

УДК 681.518 : 004 : 912

А.Л. Єрохін

Харківський національний університет внутрішніх справ

## ПРО ОДНУ МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОВИМІРНИХ ПРОЦЕСІВ В СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ

Стаття присвячена вирішенню задачі побудови моделі дослідження багатовимірних процесів в складних системах з каналною структурою на основі генерації детермінованого хаотичного процесу. Основою моделі є комбінаторно-топологічне перетворення інформації в складній системі у вигляді теоретико-множинної структури дискретних елементів, над якою виконуються послідовні перетворення вихідної інформації в прообраз на вході, перестановка фрагментів та формування інформаційного образу на виході.

*складні системи, багатовимірні процеси, детермінований хаотичний процес*

### Вступ

**Постановка задачі.** Дослідження комбінаторно-топологічного перетворення інформації [1], показали можливість їхнього використання в психології [2], в інформаційній безпеці [3] і в системному аналізі [4]. На основі вказаного перетворення можливо моделювати спотворення та перекирення інформації в складних системах. В статті розглядається клас складних систем, в яких можна виділити мережеву (або каналну) структуру. Актуальною задачею є створення моделі, які придатна для досліджень багатовимірних процесів в складних системах з каналною структурою з можливістю генерації детермінованого хаотичного процесу. **Мета статті** – розробка об'єднаної моделі поведінки складної системи з каналною структурою з врахуванням багатовимірних процесів, які протікають в системі.

### 1. Дослідження властивостей об'єднаного системного каналу

Модель генерації детермінованого хаотичного процесу на основі комбінаторно-топологічного перетворення [5, 6] є симетричною групою перетворень підстановок [7]. Фізична модель [5] може бути виконана з набору світлопровідних елементів, так званих каналів  $(w_i)$ , які утворюють системний канал  $W$ . Практичні результати таких досліджень можуть бути використані для вирішення задачі відновлення спотворених прообразів двовимірної інформації. Системний канал  $W$  фізичної моделі має ряд властивостей, які для моделі приймемо як аксіоми:

–  $(a_i) \in (A)$  і  $(b_i) \in (B)$  підмножини входу і виходу у  $W$  є дискретними й обмеженими  $(A), (B) \subset (W)$  і  $(A) \cap (B) = 0$ ;

–  $(a_i) \in (A)$  і  $(b_i) \in (B)$  сполучені одне одному для каналу  $(w_{ij})$ , тобто відображення  $(a_i) \leftrightarrow (b_i)$  є ізоморфним і тотожним  $(a_i) \equiv (b_i)$ ;

–  $(w_i) \in (W)$ ,  $(a_i) \in (A)$  і  $(b_i) \in (B)$  мають властивість інформаційної незалежності  $(w_i) \cap (w_j) = 0$ ,  $(a_i) \cap (a_j) = 0$  і  $(b_i) \cap (b_j) = 0$ ;

–  $(w_i) \in (W)$ ,  $(a_i) \in (A)$ ,  $(b_i) \in (B)$  фіксовані на двовимірному метричному просторі.

Підмножини

$$(W) = \bigcup_{f \in M^2} (w_f); (A) = \bigcup_{f \in M^2} (a_f); (B) = \bigcup_{f \in M^2} (b_f) \quad (1)$$

задовольняють аксіомам загальної топології й аксіомам операцій замикання мають властивості замкнутості, віддільності, рахунковою базою, утворюють топологічний простір  $(\Omega, \omega)$  [8] з дискретним носієм  $\omega$  топології. Будь-які його два елементи в (1) мають непересічні околиці, тому  $(W), (A), (B) \subset (\Omega, \omega)$  відносять до хаусдорфових [8] топологічних просторів.

Представимо підмножини  $(a_{ij}) \in [A]$  та  $(b_{kl}) \in [B]$  в матричній формі

$$[A] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}; \quad (2) \quad [B] = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^s b_{kl}. \quad (3)$$

Введемо двовимірну безперервну функцію (інформацію)  $\Phi(x, y)$ , яку відобразимо на  $[A]$  й  $[B]$  у вигляді впорядкованих підмножин

$$F(x, y) \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} \otimes f_{ij}) \subset [A]; \quad (4)$$

$$F'(x, y) \cong \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^s (b_{kl} \otimes f_{kl}) \subset [B], \quad (5)$$

де  $(a_{ij} \otimes f_{ij})$ ,  $(b_{kl} \otimes f_{kl})$  – дискретні фрагменти функції  $\Phi(x, y)$ , відображені на константах  $(a_{ij})$  і  $(b_{kl})$ . Представимо підмножини  $[A]$ ,  $[B]$  у вигляді системи вхід-вихід

$$S \subset A \times B, \quad (6)$$

де підмножина  $A = \times \{V_i : i \in I_A\}$  – вхідний об'єкт; підмножина  $B = \times \{V_i : i \in I_B\}$  – вихідний об'єкт системи  $S$ , задані декартовим добутком.

Кожній парі чисел  $(i, j)_A$  входу відповідає пари  $(k, l)_B$  на виході у системах локальних координат  $A$  і  $B$  відповідно

$$A \times B = (a_{ij} \times b_{kl}; \forall i, j \in I_A, \forall kl \in I_B). \quad (7)$$

## 2. Використання комбінаторно-топологічного перетворення інформації для моделювання спотворень в складній системі

На основі [3 – 6] введемо три оператори послідовних перетворень  $\Phi(x, y)$  в системах (4), (5) та (6)

$$\begin{aligned} K_1: \Phi(x, y) &\rightarrow \bigcup_{k, l \in M^2} f_{kl}(x, y) = F(x, y); \\ K_2: \bigcup_{i, j \in M^2} f_{ij}(x, y) &\rightarrow \bigcup_{k, l \in M^2} f'_{kl}(x, y); \quad (8) \\ K_3: \bigcup_{k, l \in M^2} f'_{kl}(x, y) &\rightarrow F'(x, y), \end{aligned}$$

де  $K_1$  – оператор дефрагментації  $\Phi(x, y)$  у прообраз;  $K_2$  – оператор перестановок;  $K_3$  – оператор об'єднання фрагментів прообразу у образ.

Структура прообразів (5)

$$F(x, y) \supset f_{kl}(x, y) \in (A) \subset (W)$$

є інваріантною. Відповідно до (4) можна представити у вигляді системи скінчених предикатів за рядками локальної системи координат входу

$$F(x, y) = \bigcup_{i=1}^m (a_{i1}^{f_{i1}} \vee a_{i2}^{f_{i2}} \vee \dots \vee a_{in}^{f_{in}}). \quad (9)$$

Розглянемо предикат впізнавання регулярності

$P(f_{ij}) = (a_{ij}^{f_{ij}})$  змінної  $(f_{ij})$ , на константі  $(a_{ij})$  і за

умови збігу їхніх координат  $(i, j)_A = (i, j)_F$

$$P(f_{ij}) = (a_{ij}^{f_{ij}}) = 1, \quad \forall (f_{ij}) \in F(x, y) \subset M^2. \quad (10)$$

При розбіжності координат  $(i, j)_A \neq (i, j)_F$  предикат

$$P(f_{kl}) = (a_{ij}^{f_{kl}}) = 0, \quad \forall (f_{kl}) \in F(x, y) \subset M^2. \quad (11)$$

Область існування (9) визначимо за допомогою квантора існування

$$\exists f_{ij} P(f_{ij}) = \vee_{(f_{ij}) \in M^2} P(f_{ij}). \quad (12)$$

Для усіх  $(a_{ij}) \in [A]$  завжди виконується умова (8), тому квантор існування (12) збігається з усім метричним простором

$$\exists f_{ij} P(f_{ij}) = \left[ \vee_{(f_{ij}) \in M^2} P(f_{ij}) = 1 \right]. \quad (13)$$

Аналогічно і для  $(b_{kl}) \in (B)$ . Тобто підмножини фіксованих елементів  $(a_{ij}) \in [A]$  і  $(b_{kl}) \in (B)$  мають структурну інваріантність. Розглянемо перетворення  $K_2$  підстановок (8) за допомогою предикатів регулярності  $P(b_{kl}) = (a_{ij}^{b_{kl}})$  або  $P(a_{kl}) = (b_{ij}^{a_{kl}})$

$$K_2: (A) \rightarrow (B) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^m (a_{i1}^{b_{i1}} \vee a_{i2}^{b_{i2}} \vee \dots \vee a_{in}^{b_{in}}). \quad (14)$$

Спряженість елементів визначає зворотний оператор  $K_2^{-1}$  такий, що  $K_2^{-1} \times K_2 = 1$

$$K_2^{-1}: (B) \rightarrow (A) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^m (b_{i1}^{a_{i1}} \vee b_{i2}^{a_{i2}} \vee \dots \vee b_{in}^{a_{in}}). \quad (15)$$

Вирази (14) та (15) еквівалентні за відношенням

$$(a_{ij}) \leftrightarrow (b_{ij}) \Rightarrow a_{ij}^{f_{ij}} \leftrightarrow b_{ij}^{f_{ij}}. \quad (16)$$

Аналогічно (9) представимо сформований образ  $F'(x, y)$  на  $(B)$  системою предикатів у припущенні адекватності його вихідної функції

$$\Phi(x, y) \approx F'(x, y) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^m (b_{i1}^{f'_{i1}} \vee b_{i2}^{f'_{i2}} \vee \dots \vee b_{in}^{f'_{in}}). \quad (17)$$

Використовуємо предикат регулярності

$$P(a_{ij}) = (b_{kl}^{a_{ij}}). \quad (18)$$

При  $(i, j) = (k, l)$

$$P(a_{ij}) = (b_{ij}^{a_{ij}}) = 1. \quad (19)$$

При  $(i, j) \neq (k, l)$

$$P(a_{ij}) = (b_{kl}^{a_{ij}}) = 0. \quad (20)$$

Складемо матрицю з предикатних змінних

$$[P(B)] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(b_{ij}), \quad (21)$$

де  $P(b_{ij}) \approx (a_{ij}) \rightarrow (b_{kl})$  визначає відношення (перестановку) між елементами входу і виходу.

Внаслідок спряженості між відповідними елементами входу та виходу маємо дві структурно тождісні (з точністю до ізоморфізму) системи

$$\bigcup_{i=1}^m \left( \bigvee_{j=1}^n a_{ij}^{f_{ij}} \right) \equiv \bigcup_{i=1}^m \left( \bigvee_{j=1}^n b_{ij}^{f_{ij}} \right). \quad (22)$$

Якщо виконується умова (19) або (20), то квантори існуювання. відповідно для (21)

$$\exists b_{ij} P(b_{ij}) = \bigvee_{(b_{ij}) \in M^2} [P(b_{ij}) \equiv 1];$$

$$\exists b_{kl} P(b_{kl}) = \bigvee_{(b_{kl}) \in M^2} [P(b_{kl}) \equiv 0] \quad (23)$$

і відповідні матриці (21) будуть складені тільки з нулів або одиниць.

Розглянемо варіант, у якому предикати (18) будуть набувати значень

$$P(b_{ij}) = 1, \forall b_{ij} = a_{ij}; \quad P(b_{kl}) = 0, \forall b_{kl} \neq a_{kl}. \quad (24)$$

Тоді область існування системи предикатів (22) буде визначена як

$$\exists b_{ij} P(b_{ij}) = \bigvee_{(b_{ij}) \in M^2} P(b_{ij}) = \bigvee_{(b_{ij}, b_{kl}) \in M^2} \left[ \begin{matrix} P(b_{ij}) = 1 \\ P(b_{kl}) = 0 \end{matrix} \right]. \quad (25)$$

і матриця (21) буде множиною з одиниць та нулів яку представимо у вигляді об'єднання двох підмножин (інваріантних структур)

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1, \quad (26)$$

де  $\Omega_0$  складено з нульових значень предикатів, а  $\Omega_1$  – з одиничних

$$\Omega_0 = \left[ \bigcup_{(b_{kl}) \in M^2} P(b_{kl}) = 0 \right]; \quad (27)$$

$$\Omega_1 = \left[ \bigcup_{(b_{ij}) \in M^2} P(b_{ij}) = 1 \right]. \quad (28)$$

При цьому вказані структури відносяться як до підмножини  $(b_{kl}) \in (B)$ , так і до підмножини  $(f_{kl}) \in F'(x, y) \subseteq (B)$  внаслідок їхньої топологічної подібності в логічному просторі області існування предикатних змінних [6]. Перетворимо (4) та (5) поелементно за допомогою операторів перестановок

$$K_2: (a_{ij} \otimes f_{ij}) \rightarrow (b_{kl} \otimes f'_{kl}), \quad (29)$$

виключимо з (29) фіксовані константи й одержимо

$$K_2: (f_{ij}) \rightarrow (f'_{kl}). \quad (30)$$

Перепишемо (27) та (28) у вигляді двох нових підмножин

$$\Omega_1^* = \bigcup_{(i,j) \in M^2} f_{ij}; \quad (31) \quad \Omega_0^* = \bigcup_{(k,l) \in M^2} f_{kl}. \quad (32)$$

У такій інтерпретації образ  $F'(x, y)$  розглядається як об'єднання підмножини незмінених фрагментів  $f'_{ij}$ , заданих в області (31), і підмножини фрагментів  $f'_{kl}$ , розподілених в області (31) випадково

$$F'(x, y) \equiv \Omega_0^* \cup \Omega_1^*. \quad (33)$$

Множина  $\Omega_1^*$  визначає топологічну область існування неспотворених фрагментів  $(f_{ij}) \equiv f'(ij) \forall (b_{ij}) \in \Omega_1$ . Множина  $\Omega_0^*$  – область, у якій

$(f_{ij}) \neq (f'_{kl}) \quad \forall (b_{kl}) \in \Omega_0$ , усередині неї кожен з фрагментів  $(f_{kl})$  випадковим чином може зайняти будь-яке положення, при цьому структурно спотворивши прообраз  $F(x, y)$ . Потужність підмножини  $\Omega_0^*$  визначає кількість можливих спотворень у системному каналі  $W$ . Таким чином, інваріантні структури  $\Omega_0, \Omega_1$  і  $\Omega_0^*, \Omega_1^*$  тотожні і топологічно еквівалентні одне одному.

### 3. Моделювання детермінованих хаотичних процесів в складній системі

Під час моделювання процесів в системі за допомогою комбінаторно-топологічних перетворень процеси спотворень інформації розгортаються на двовимірній фазовій площині, що збігається з виходом системного каналу  $W$ . Одна з фундаментальних властивостей детермінованого хаотичного процесу – структурна нестійкість атратора динамічної системи [9]. Розглянуті вище області є інваріантними структурами, при цьому перетини замикань порожні

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 = 0 \quad \text{та} \quad \Omega_0^* \cap \Omega_1^* = 0.$$

Це може бути підставою вважати зазначені підмножини (31) та (32) структурами атраторів модельного детермінованого хаотичного процесу. Для об'єднання (33) найбільш істотним є поява стохастичної компоненти в областях (27) або (32). Оскільки для кожного системного каналу  $W$  області (32) та (33) є інваріантами, то саме підмножину  $\Omega_0$  будемо вважати структурою-атратором, у якій розгортаються в часі хаотичні компоненти детермінованого хаотичного процесу. Просторово-динамічна структура будь-якого атратора характеризується кількісною характеристикою (розмірністю). Для топологічного простору з дискретним носієм топології розмірністю атратора справедлива фрактальна розмірність Хаусдорфа [9] яка обумовлена залежністю

$$D_0 = -\lim \ln N(C) / \ln C, \quad (34)$$

де  $C$  – довжина сторони квадрата, на які розбивається фазова площина;  $N(C)$  – кількість осередків, через які проходить фазова траєкторія.

У нашому випадку фазова площина  $[B]$ , утворена дискретними носіями топології, тому елементами її покриття є елементи  $(b_{kl})$ , вписані в квадрат. Фазова площина й атратор можуть збігатися. Траєкторія розгортання хаотичного процесу на фазовій площині може бути встановлена тільки за результатами вибірки статистик, детермінується замиканням фазової поверхні, а визначається топологією перетворень фазової поверхні  $[B]$ . Наприклад, введемо в системний канал  $(W)_q$  послідовність безперервних топологічних перетворень над безлічами  $\Omega_0^*, \Omega_1^*$  у вигляді вкладених спіралей. Технологічно

це досягається деформаціями стиску, крутіння і вигину елементів  $(w_{ij})_q \in (W)_q$ . У цьому прикладі траєкторії процесу будуть визначатися топологічно подібними структурно стійкими спіральними атрactorами з урахуванням кількісних характеристик сформованого в  $\Omega_0$  хаотичного процесу. Потужність інваріантної структури атрactorів відповідно до (34) буде дорівнює кількості елементів  $(b_{st})_q \in \Omega_0 \subset [B]_q \subseteq (W)_q$ . Отримані дані можуть бути використані при аналізі більш складних процесів, які моделюються за допомогою двох і більше системних каналів  $(W)_q$

$$\langle W^* \rangle = \bigcup_{q=1}^r [W]_q. \quad (35)$$

Фазова поверхня такої системи генерації детермінованого хаотичного процесу утворена множиною

$$\langle B \rangle = \bigcup_{q=1}^g [B]_q, \quad (36)$$

де  $[B]_q$  – фазова площина кожного з системних каналів.

Його множина входу співорганізована у вигляді прямокутника з  $q$  штук прямокутних матриць  $[A]_r$

$$\langle A \rangle = \bigcup_{r=1}^q [A]_r. \quad (37)$$

Множини (36) та (37) сполучені одна однією, а. слабка структурованість каналів  $(W)_q \in \langle W^* \rangle$  визначає можливість безперервних топологічних перетворень множин  $(b_{kl})_s \in [B]_s \cup [\bar{B}]$  у межах замикання  $[\bar{B}]$  (за рахунок деформації їхньої структури). У результаті перетворень сформуємо, а потім зафіксуємо компактне об'єднання топологічно подібних фігур

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= \bigcup_{e=1}^q [B]_e \cup [\bar{B}] = \\ &= \bigcup_{e=1}^q \{ [\Omega_0 \cup \bar{\Omega}_0]_e \cup [\Omega_1 \cup \bar{\Omega}_1] \}. \end{aligned} \quad (38)$$

Тоді ми будемо мати, як мінімум, систему з  $q$  стійких структур-атрactorів детермінованого хаотичного процесу, які обмежені замиканнями множин  $\bar{\Omega}_0, \bar{\Omega}_1$ . Для реалізації процесу розгортання детермінованого хаотичного процесу на фазовій поверхні (38) досить надати функції  $\Phi(x, y)$  будь-якої лінійної зміни положення  $(x, y)$  щодо локальної системи координат входу відносно значення радіусу носія  $(a_{ij})$  в  $[A]$ .

## Висновки

Таким чином, за допомогою комбінаторно-топологічних перетворень можливо створити модель генерації детермінованих хаотичних процесів.

Математична модель комбінаторно-топологічного перетворення інформації є теоретико-множинною структурою дискретних елементів, які утворюють топологічний хаусдорфовий простір, над яким виконуються послідовні перетворення: дефрагментації вихідної інформації в прообраз на вході системи, перестановку фрагментів та формування інформаційного образу на виході.

При перетворенні перестановок дискретні елементи утворюють інваріантні, топологічно подібні непересічні структури двох типів, у першому з яких фрагменти інформації формують частину неспотвореного образу, а у другому – просторово перекрученими фрагментами. Зазначені структури є стійкими атрactorами фазової площини траєкторій детермінованого хаотичного процесу, при цьому фазовою поверхнею є множина елементів виходу системного каналу, а розмірність атрactorа визначається потужністю множини, у якій фрагменти інформації просторово перекручені.

## Список літератури

1. Ерохин А.Л., Бурцев Вал.Н., Бурцев Влад.Н. Исследование стохастических процессов комбинаторно-топологического кодирования информации. Сообщ. 1 // Радиотехника и информатика. – 2000. – № 4 (13). – С. 44-48.
2. Бондаренко М.Ф., Бурцев В.Н., Бурцев Вл.Н., Ерохин А.Л. Моделирование стохастических процессов и их применение в практической психологии // Вестник ХГПУ. – 2000. – Вып. 99. – С. 7-10.
3. Бурцев В.Н., Бурцев Вл.Н., Ерохин А.Л. Генерирование последовательностей псевдослучайных чисел методом комбинаторных перестановок двумерной информации // Сб. докладов 3-й Межд. конф. "Цифровая обработка сигналов и ее применение". – М. – 2000. – Т. 3. – С. 153-157.
4. Бурцев Вал.Н., Бурцев Влад.Н., Ерохин А.Л. Анализ связей сложно-организованных систем с гомеостатическим и гетеростатическим управлением // Вестник НТУ «ХПИ». – Х.: НТУ «ХПИ». – 2001. – № 4. – С. 20-23.
5. Бурцев В.Н., Гнусов Ю.В., Ерохин А.Л. Формализация модели оптического волоконного системного канала // Проблемы бионики. – 2002. – Вып. 56. – С. 34-38.
6. Бурцев В.Н., Бурцев Вл. Н., Ерохин А.Л. Способ моделирования стохастических процессов с помощью топологических преобразований // Проблемы бионики. – 2000. – Вып. 51. – С. 150-157.
7. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во ин. лит-ры, 1963. – 287 с.
8. Келли Дж. Л. Обшая топология. – М.: Наука, 1968. – 383 с.
9. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир. 1988. – 234 с.

Надійшла до редколегії 23.03.2007

**Рецензент:** д-р техн. наук, доцент І.П. Захаров, Харківський національний університет внутрішніх справ, Харків.