УДК 681.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ В НЕОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

С.В. Листровой, В.А. Пудов, В.В. Калачева
(Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба)

Рассматривается актуальная задача коммивояжера, состоящая в нахождении в обыкновенном взвешенном графе гамильтонова пути наименьшего, где вес цикла определяется как сумма весов, входящих в него ребер. Предлагается новый алгоритм определения кратчайших гамильтоновых циклов, который не гарантирует нахождения точного решения, но предположительно является более быстрым, чем существующие. Выводится соответствие кратчайшего гамильтонова цикла в самом графе гамильтонову циклу в структуре клик графа. Доказывается эффективность развала структуры до одного цикла на основе процедуры А.

гамильтоновы циклы, неориентированный граф

Постановка проблемы. Метод, позволяющий ответить на вопрос, содержит ли какой-либо орграф гамильтонов цикл, имеет прямые приложения в задачах упорядочения или планирования операций. В равной степени важно использование такого метода в качестве основного шага в алгоритмах решения других, на первый взгляд далеких от данной тематики, задач теории графов.

Также имеет актуальность задача коммивояжера, которая формулируется следующим образом. В данном обыкновенном взвешенном графе найти гамильтонов путь наименьшего, где вес цикла определяется как сумма весов, входящих в него ребер.

Анализ литературы. Известно, что задача коммивояжера является труднорешаемой для всех видов графов. В [1, 5] и [2, 7] показано, что алгоритмы, которые находят точное решение по сложности, являются или полным перебором или близкими к нему.

Известны и неточные быстрые алгоритмы построения маршрута коммивояжера, чем рассмотренные нами. Например, алгоритм Кристофидеса [2, 6], разработанный в 1976 году, определяет маршрут коммивояжера, вес которого может быть не более чем в 1,5 раза больше веса оптимального маршрута. Алгоритмы Nearest-insert и Minspantreetravelling известны исследователям давно, однако оценка их точности получены сравнительно недавно – в 1977 году в работе Розенкратца, Штерна и Льюиса [3, 4, 8].

Цель статьи. В данной статье предлагается новый алгоритм определения кратчайших гамильтоновых циклов, который не гарантирует нахождения точного решения, но предположительно является более быстрым, чем существующие.

Формализация задачи. Рассмотрим произвольный неориентированный граф G (V,E) с n вершинами и m ребрами пронумерованными от 1 до m.

Утверждение 1. Если множество чисел S = {1, 2, … , m} разбить на n подмножеств $S_1, S_2, \dots, S_n$ используя правило 1, которое заключается в том, что в результате разбивки S на $S_1, S_2, \dots, S_n$ в каждом подмножестве S_i содержится не более n – 1 числа и каждое число $x \in S$ встречается в S_i ровно 2 раза, то такое семейство подмножеств задает граф G (V,E).

Доказательство. Построим двудольный граф G (X, Y, L) в котором множеству вершин X соответствует множество вершин V графа G (V, E), а множеству вершин Y множество ребер E графа G (V, E), и вершина $i \in X$ множества соединены с вершинами множества Y если она принадлежит ребру (i, j). Например, для графа, приведенного на рис. 1, граф G (X, Y, L) будет иметь вид, приведенный на рис. 2 [1, 2].

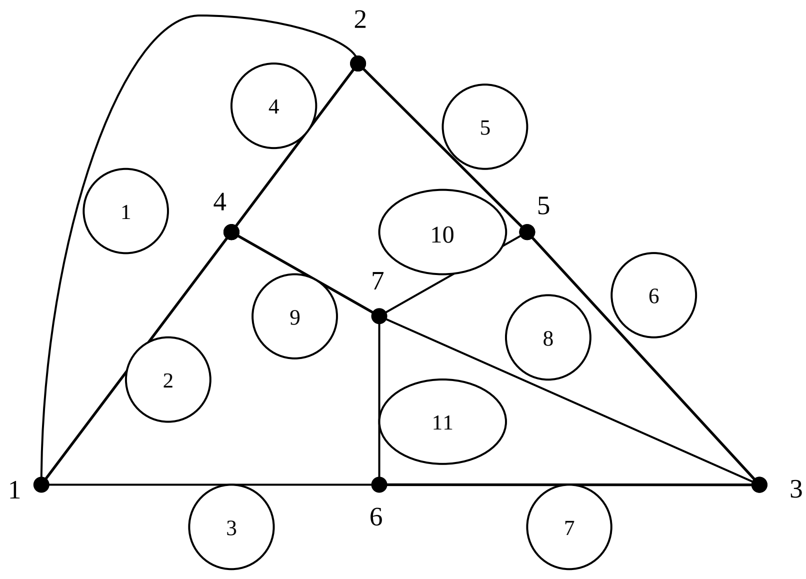

Рис. 1. Граф G (V, E)

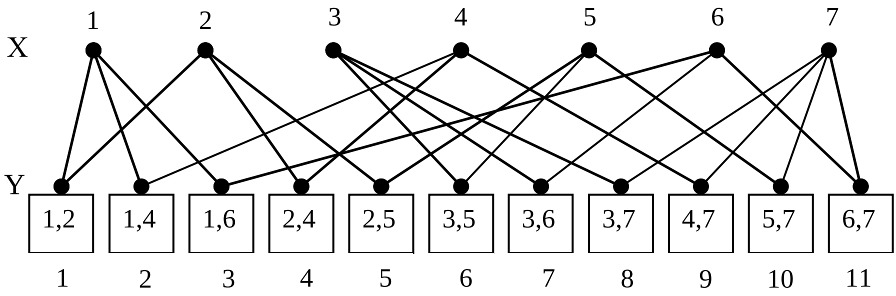

Рис. 2. Граф G (X, Y, L)

Граф G (X, Y, L) зададим в виде матрицы B, в которой столбцы соответствуют элементам множества Y строки элементам множества X и элемент (i, j) равен 1 если $i \in X$ и $j \in Y$ и существует ребро $(i, j) \in L$ в графе G (X, Y, L) и нулю в противном случае:

B =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	S
1	1	1	1									1,2,3
2	1			1	1							1,4,5
3						1	1	1				6,7,8
4		1		1					1			2,4,9
5					1	1				1		5,6,10
6			1				1				1	3,7,11
7								1	1	1	1	8,9,10,11

Как видно из матрицы B, она и дает разбиение множества ребер на удовлетворяющие утверждению 1 подмножества. Поскольку не каких ограничений при этом не существует, то общность рассуждений справедлива для произвольных графов.

Построим граф $G^{/}$ $(V^{/}, E^{/})$ с n вершинами в котором множеству вершин $V^{/}$ соответствует множества подмножеств S_i, а вершины в графе $G^{/}$ соединены ребром в соответствии с правилом 2, которое заключается в следующем: вершины i и j соединены если подмножества S_i и S_j содержат один и тот же элемент x т. е. $x \in S_i$ и $x \in S_j$ и связь между вершинами отсутствует, если такого общего элемента нет. Например, граф $G^{/}$ $(V^{/}, E^{/})$ построенный для графа G (V, E) приведенного на рис. 1 будет иметь вид

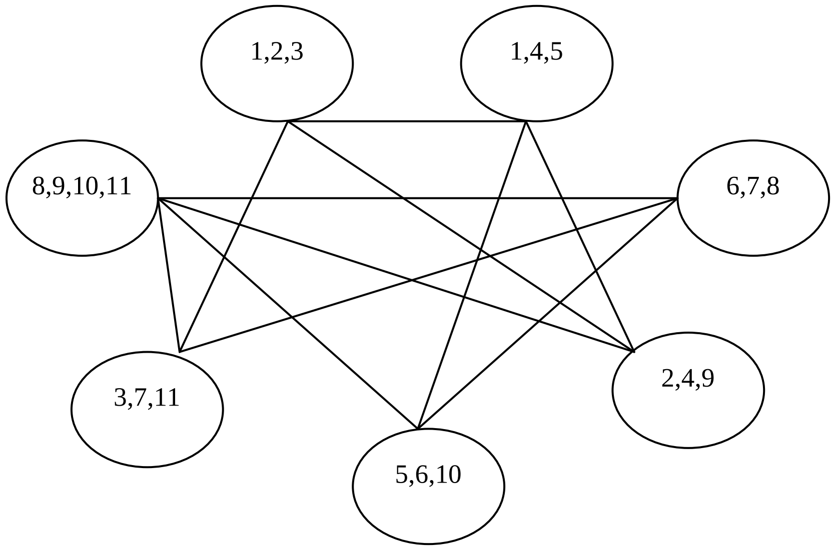

Рис. 3. Граф $G^{/}$ ($V^{/}$, $E^{/}$)

Из графа $G^{/}$ ($V^{/}$, $E^{/}$) следует, что пересечение любой пары множеств $S_i \cap S_j$ равно либо 1, либо является пустым множеством. Из способа построения графа G/ (V/, E/), следует, что число вершин и ребер в графах G (V, E) и $G^{/}$ ($V^{/}$, $E^{/}$) одинаково.

Справедливо утверждение:

Утверждение 2. Если множество S разбито на подмножества S_i в соответствии с правилом 1, то если из каждого подмножества удалить элементы $\{x_i\}$ таким образом, что в каждом подмножестве S_i останется ровно по два элемента, оставляя связи между вершинами в соответствии с правилом 2, то мы получим подграф G// (V//, E//), представляющий гамильтонов цикл графа G/(V/, E/), которому в графе G (V, E) можно поставить во взаимнооднозначное соответствие гамильтонов цикл этого графа.

Справедливость данного утверждения следует из того, что удаление элементов подмножеств S_i эквивалентно удалению столбцов матрицы B таким образом, чтобы в каждой строке матрицы остались по две единицы. Или удалению ребер в графе G (X, Y, L) приводящему к тому, что все степени вершин графа станут равными 2.

Таким образом, вопрос существования гамильтонового цикла в графе G (V, E) однозначно сводится к выяснению того существует ли такой способ удаления элементов $\{x_i\}$ из подмножеств S_i, который приводит к тому, что в каждом подмножестве остается ровно по 2 элемента и при этом $S_i \cap S_j = \varnothing$ если в них нет одинаковых элементов или $S_i \cap S_j = 1$ если они содержат одинаковые элементы.

В графе $G^{/}$ $(V^{/}, E^{/})$ подмножества S_i можно рассматривать как клики имеющие общие вершины. Общие вершины соединены кривыми являющимися фиктивными ребрами во вновь образовавшемся графе G * (V, E) [3 – 5].

Следовательно, процесс удаления элементов $\{x_i\}$ из подмножеств Si, эквивалентен удалению вершин и инцидентных в них ребер в графе G * (V, E) до тех пор, пока в каждой клике не останется по одному ребру образующему вместе с фиктивными ребрами графа G * (V, E) цикл.

Другими словами если в графе G * (V, E) путем удаления вершин и инцидентных им ребер мы можем получить цикл, содержащий по одному ребру из каждой клики S_i, то в графе G (V, E) существует гамильтонов цикл.

Если граф G (V, E) полносвязный с n вершинами и его ребра взвешены, то все клики в графе G * (V, E) будут содержать по n – 1 вершине и при этом каждому ребру клики S_i будет соответствовать соединение двух ребер в графе G (V, E) и следовательно ребро клики S_i будет иметь вес равный сумме весов ребер этих ребер, назовем правило вычисления весов ребер правилом D. Следует отметить, что при этом клике S_i соответствует такое соединение ребер графа G (V, E), что в ней каждая вершина в качестве смежной имеет вершину i [6 – 8].

Введем процедуру А развала клик до тех пор, пока она не превратится в цикл.

Процедура А.

Шаг 1. Определяем весовые характеристики ребер клики в соответствии с правилом D.

Шаг 2. Определяем весовые характеристики вершин в кликах на основе правила V.

Шаг 3. Находим в кликах вершину с максимальным весом.

Шаг 4. Проверяем удаление выбранной вершины и инцидентных ей ребер к образованию вершин со степенями равными единицы, если да, то переходим к выполнению шага 5, иначе удаляем ее и инцидентные ей вершины и выполняем шаг 6.

Шаг 5. Выбираем следующую вершину с максимальным весом и переходим к выполнению шага 4.

Шаг 6. Проверяем, есть клики, в которых осталось по одному ребру, если да, то вершины соответствующие этому ребру объявляем помеченными во всех кликах и переходим к шагу 7, иначе выполняем шаг 2.

Шаг 7. Проверяем, есть клики с одной помеченной вершиной, если да то в клике удаляем все ребра не инцидентные помеченной вершине, иначе выполняем шаг 2.

Шаг 8. Проверяем, во всех кликах осталось по одному ребру, если нет, то переходим к выполнению шага 2, иначе алгоритм заканчивает работу.

Выводы. Таким образом, минимальному гамильтонову циклу в структуре клик графа G (V, E) соответствует кратчайший гамильтонов цикл в самом графе G (V, E).

Следует отметить, что развал структуры до одного цикла на основе процедуры A происходит эффективно, поскольку общее число ребер в структуре равно $n(n-1)(n-2)/2$, а после удаления одной вершины в структуре клик удаляется $2(n-1)$ ребер и следовательно процесс развала структуры до цикла займет не более $n(n-2)/4 \approx n\ 2/4$ шагов.

Как уже отмечалось выше, данный алгоритм предположительно является неточным и быстрым. Этот вопрос остается исследовательским, и мы вернемся к нему в следующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.*
2. *Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск: НИЦ “РХД”, 2001. – 288 с.*
3. *Christofides N. The shortest Hamiltonian chain of a graph. – SIAM (Appl. Math), 1970. – 689 p.*
4. *Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 482 с.*
5. *Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 386 с.*
6. *Свами М., Тхуласироман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – 222 с.*
7. *Листровой С.В., Гуль А.Ю. Метод решения задачи о минимальном покрытии на основе рангового подхода // Электронное моделирование. – 1999. – № 1. – С. 58-70.*
8. *Листровой С.В. Метод решения задачи 3-выполнимость // Электронное моделирование. – 2001. – № 6. – С. 66-76.*

Поступила 14.04.2006

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор С.В. Смеляков, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба.