} - x_{it}}{x_{ik}}. \quad (6)$$

Окончательно, все вышеизложенное можно свести в табл. 1.

Таблица 1

Выполнение требований к оценке состояния в зависимости от ее вида

Наименование требования	Вид функции (номер выражения)		
	(4)	(5)	(6)
Аксиома полноты	+	+	+
Аксиома транзитивности	+	+	+
Аксиома измеримости	-	+	+
Условие прагматичности	+	+	+
Условие дифференцируемости	-	-	+
Возможность построения функции эластичности	-	-	+

Примечание: знак «+» означает выполнение требования, знак «-» – невыполнение.

Из табл. 1 следует, что выражение вида (6) следует принять в качестве оценки состояния, как удовлетворяющее всем предъявленным требованиям.

В качестве примера рассмотрим вариант СФХС, описанный в [5], когда оценку состояния материала-носителя свойств системы определяют в виде функции двух переменных:  $x_1$  – величины водопоглощения материала (бетона),  $x_2$  – показателя рН.

В этом случае оценка состояния бетона, соответствующая условию (6) примет вид

$$S_t = \frac{x_{1k} - x_{1t}}{x_{1k}} \cdot \frac{x_{2t} - x_{2k}}{x_{2k}}. \quad (7)$$

Следуя работе [9] найдем эластичность функции  $S_t$  по каждому из аргументов

$$E_{x_1}(S_t) = \frac{dS_t}{dx_1} \cdot \frac{x_1}{S_t} = -\frac{x_{1k}}{x_{1k} - x_{1t}}. \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что с возрастанием  $x_1$  (водопоглощения) состояние ухудшается, что совпадает с физическим смыслом рассматриваемого явления:

$$E_{x_2}(S_t) = \frac{dS_t}{dx_2} \cdot \frac{x_2}{S_t} = \frac{x_{2k}}{x_{2t} - x_{2k}}. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что направление изменения величины  $(x_{2t} - x_{2k}) / x_{2k}$  совпадает с направлением изменения величины  $S_t$ , причем оно будет тем больше, чем больше будет ресурс по переменной  $x_2$ :

$$\Delta x_2 = |x_{2k} - x_{2t}|. \quad (10)$$

Используя понятие взаимной эластичности [8] определим предельные нормы взаимозаменяемости ресурсов.

Результаты соответствующих преобразований приведены в табл. 2.

Таблица 2

Предельные нормы взаимозаменяемости ресурсов

	$x_1$	$x_2$
$x_1$	–	$(x_{2k} - x_{2t}) / (x_{1k} - x_{1t})$
$x_2$	$(x_{1k} - x_{1t}) / (x_{2k} - x_{2t})$	–

Состояние СФХС, определяемое условием (6), зависит функционально от вектора  $X_t^T = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}$  и параметрически от вектора  $X_k^T = \{x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}\}$ . Изменять состояние СФХС можно двумя способами: техническим и организационным.

В первом случае за счет проведения каких-либо технических мероприятий можно замедлять (ускорять) протекающие в системе процессы, добываясь нужных значений составляющих вектора  $X_t$ . Во втором случае директивно уменьшать (увеличивать) компоненты вектора  $X_k$ .

Для обоснованного выбора первого способа необходимо знать эластичности  $E_{x_{it}}(S_t)$ . Для обоснованного выбора второго способа используем понятие параметрической чувствительности [1].

Чувствительностью  $I_{x_{ik}}(S_t)$  функции  $S_t$  по параметру  $x_{ik}$  будет

$$I_{x_{ik}}(S_t) = \frac{\partial S}{\partial x_{ik}}. \quad (11)$$

Совместное влияние изменения параметров, то есть компонент вектора  $X_k$  на оценку  $S_t$  оценивают функцией чувствительности порядка  $n$ :

$$I_{X_k}(S_t) = \frac{\partial^n x_{ki}}{\partial x_{k1} \dots \partial x_{kn}}. \quad (12)$$

Для нашего примера:

$$I_{x_{1k}}(S_t) = \frac{x_{1t}(x_{2t} - x_{2k})}{x_{1k}^2 x_{2k}}; \quad I_{x_{2k}}(S_t) = \frac{x_{2t}(x_{1t} - x_{1k})}{x_{1k} x_{2k}^2}; \quad I_{x_k}(S_t) = -\frac{x_{1t} x_{2t}}{x_{1k}^2 x_{2k}^2}. \quad (13)$$

Сравнивая между собой последствия решений, соответствующих выражениям из (13), можно выбрать вариант минимизирующий или стоимость принятого решения, или риск, обусловленный изменением вектора  $X_k$ .

**Выводы.** 1. На основе аксиоматики теории полезности предложены требования к функции состояния СФХС.

2. Оценены возможности применения оценок состояния различного вида для СФХС и выбрана наиболее подходящая по своему физическому смыслу.

3. Приведен пример применения оценки состояния для решения задачи о взаимозаменяемости ресурсов и определена чувствительность оценки состояния к изменению пороговых значений её компонент.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А.А. Красовского.* – М.: Наука, 1987. – 712 с.
2. Китаев А., Шень А., Вялый М. *Классические и квантовые вычисления.* – М.: МЦ НМО, 1999. – 192 с.
3. Подиновский В.В. *Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика.* – 2000. – № 5. – С. 111 – 123.
4. Дубницкий В.Ю., Чернявский В.Л. *Прогнозирование стойкости бетона при сложных агрессивных воздействиях на основе оценки величины коррозионного состояния // Известия вузов. Строительство и архитектура.* – 1990. – № 1. – С. 122 – 125.
5. Чернявский В.Л. *Адаптация бетона.* – Днепропетровск: Нова Идеология, 2002. – 116 с.
6. Брахман Т.Р. *Многокритериальность и выбор в технике.* – М.: Радио и связь. – 1984. – 288 с.
7. Нейман Дж., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение.* – М.: Наука, 1970. – 606 с.
8. Дубницкий В.Ю., Чернявский В.Л. *Определение взаимозаменяемости ресурсов сложной физико-химической системы с использованием производственной функции // Системы обработки информации.* – Х.: ХВУ, 2003. – Вып.2. – С. 202 – 206.
9. Клейнер Г.Б. *Производственные функции. Теория, методы, применение.* – М.: Финансы и статистика, 1986. – 238 с.

Поступила 22.03.2005

**Рецензент:** доктор физико-математических наук профессор С.В. Смеляков,  
Харьковский университет Воздушных сил