

УДК 621.9.01

В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный

*Национальный технический университет «ХПИ», Харьков***СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ТЯГОВЫМ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПРИНЦИПА МАКСИМУМА**

Рассмотрен геометрический метод линеаризации обратной связью нелинейной математической модели тягового асинхронного электропривода дизель-поезда. С помощью последовательности инволютивных распределений получена линейная математическая модель электропривода в форме Бруновского. Сравнение процессов в исходной и линейной математических моделях асинхронного привода в разных режимах работы подтвердило правильность линеаризации обратной связью исходной модели и работоспособность модели объекта в форме Бруновского, которая использовалась для синтеза законов управления с помощью принципа максимума.

Ключевые слова: геометрический метод, линеаризация обратной связью, форма Бруновского, инволютивные распределения, тяговый асинхронный электропривод.

Введение

Постановка проблемы. Тяговый подвижный состав железных дорог Украины является одним из крупнейших потребителей дизельного топлива и электроэнергии. Поэтому повышение его эффективности и снижение энергозатрат является одной из стратегических целей государственной политики Украины в области развития железнодорожного транспорта. Создание современного подвижного состава предполагает внедрение тяговых приводов с трехфазными асинхронными двигателями, которые по экономическим показателям превосходят привода с двигателями на постоянном токе. Однако широкое внедрение прогрессивных приводов в Украине во многом сдерживается отсутствием надежных и экономичных систем управления этими приводами. Уменьшение потребления электроэнергии или топлива возможно не только за счет внедрения более экономичных приводов, но и за счет оптимизации режимов работы подвижного состава. Из практики управления составами известно, что расход энергоресурсов

локомотивом, дизель- или электропоездом за поездку во многом зависит от машиниста. Опытные машинисты часто экономят до 5 – 8% энергоресурсов по сравнению с заданной нормой, однако существуют и бригады, которые не укладываются в установленные нормы. Это связано с тем, что машинист при ведении состава не только выполняет требования “маршрутных карт”, но и использует свой опыт, позволяющий учитывать вес состава, тип и загрузку вагонов, профиль и состояние пути, скорость движения, погодные условия и т.д. В связи с этим актуальны работы, направленные как на создание новых экономичных систем управления тяговым приводом переменного тока, так и на создание систем поддержки принятия решений машинистом при управлении подвижным составом.

Анализ последних достижений и публикаций. Проблемами улучшения и оптимизации тяговых электроприводов и режимов ведения составов с помощью средств вычислительной техники и теории автоматического управления в мире занимаются уже более полувека, однако далеко не все проблемы, сформулированные многие годы назад, удалось ре-

шить даже для тягового подвижного состава на постоянном токе. Внедрение тяговых приводов на переменном токе ставит и целый ряд новых проблем и задач, требующих своего решения. Одна из таких проблем связана с поиском оптимальных законов управления движением составов с учетом работы электропривода. Теоретическими исследованиями в этой области занимались многие отечественные и зарубежные ученые [1–5], однако приемлемое по точности математическое описание асинхронного тягового электродвигателя должно содержать не менее пяти нелинейных дифференциальных уравнений, а это значит, что синтез оптимальных регуляторов для такого нелинейного объекта с помощью большинства известных методов теории автоматического управления или сильно затруднен, или практически невозможен [6, 7]. Трудности синтеза оптимальных регуляторов для нелинейных объектов привели к разработке геометрической теории управления [7–10], основанной на теории групп и алгебр Ли и дифференциальной геометрии, которая позволяет с помощью специальных преобразований приводить широкий класс нелинейных систем управления к эквивалентным им линейным системам. А это открывает возможность использования методов и средств теории линейных систем для решения задач синтеза регуляторов для нелинейных объектов управления. Теоретически линеаризация с помощью обратной связи позволяет преобразовать к линейному виду широкий класс нелинейных систем управления, но на практике использование нового подхода затруднено из-за отсутствия конструктивных методов выполнения такой линеаризации. В работе [8] впервые для асинхронного привода с постоянной нагрузкой и управлением по средним значениям получена линейная модель привода. Однако допущенные ошибки и неточности при математических преобразованиях крайне затрудняют ее использование другими авторами. Кроме того, в работе [8] проблема поиска оптимальных законов управления в условиях изменяющейся нагрузки вообще не рассматривалась.

Целью работы является синтез оптимальных законов управления тяговым асинхронным электроприводом дизель-поезда на основе динамической линеаризации модели объекта управления средствами геометрической теории управления и применение принципа максимума для определения оптимальных законов управления на линейной модели.

Линеаризация нелинейной математической модели асинхронного привода

Математическую модель эквивалентного тягового асинхронного электродвигателя заменяющего четыре реальных двигателя дизель-поезда во вращающейся системе координат можно записать в следующем виде [11]:

$$\frac{d\Omega}{dt} = k_1\mu\Psi_d i_q - a_{51}\Omega - a_{52}\Omega^2; \quad (1)$$

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = -\alpha\Psi_d + \alpha L_m i_d; \quad (2)$$

$$\frac{di_d}{dt} = -\gamma i_d + p\Omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s} u_d; \quad (3)$$

$$\frac{di_q}{dt} = -\gamma i_q - p\Omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Omega\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s} u_q; \quad (4)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = p\Omega + \alpha L_m \frac{i_q}{\Psi_d}, \quad (5)$$

где Ω – угловая скорость вращения эквивалентного двигателя; $\Omega k = V$; k, k_1 – постоянные коэффициенты; V – скорость движения дизель-поезда; $\mu = pL_m/JL_r$; p – число пар полюсов статора двигателя; L_m – индуктивность контура намагничивания; J – момент инерции, приведенный к валу двигателя; L_r – полная индуктивность ротора; $\Psi_d = \sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}$ – потокосцепление ротора двигателя; Ψ_{ur}, Ψ_{vr} – потокосцепления ротора двигателя по осям u и v ; $i_q = i_{vs} \cos \rho - i_{us} \sin \rho$; i_{vs}, i_{us} – статорные токи по осям u и v ; $\rho = \arcsin \frac{\Psi_{vr}}{\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}}$ или $\rho = \arccos \frac{\Psi_{ur}}{\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}}$; a_{51}, a_{52} – коэффициенты, учитывающие сопротивление движению дизель-поезда; $\alpha = 1/T_r$; T_r – постоянная времени ротора двигателя; i_q – ток статора по оси q в системе координат d, q , $i_d = i_{us} \cos \rho - i_{vs} \sin \rho$; $\gamma = \frac{R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s}$; L_s – полная индуктивность статора; σ – полный коэффициент рассеяния; $\beta = L_m/(\sigma L_s L_r)$; $u_d = u_{us} \cos \rho + u_{vs} \sin \rho$; $u_q = u_{vs} \cos \rho + u_{us} \sin \rho$.

Введем в уравнения (3) и (4) модели эквивалентного асинхронного электродвигателя новые управления u_1, u_2 , позволяющие убрать из правых частей уравнений нелинейные члены:

$$u_1 = p\Omega i_q + (\alpha L_m i_q^2) / \Psi_d + \alpha\beta\Psi_d + u_d / (\sigma L_s); \quad (6)$$

$$u_2 = -p\Omega i_d - (\alpha L_m i_d i_q) / \Psi_d - p\beta\Omega\Psi_d + u_q / (\sigma L_s). \quad (7)$$

Обозначив $x_1 = \Omega$; $x_2 = \Psi_d$; $x_3 = i_d$; $x_4 = i_q$; $x_5 = \rho$; $a_{11} = -a_{51}$; $a_{12} = -a_{52}$; $a_{124} = k_1\mu$; $a_{21} = -\alpha$; $a_{23} = \alpha L_m$; $a_{31} = -\gamma$; $a_{41} = -\gamma$; $a_{51} = p$; $a_{524} = \alpha L_m$ и подставив управления u_1 и u_2 в уравнения (3), (4) получим модель асинхронного двигателя в виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_2 + a_{23}x_3; \quad \frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_3 + u_1; \quad (8)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = a_{41}x_4 + u_2; \quad \frac{dx_5}{dt} = a_{51}x_1 + a_{524} \frac{x_4}{x_2}.$$

Определим возможность преобразования нелинейной системы (8) к линейной форме (к канонической форме Бруновского [7, 8, 11]). Для этого определим, выполняется ли условие инволютивности для последовательности распределений M^0, M^1, M^2 [7, 8].

С системой дифференциальных уравнений (8) связаны векторные поля

$$X(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_3 \\ a_{41}x_4 \\ a_{51}x_1 + a_{524}(x_4/x_2) \end{pmatrix}; \quad (9)$$

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Y_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Поскольку векторные поля $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ постоянны, то распределение $M^0 = \text{span}\{Y_1, Y_2\}$ – инволютивно и $\dim M^0 = 2$, где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$; $\text{span}\{Y_1, Y_2\}$ – линейная оболочка векторов Y_1 и Y_2 ; $\dim M^0$ – размерность распределения M^0 [7, 8].

Определим распределение $M^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, L_x Y_1, L_x Y_2\}$, где $L_x Y_1$ и $L_x Y_2$ – производные Ли векторных полей Y_1 и Y_2 вдоль векторного поля X :

$$L_x Y_1 = [X, Y_1] = \frac{\partial Y_1}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} Y_1 = -\frac{\partial X}{\partial x} Y_1 = |0, -a_{23}, -a_{31}, 0, 0|^T;$$

$$L_x Y_2 = [X, Y_2] = \frac{\partial Y_2}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} Y_2 = -\frac{\partial X}{\partial x} Y_2 = |-a_{124}x_2, 0, 0, -a_{41}, -a_{524}/x_2|^T,$$

где $[X, Y_k]$ – скобки Ли векторных полей $X, Y_k, k = 1, 2$.

Для инволютивности распределения M^1 необходимо выполнение условия $\text{rank}(Y_1, Y_2, L_x Y_1, L_x Y_2, [X_i, X_j]) = 4$, где X_i, X_j – векторные поля из семейства $(Y_1, Y_2, L_x Y_1, L_x Y_2)$. Имеем:

$$[Y_1, Y_2] = [Y_1, L_x Y_1] = [Y_1, L_x Y_2] = [Y_2, L_x Y_2] = [Y_2, L_x Y_1] = 0. \quad (10)$$

Однако

$$[L_x Y_1, L_x Y_2] = \frac{\partial(L_x Y_2)}{\partial x} L_x Y_1 - \frac{\partial(L_x Y_1)}{\partial x} L_x Y_2 = \left| a_{23}a_{124}, 0, 0, 0, \frac{a_{524}a_{23}}{x_2^2} \right|^T.$$

Поэтому ранг матрицы

$R = (Y_1, Y_2, L_x Y_1, L_x Y_2, [L_x Y_1, L_x Y_2])$ равен пяти:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{124}x_2 & a_{23}a_{124} \\ 0 & 0 & -a_{23} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{524}}{x_2} & \frac{a_{524}a_{23}}{x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, распределения M^1 не является инволютивным. Подраспределения $M_1^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, L_x Y_1\}$ и $M_2^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, L_x Y_2\}$ распределения M^1 в силу соотношений (10) являются инволютивными и имеют одинаковые размерности, равные 3. Обозначим $u_1^* = u_1$ и введем дополнительную фазовую координату в канал, связанный с управлением u_2 :

$$x_6 = u_2; \quad \frac{dx_6}{dt} = u_2^*.$$

С расширенной моделью асинхронного привода связаны следующие векторные поля:

$$X^*(x^*) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4 \\ a_{21}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_3 \\ a_{41}x_4 + x_6 \\ a_{51}x_1 + a_{524}\frac{x_4}{x_2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$Y_1^*(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Y_2^*(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

Для расширенной модели асинхронного привода распределение $M^{0*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*\}$ – инволютивно, $\dim M^{0*} = 2$. Распределение $M^{1*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_x^* Y_1^*, L_x^* Y_2^*\}$ также инволютивно, поскольку

$$[Y_1^*, Y_2^*] = [Y_1^*, L_x^* Y_1^*] = [Y_1^*, L_x^* Y_2^*] = [Y_2^*, L_x^* Y_2^*] = [Y_2^*, L_x^* Y_1^*] = [L_x^* Y_1^*, L_x^* Y_2^*] = 0,$$

где $L_x^* Y_1^* = [X^*, Y_1^*] = \frac{\partial Y_1^*}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_{23} \\ -a_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_2^* = [\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}_2^*] = \frac{\partial \mathbf{Y}_2^*}{\partial \mathbf{x}^*} \mathbf{X}^* - \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_2^* = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

При этом матрица $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Y}_2^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_1^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_2^*)$ имеет ранг равный 4, $m_1 = \dim M^{1^*} = 4$.

Рассмотрим распределение $M^{2^*} = \text{span}\{\mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Y}_2^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_1^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_2^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*}^2 \mathbf{Y}_1^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*}^2 \mathbf{Y}_2^*\}$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*}^2 \mathbf{Y}_1^* &= [\mathbf{X}^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_1^*] = \frac{\partial (\mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_1^*)}{\partial \mathbf{x}^*} \mathbf{X}^* - \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mathbf{x}^*} \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_1^* = \\ &= \begin{vmatrix} a_{23} a_{124} x_4, & a_{23} (a_{21} + a_{31}), & a_{31}^2 \\ 0, & -a_{23} a_{524} x_4 / x_2^2, & 0 \end{vmatrix}^T; \\ \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*}^2 \mathbf{Y}_2^* &= [\mathbf{X}^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_2^*] = \frac{\partial (\mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_2^*)}{\partial \mathbf{x}^*} \mathbf{X}^* - \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mathbf{x}^*} \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_2^* = \\ &= \begin{vmatrix} a_{124} x_2, & 0, & 0, & a_{41}, & \frac{a_{524}}{x_2}, & 0 \end{vmatrix}^T. \end{aligned}$$

Распределение M^{2^*} имеет такую размерность: $\dim M^{2^*} = \text{rank}\{\mathbf{Y}_1^*, \mathbf{Y}_2^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_1^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*} \mathbf{Y}_2^*, \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*}^2 \mathbf{Y}_1^*,$

$$\left. \mathbf{L}_{\mathbf{x}^*}^2 \mathbf{Y}_2^*\} = 6.\right.$$

Распределение M^{2^*} инволютивно. Используя теорию о линейном эквиваленте для нелинейной аффинной системы с векторным управлением [8], получим, что индексы управляемости k_1 и k_2 для рассматриваемой системы управления одинаковы: $k_1 = k_2 = 3$, и имеется две клетки канонической формы Бруновского.

Таким образом, имеется следующий эквивалент исходной математической модели в форме Бруновского:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= y_{i+1}, \quad i = 1, 2, 4, 5; \\ \frac{dy_i}{dt} &= v_k, \quad i = 3, 6; \quad k = i/3. \end{aligned} \quad (11)$$

Известно, что существуют некоторые преобразования $y_1 = T_1(\mathbf{x}^*)$ и $y_4 = T_2(\mathbf{x}^*)$, из которых путем последовательного дифференцирования функций $T_1(\mathbf{x}^*)$ и $T_2(\mathbf{x}^*)$ вдоль векторного поля $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}^* + u_1^* \mathbf{Y}_1^* + u_2^* \mathbf{Y}_2^*$ можно определить, соответственно y_2, y_3 и y_5, y_6 . Получим систему дифференциальных уравнений, определяющих функции $T_1(\mathbf{x}^*)$ и $T_2(\mathbf{x}^*)$. Для этого вначале продифференцируем вдоль векторного поля \mathbf{X}_1 эти функции:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 = L_{\mathbf{X}_1} T_1(\mathbf{x}^*) = L_{\mathbf{X}^*} T_1(\mathbf{x}^*) + u_1^* L_{\mathbf{Y}_1^*} T_1(\mathbf{x}^*) + \\ &+ u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} T_1(\mathbf{x}^*); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_4}{dt} &= y_5 = L_{\mathbf{X}_1} T_2(\mathbf{x}^*) = L_{\mathbf{X}^*} T_2(\mathbf{x}^*) + u_1^* L_{\mathbf{Y}_1^*} T_2(\mathbf{x}^*) + \\ &+ u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} T_2(\mathbf{x}^*); \end{aligned} \quad (13)$$

где $L_{\mathbf{X}_1} T_i(\mathbf{x}^*)$, $L_{\mathbf{X}^*} T_i(\mathbf{x}^*)$, $L_{\mathbf{Y}_1^*} T_i(\mathbf{x}^*)$, $L_{\mathbf{Y}_2^*} T_i(\mathbf{x}^*)$ – производные Ли функций $T_i(\mathbf{x}^*)$, $i = 1, 2$, вдоль, соответственно, векторных полей $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}^* + u_1^* \mathbf{Y}_1^* + u_2^* \mathbf{Y}_2^*$, \mathbf{X}^* , \mathbf{Y}_1^* и \mathbf{Y}_2^* .

Поскольку из выражений (11), (12) и (13) следует, что u_1 и u_4 не зависят от управлений u_1^* и u_2^* , то имеем:

$$L_{\mathbf{Y}_1^*} T_1(\mathbf{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, \mathbf{Y}_1^* \right\rangle = 0; \quad (14)$$

$$L_{\mathbf{Y}_2^*} T_1(\mathbf{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, \mathbf{Y}_2^* \right\rangle = 0; \quad (15)$$

$$L_{\mathbf{Y}_1^*} T_2(\mathbf{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, \mathbf{Y}_1^* \right\rangle = 0; \quad (16)$$

$$L_{\mathbf{Y}_2^*} T_2(\mathbf{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}^*}, \mathbf{Y}_2^* \right\rangle = 0. \quad (17)$$

Из выражений (14) – (17) следует, что функции $T_1(\mathbf{x})$ и $T_2(\mathbf{x})$ не зависят от x_3 и x_6 .

Дифференцируя $y_2 = L_{\mathbf{X}_1} T_1(\mathbf{x}^*)$ и $y_5 = L_{\mathbf{X}_1} T_2(\mathbf{x}^*)$ вдоль векторного поля \mathbf{X}_1 , получим:

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dt} &= y_3 = L_{\mathbf{X}_1} (L_{\mathbf{X}^*} T_1) = \\ &= L_{\mathbf{X}^*}^2 T_1 + u_1^* L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*} T_1) + u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} (L_{\mathbf{X}^*} T_1); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_5}{dt} &= y_6 = L_{\mathbf{X}_1} (L_{\mathbf{X}^*} T_2) = L_{\mathbf{X}^*}^2 T_2 + \\ &+ u_1^* L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*} T_2) + u_2^* L_{\mathbf{Y}_2^*} (L_{\mathbf{X}^*} T_2(\mathbf{x}^*)). \end{aligned} \quad (19)$$

Из выражений (11), (18) и (19) следует, что u_3 и u_6 не зависят от управлений u_1^* и u_2^* , поэтому имеем

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*} T_1) &= L_{\mathbf{Y}_2^*} (L_{\mathbf{X}^*} T_1) = \\ &= L_{\mathbf{Y}_1^*} (L_{\mathbf{X}^*} T_2) = L_{\mathbf{Y}_2^*} (L_{\mathbf{X}^*} T_2) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся известной теоремой [9].

Теорема. Пусть имеются $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ – гладкие векторные функции и $T_1(\mathbf{x})$ – скалярная функция векторного аргумента ($\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $T_1 \in \mathbb{R}$) и выполняются соотношения

$$L_g L_f^i T_1(x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad L_g L_f^m \alpha(x) \neq 0, \quad (21)$$

тогда справедливо выражение

$$L_{ad_j^i g} L_f^k T_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq j+k \leq m-1, \\ (-1)^j L_g L_f^m T_1(x) \neq 0, & j+k = m, \end{cases} \quad (22)$$

где $ad_j^i g$ – скобки Ли j -го порядка функций $f(x)$ и $g(x)$.

Рассмотрим случай, когда $k = 0$, тогда из соотношений (21) $L_g L_f T_1(x) = L_g L_f^2 T_1(x) = \dots = L_g L_f^{m-1} T_1(x) = 0, \quad L_g L_f^m T_1(x) \neq 0$ следует:

$$L_{ad_j^i g} T_1(x) = 0 \quad (23)$$

при $j = 0, 1, \dots, m-1, \quad L_{ad_f^m g} T_1(x) \neq 0$.

Известно [9], что производная Ли $L_f T_1(x)$ скалярной функции $T_1(x)$ векторного аргумента по векторной функции $f(x)$ ($T_1(x) \in R; \quad x, f(x) \in R^n$) может быть определена несколькими эквивалентными выражениями:

$$\begin{aligned} L_f T_1(x) &= \frac{dT_1(x)}{dx} f(x) = \nabla T_1(x) f(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_i} f_i(x), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ – оператор, равно-

сильный оператору дифференцирования $\frac{d}{dx}$ по векторному аргументу. Поэтому соотношения (23) можно, используя выражения (24), записать в виде

$$\nabla T_1(x) ad_f^j g = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad \nabla T_1(x) ad_f^m g \neq 0. \quad (25)$$

Используя выражения (21) – (25) из соотношений (20) получим

$$L_{Y_1^*} (L_{X^*} T_1(x^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x^*}, L_{X^*} Y_1^* \right\rangle = 0; \quad (26)$$

$$L_{Y_2^*} (L_{X^*} T_1(x^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x^*}, L_{X^*} Y_2^* \right\rangle = 0. \quad (27)$$

Поскольку функция $T_1(x^*)$ не зависит от x_3 , то из выражения (26) следует, что она не зависит и от x_2 , а из выражения (27) получим и независимость $T_1(x^*)$ от аргумента x_4 . Таким образом, функция $T_1(x^*)$ может зависеть только от аргументов x_1 и x_5 .

С помощью соотношений, аналогичных (26), (27), нетрудно получить, что функция $T_2(x^*)$ не зависит от аргументов x_2, x_4 и, таким образом, может быть функцией только аргументов x_1 и x_5 .

Дифференцируя $y_3 = L_{X^*}^2 T_1(x^*)$ и $y_5 = L_{X^*}^2 T_2(x^*)$ вдоль векторного поля X_1 , получим

$$\begin{aligned} \frac{dy_3}{dt} &= L_{X_1} (L_{X^*}^2 T_1(x^*)) = \\ &= L_{X^*}^3 T_1 + u_1^* L_{Y_1^*} (L_{X^*}^2 T_1) + u_2^* L_{Y_2^*} (L_{X^*}^2 T_1); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_6}{dt} &= L_{X_1} (L_{X^*}^2 T_2(x^*)) = \\ &= L_{X^*}^3 T_2 + u_1^* L_{Y_1^*} (L_{X^*}^2 T_2) + u_2^* L_{Y_2^*} (L_{X^*}^2 T_2). \end{aligned} \quad (29)$$

Из этих выражений следует, что $L_{Y_1^*} (L_{X^*}^2 T_1(x^*)) \neq 0$ и $L_{Y_2^*} (L_{X^*}^2 T_2(x^*)) \neq 0$ или

$$\begin{aligned} L_{Y_1^*} (L_{X^*}^2 T_1(x)) &= \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x}, L_{X^*} Y_1^* \right\rangle = \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \cdot (a_{23} a_{124} x_4) + \frac{\partial T_1}{\partial x_5} \cdot \left(-\frac{a_{23} a_{524} x_4}{x_2^2} \right) \neq 0; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} L_{Y_2^*} (L_{X^*}^2 T_2(x)) &= \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial x}, L_{X^*} Y_2^* \right\rangle = \\ &= \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \cdot (a_{124} x_4) + \frac{\partial T_2}{\partial x_5} \cdot \left(\frac{a_{524}}{x_2} \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{При } x_2 \neq 0 \text{ и } = \frac{\partial T_2}{\partial x_5} \cdot \left(-\frac{a_{23} a_{524} x_4}{x_2^2} \right) = -a_{23} a_{524} \frac{x_4}{x_2^2};$$

одним из возможных решений системы неравенств (30), (31) может быть $T_1(x) = x_1$ и $T_2(x) = x_5$.

Известно [8], что для того чтобы существовали преобразования (12), (13), (18), (19), (28), (29) необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$Q = \begin{vmatrix} L_{Y_1^*} (L_{X^*}^2 T_1(x^*)) & L_{Y_2^*} (L_{X^*}^2 T_1(x^*)) \\ L_{Y_1^*} (L_{X^*}^2 T_2(x^*)) & L_{Y_2^*} (L_{X^*}^2 T_2(x^*)) \end{vmatrix} \quad (32)$$

была невырождена. Проверим это, вычислив элементы матрицы Q и ее определитель:

$$\det Q = \begin{vmatrix} a_{124} a_{23} x_4 & a_{124} x_2 \\ -a_{23} a_{524} \frac{x_4}{x_2} & \frac{a_{524}}{x_2} \end{vmatrix} = 2a_{124} a_{23} a_{524} \frac{x_4}{x_2}.$$

Таким образом, при $x_2 \neq 0$ и $x_4 \neq 0$ преобразования (12), (13), (18), (19), (28), (29) существуют.

На рис. 1 и 2 приведены осциллограммы процессов, полученные с помощью математических моделей (8) и (11). На рис. 1 (график переменной x_1) приведено изменение во времени угловой скорости вращения ротора в математической модели (8), при разгоне дизель-поезда до 60 км/ч на ровном участке железнодорожного пути, а на втором графике – изменение во времени переменной y_1 , входящей в первое дифференциальное уравнение канонической формы Бруновского (11). Из рис. 1 следует, что $x_1 \equiv y_1$.

На рис. 2 (график переменной a) приведена осциллограмма поведения во времени ускорения a в модели (8), при разгоне дизель-поезда до 60 км/ч на ровном участке железнодорожного пути без учета действующих ограничений на ускорение, а на вто-

ром графике – осциллограмма поведения во времени переменной y_2 , входящей в первое дифференциальное уравнение канонической формы Бруновского (11) и являющейся производной от скорости y_1 . Из рис. 2 следует подтверждение, что $y_2(t) \equiv a(t)$, то есть ускорения, полученные с помощью двух разных математических моделей, одинаковы.

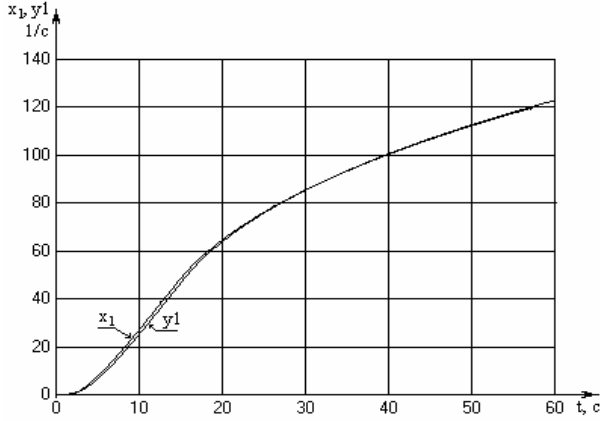


Рис. 1. Поведение переменных x_1 и y_1 во времени

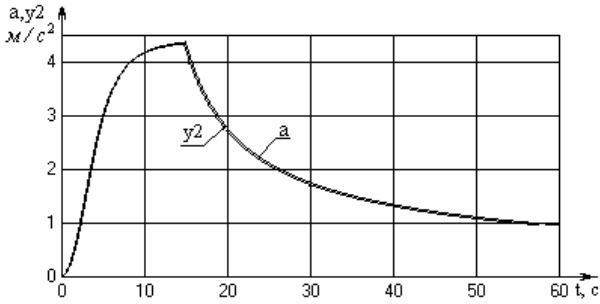


Рис. 2. Поведение переменных a и y_2 во времени

Зная $T_1(x^*)$ и $T_2(x^*)$, определим функции перехода к форме Бруновского (11):

$$\begin{aligned}
 y_1 &= T_1(x) = x_1; \\
 y_2 &= L_{X^*} T_1(x^*) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1(x^*)}{\partial x_i} X_i^* = \\
 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + a_{124}x_2x_4; \\
 y_3 &= L_{X^*}^2 T_1(x^*) = L_{X^*}(L_{X^*} T_1(x^*)) = \\
 &= \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(L_{X^*} T_1(x^*))}{\partial x_i} X_i^* = (a_{11} + 2a_{12}x_1) \times \\
 &\quad \times (a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4) + \\
 &\quad + a_{124}x_4(a_{21}x_2 + a_{23}x_{31}) + a_{124}x_2(a_{41}x_4 + x_6); \\
 y_4 &= T_2(x) = x_5; \\
 y_5 &= L_{X^*} T_5(x^*) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial T_5(x^*)}{\partial x_i} X_i^* = a_{51}x_1 + a_{524} \frac{x_4}{x_2}; \\
 y_6 &= L_{X^*}^2 T_2(x^*) = L_{X^*}(L_{X^*} T_2(x^*)) = \\
 &= \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(L_{X^*} T_2(x^*))}{\partial x_i} X_i^* =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_{51}(a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2 + a_{124}x_2x_4) + \\
 &+ \left(-a_{524} \frac{x_4}{x_2} \right) (a_{21}x_2 + a_{23}x_{31}) + \frac{a_{524}}{x_2} (a_{41}x_4 + x_6).
 \end{aligned}$$

Из вида уравнений (12), (13), (18), (19), (28), (29) следует, что управления v_1, v_2 для системы уравнений в форме Бруновского (11) определяются из выражений (28), (29):

$$\begin{aligned}
 v_1 &= L_{X^*}^3 T_1(x^*) + u_1^* L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_1(x^*)) + u_2^* L_{Y_2^*}(L_{X^*}^2 T_1(x^*)); \\
 v_2 &= L_{X^*}^3 T_2(x^*) + u_1^* L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_2(x^*)) + u_2^* L_{Y_2^*}(L_{X^*}^2 T_2(x^*)).
 \end{aligned}$$

Систему уравнений (11) можно использовать для определения оптимальных управлений v_1, v_2 . Затем, зная v_1 и v_2 , определить u_2^* и u_1^* , а потом и управления u_1 и u_2 :

$$\begin{aligned}
 u_1^* &= \frac{1}{L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_1(x^*))} [v_1 - L_{X^*}^3 T_1(x) - \\
 &\quad - u_2^* L_{Y_2^*}(L_{X^*}^2 T_1(x^*))];
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^* &= \frac{1}{\det Q} [L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_1(x^*))(v_2 - L_{X^*}^3 T_2(x)) - \\
 &\quad - L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2 T_2(x^*))(v_1 - L_{X^*}^3 T_1(x))];
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$u_1 = u_1^*; \quad u_2 = \int_0^T u_2^* dt. \tag{35}$$

Из соотношений (6), (7) при известных управлениях (35) находятся управления u_d и u_q для исходного объекта (1) – (5).

Таким образом, впервые средствами дифференциальной геометрии получена работоспособная математическая модель тягового асинхронного привода в канонической форме Бруновского, которую можно использовать для синтеза оптимальных законов управления асинхронным приводом.

Синтез оптимальных управлений дизель-поездом с помощью принципа максимума Понтрягина

Оптимизация процессов управления тяговым подвижным составом считается одной из важнейших задач железнодорожного транспорта. В зависимости от требований, предъявляемых к движению состава, может быть дана та или иная формулировка задачи оптимального управления тяговым приводом. Число таких задач в общем случае велико, однако большинство из них может быть сведено к двум основным типам задач, решаемых методами теории оптимального управления. Это задачи максимального быстродействия и управления по минимуму или максимуму интеграла.

Решение задачи максимального быстродействия. Решим вначале с помощью принципа макси-

мума Л.С. Понтрягина задачу максимального быстрого действия. Поскольку линейная модель объекта управления в форме Бруновского (11) состоит из двух одинаковых по внешнему виду подсистем дифференциальных уравнений, то можно рассматривать определение управления v_1 , минимизирующего функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt, \quad (36)$$

где t_0 и t_1 – начало и конец интервала управления, только для одной из подсистем – первой:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dt} = y_3; \quad \frac{dy_3}{dt} = v_1, \quad (37)$$

где на управления v_1 наложены ограничения

$$v_{1\min} \leq v_1 \leq v_{1\max}; \quad v_{1\min} < 0, \quad v_{1\max} > 0. \quad (38)$$

Общее решение задачи максимального быстрого действия для объекта (37) известно [6 (стр. 97-99)]. Однако для рассматриваемого привода без введения дополнительных условий оно не имеет особого смысла. При управлении тяговым электроприводом дизель-поезда важно не только поведение привода, но и то, какое расстояние проходит состав за интервал времени управления. Поэтому введем дополнительное условие, требующее, чтобы при решении задач максимального быстрого действия выполнялось:

$$\int_{t_0}^{t_1} V dt = \int_{t_0}^{t_1} y_1 k dt = L, \quad V(t_0) = V(t_1) = 0, \quad (39)$$

где V – скорость движения дизель-поезда; $V = k\Omega = ky_1$; k – постоянный коэффициент; L – расстояние, которое необходимо пройти дизель-поезду за интервал времени управления $[t_0, t_1]$. Другими словами, необходимо решить задачу перевозки с помощью дизель-поезда пассажиров из начального пункта в конечный (расстояние между пунктами равно L) за минимально возможное время.

Условие (39) можно записать и в дифференциальной форме

$$\frac{dS}{dt} = ky_1, \quad S(t_0) = 0, \quad S(t_1) = L,$$

где S – расстояние от начального пункта движения.

Введя переменные: $z_1 = S$, $z_i = y_{i-1}$, $i = 2, 3, 4$, получим новую математическую модель объекта управления

$$\frac{dz_1}{dt} = kz_2; \quad \frac{dz_k}{dt} = z_{k+1}, \quad k = 2, 3; \quad \frac{dz_4}{dt} = v_1 \quad (40)$$

и измененную задачу оптимального управления:

Необходимо найти управление v_1^* , минимизирующее функционал (36) при переводе объекта (40) из начального состояния $z_i(t_0) = 0$, $i = \overline{1, 4}$, в конечное состояние $z_1(t_1) = L$,

$z_j(t_1) = 0$, $j = \overline{2, 3}$. При этом на управление v_1 наложены ограничения (38).

Запишем функцию Гамильтона

$$H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \psi_1 kz_2 + \psi_2 z_3 + \psi_3 z_4 + \psi_4 v_1 + \psi_0 z_0, \quad i = \overline{0, 4}, \quad (41)$$

$$H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \max_{v_1 \in G} H(z_i(t), \psi_i(t), v_1),$$

где $z_0 \equiv 1$ – дополнительная фазовая переменная, учитывающая наличие функционала (36); ψ_i ($i = \overline{0, 3}$) – сопряженные переменные; G – область допустимых управлений, задаваемая неравенствами (38).

В силу линейности гамильтониана (41) по отношению к управлению v_1 , получаем, что он достигает своего максимального значения при условии, что управление v_1^* по своему знаку противоположно сопряженной переменной ψ_4

$$v_1^* = \begin{cases} v_{1\max} \psi_4, & \text{при } \psi_4 > 0; \\ v_{1\min} \psi_4, & \text{при } \psi_4 < 0. \end{cases} \quad (42)$$

Сопряженные переменные ψ_i ($i = \overline{0, 4}$) определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \quad \psi_i(t_1) = \psi_{i1}, \quad i = \overline{0, 4}, \quad (43)$$

где $\psi_i(t_1)$ ($i = \overline{0, 4}$) – значения сопряженных переменных в конечный момент интервала управления.

Выполняя дифференцирование правых частей уравнений (43) с учетом выражения (41), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dt} &= 0; \quad \frac{d\psi_1}{dt} = 0; \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -k\psi_1; \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= -\psi_2; \quad \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_3. \end{aligned} \quad (44)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения (44), найдем сопряженные переменные:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= c_0; \quad \psi_1 = c_1; \quad \psi_2 = -kc_1 t + c_2; \\ \psi_3 &= \frac{kc_1}{2} t^2 - c_2 t + c_3; \\ \psi_4 &= -\frac{kc_1}{6} t^3 + \frac{c_2}{2} t^2 - c_3 t + c_4, \end{aligned} \quad (45)$$

где c_k ($k = \overline{0, 4}$) – константы.

Так как константы c_i ($i = \overline{0, 4}$) неизвестны, то применение принципа максимума Понтрягина приводит на этом этапе к качественному описанию изменения управления. Поскольку функция $\psi_4(t)$ может менять знак не более трех раз, то и управление v_1^* может иметь не более трех изменений знака управления, т.е. не более четырех интервалов постоянства управления.

Однако в рассматриваемом случае решение

существенно упрощается, поскольку при равном участке железнодорожного пути перевозка пассажиров дизель-поездом начинается с разгона, достижения максимальной скорости, движения с этой скоростью, а затем торможение и остановка, то есть наблюдается только два интервала постоянства управления. Время переключения с одного постоянного управления на другое может быть определено с помощью итерационной процедуры. Переменный профиль пути на равнинной местности не вносит существенных изменений в закон управления, однако время переключения с одного управления на другое может изменяться и может не быть интервала времени с постоянной скоростью движения.

На рис. 3 представлены графики изменения во времени управления v_1 , ускорения a и скорости V движения состава для математической модели (40) при поездке дизель-поезда на равном участке железнодорожного пути длиной 3 км без учета действующих на транспорте ограничений по ускорению.

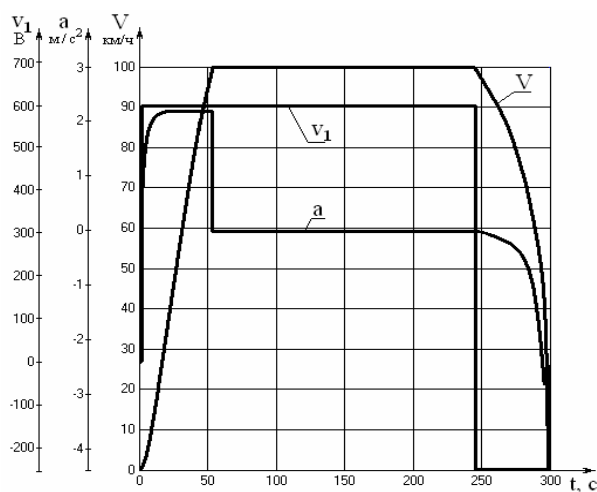


Рис. 3. Графики изменения управления v_1 , ускорения a и скорости движения V при поездке дизель-поезда на равном участке железнодорожного пути длиной 3 км

Поскольку подсистема уравнений линейной модели (11), описывают один и тот же физический объект – асинхронный двигатель, а управления v_1 и v_2 являются управлениями этим двигателем, которые, в конечном итоге, определяют амплитуду A и частоту ω питающего напряжения при частотном управлении двигателем, то управления v_1 и v_2 взаимосвязаны. В рассматриваемой задаче управления v_1^* однозначно определяет управление v_2^*

$$v_2^* = \begin{cases} v_{2\max}, & \text{если } v_1^* = v_{1\max}; \\ v_{2\min}, & \text{если } v_1^* = v_{1\min}, \end{cases}$$

где $v_{2\min}, v_{2\max}$ – соответственно минимально и максимально допустимые значения управления v_2 , $v_{2\min} \leq v_2 \leq v_{2\max}$; $v_{2\min} < 0$, $v_{2\max} > 0$.

Зная оптимальные управления v_1^* и v_2^* и используя соотношения (33), (34) можно определить управления u_1^* и u_2^* , затем управления u_1 и u_2 (выражения (35)) и из соотношений (6) и (7) найти управления u_d и u_q , входящие в модель объекта (1) – (5). От средних значений управлений u_d, u_q с помощью известных преобразований [12] возможен переход к мгновенным значениям управлений по амплитуде A и частоте ω питающего напряжения.

На рис. 4 приведены осциллограммы поведения во времени управлений u_d и u_q при разгоне дизель-поезда до 100 км/ч на равном участке железнодорожного пути, а на рис. 5 приведена осциллограмма поведения во времени питающего напряжения u_x двигателя дизель-поезда, модель которого выражена через потокосцепления во вращающейся системе координат $(x, y, 0)$, в первые 10 сек. разгона до скорости 100 км/ч на равном участке железнодорожного пути.

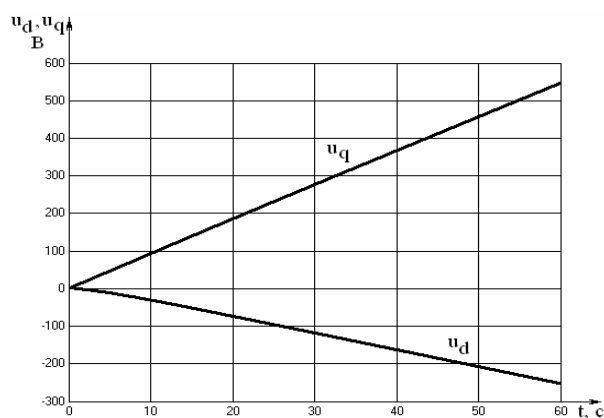


Рис. 4. Управления u_d и u_q при разгоне дизель-поезда до 100 км/ч на равном участке железнодорожного пути

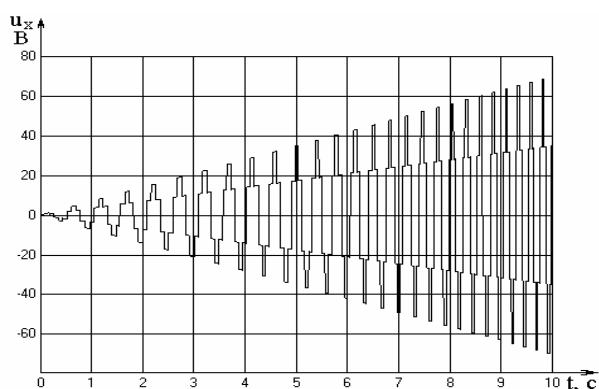


Рис. 5. График изменения значения питающего напряжения двигателя дизель-поезда при разгоне до 100 км/ч на равном участке железнодорожного пути

На сегодняшний день на железных дорогах Украины действует ограничение на максимальное значение ускорения при ведении подвижного состава в режимах разгона и торможения. Для комфортной

поездки пассажиров значение ускорения должны находиться в пределах

$$-1,0 \div -0,7 \text{ м/с}^2 \leq a \leq 0,7 \div 1,0 \text{ м/с}^2.$$

В результате применения действующих ограничений к закону оптимального управления (рис. 3, график v_1), полученного с помощью принципа максимума Понтрягина для линейной модели объекта (36), получим закон управления тяговым асинхронным приводом с учетом ограничений по ускорению при движении дизель-поезда на ровном участке железнодорожного пути длиной 3 км (рис. 6).

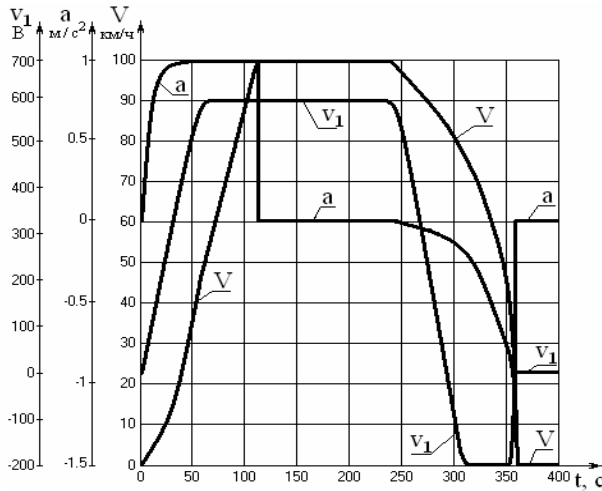


Рис. 6. График изменения управления v_1 , ускорения a и скорости движения V при поездке дизель-поезда на ровном участке железнодорожного пути длиной 3 км с учетом действующих ограничений по ускорению

Таким образом, с помощью динамической линеаризации и принципа максимума Понтрягина, получены законы оптимального управления тяговым асинхронным приводом дизель-поезда при решении задачи максимального быстродействия.

Решение задачи минимизации взвешенной линейной комбинации расхода квадрата управления и времени движения состава. Объект управления в этом случае описывается системой уравнений (40), а управление определяется из условия минимума функционала

$$J = \int_0^{t_1} (1 + k_v v_1^2) dt, \quad (46)$$

где k_v – постоянный коэффициент.

Основные соотношения принципа максимума Понтрягина имеют вид:

$$H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \psi_1 k z_2 + \psi_2 z_3 + \psi_3 z_4 + \psi_4 v_1 + (1 + k_v v_1^2) \psi_0, \quad i = \overline{0, 4};$$

$$H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \max_{v_1 \in G} (H(z_i(t), \psi_i(t), v_1)), \quad i = \overline{0, 4};$$

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad z_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{1, 4}; \quad z_1(t_1) = L;$$

$$z_j(t_1) = z_{j1}, \quad j = \overline{2, 4};$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \quad \psi_i(t_1) = \psi_{i1}, \quad i = \overline{0, 4}, \quad (47)$$

где G – область допустимых управлений, задаваемая неравенствами (38); $z_i(t_0)$, $z_j(t_1)$ – значения фазовых переменных в начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени; $\psi_i(t_1)$ – значения сопряженных переменных в конечный момент времени.

Сопряженные переменные $\psi_i(t)$, $i = \overline{0, 4}$, как и в задаче максимального быстродействия, определяются соотношениями (44) и находятся из системы дифференциальных уравнений (47).

Если управление v_1 в режиме тяги находится внутри допустимой области управлений G , тогда справедливо соотношение

$$\Phi = \frac{\partial H}{\partial v_1} = \psi_4 + 2k_v v_1 \psi_0 = 0; \quad v_1 = -\frac{\psi_4}{2k_v \psi_0} < v_{1max}.$$

По основной теореме принципа максимума [6] вектор сопряженных переменных $\vec{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_4)$ определен с точностью до произвольного постоянного положительного множителя и $\psi_0(t) = \text{const} < 0$ (ситуация аномальных вариационных задач, когда $\psi_0(t) = 0$, не рассматривается, поскольку решаемая задача к этому классу не относится), поэтому можно принять: $\psi_0 \equiv -1$.

В рассматриваемой задаче в интервале времени управления режимом тяги выполняется равенство

$$H = \max_{u \in G} H(z_i(t), \psi_i(t), v_1) = \text{const} = 0. \quad (48)$$

Имея два интеграла H и Φ уравнений движения можно с помощью скобок Пуассона получить третий интеграл движения [13]:

$$[H\Phi]_{\Pi} = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial H}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} - \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \right) = 0; \quad (49)$$

$$\text{или} \quad [H\Phi]_{\Pi} = \psi_3 = 0, \quad (50)$$

где $[H\Phi]_{\Pi}$ – скобки Пуассона интегралов H и Φ уравнений движения.

Из выражений (45) и (50) следует, что $\psi_3 = \frac{kc_1 t}{2} - c_2 t + c_3 = 0$, поэтому $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ и $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$.

Таким образом, при $\psi_0 = -1$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ имеем:

$$H = \psi_4 v_1 - (1 + k_v v_1^2) = 0 \quad \text{и} \quad \psi_4 - 2k_v v_1 = 0. \quad (51)$$

Исключая ψ_4 из выражений (51), получим

$$v_1 = \sqrt{1/k_v}.$$

При малых значениях k_v управление v_1 в режиме тяги может превосходить v_{1max} , т.е. выходить за пределы допустимой области управлений, поэтому оно должно определяться соотношением:

$$v_1 = \begin{cases} \sqrt{1/k_v}, & \text{если } \sqrt{1/k_v} \leq v_{1\max}; \\ v_{1\max}, & \text{если } \sqrt{1/k_v} > v_{1\max}. \end{cases}$$

Определим минимально допустимое значение коэффициента $k_{v\min}$, которое имеет смысл использовать в функционале (46)

$$k_{v\min} \geq \frac{1}{v_{1\max}^2}.$$

Следовательно, только при $k_v > k_{v\min}$ решение рассматриваемой задачи будет отличаться от решения задачи максимального быстродействия.

Выводы

Таким образом, впервые средствами дифференциальной геометрии получена работоспособная математическая модель асинхронного привода в канонической форме Бруновского, которую можно использовать для синтеза законов управления асинхронным приводом. С помощью полученной модели и принципа максимума Понтрягина решены две задачи оптимального управления дизель-поездом.

Список литературы

1. Бауэр Х.П. Оптимальное использование сцепления на электровозе с трехфазным тяговым приводом / Х.П. Бауэр // Железные дороги мира. – 1987. – № 8. – С. 10-23.
2. Ohishi K. Adhesion control of electric motor coach based on force control using disturbance observer / K. Ohishi, Y. Ogawa // IEEE, *Advanced Motion Control*. – April, 2000. – P. 323-328.
3. Тяговые и токовые характеристики электроподвижного состава с асинхронным тяговым двигателем / В.И. Омеляненко, Н.Н. Калужный, Т.А. Кулиш, Г.В. Кривякин // Проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта: Тезисы LXVI международной конференции. – Днепропетровск: ДИИТ, 2006. – С. 123.
4. Шапран Е.Н. Совершенствование микропроцессорных систем управления с высоким использованием сил

сцепления / Е.Н. Шапран // Вісник НТУ «ХПИ». Зб. наук. пр. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Х.: НТУ «ХПИ», 2006. – № 23. – С. 145-154.

5. Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов / В.Д. Носков, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Заполовский, С.Ю. Леонов. – Х.: ХФИ “Транспорт Украины”, 2003. – 248 с.

6. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти томах. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и И.Д. Егунова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.

7. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егунова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.

8. Краснощеченко В.И. Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / В.И. Краснощеченко, А.П. Грищенко. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 520 с.

9. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учебное пособие / Д.П. Ким. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

10. Kim D.P. *Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System* / D.P. Kim. – Seoul: Harnol, 2000. – 558 p.

11. Дмитриенко В.Д. Линеаризация математической модели привода методами дифференциальной геометрии / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Вісник НТУ «ХПИ». Зб. наук. пр. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Х.: НТУ «ХПИ», 2007. – № 19. – С. 64-77.

12. Сандлер А.С. Автоматическое частотное управление асинхронными двигателями / А.С. Сандлер, Р.С. Сарбатов. – М.: Энергия, 1974. – 328 с.

13. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 томах. Т. 1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. – М.: Наука, 1988. – 215 с.

Поступила в редакцию 18.06.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Серков, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ КЕРУВАННЯ ТЯГОВИМ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ МЕТОДАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ І ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ

В.Д. Дмитрієнко, О.Ю. Заковоротний

Розглянутий геометричний метод лінеаризації зворотним зв'язком нелінійної математичної моделі тягового асинхронного електроприводу дизель-поїзда. За допомогою послідовності інволютивних розподілів отримана лінійна математична модель електроприводу у формі Бруновського. Порівняння процесів в результатній і лінійній математичних моделях асинхронного приводу в різних режимах роботи підтвердило правильність лінеаризації зворотним зв'язком початкової моделі і працездатність моделі об'єкту у формі Бруновського, яка використовувалася для синтезу законів управління за допомогою принципу максимуму.

Ключові слова: геометричний метод, лінеаризація зворотним зв'язком, форма Бруновського, інволютивні розподіли, тяговий асинхронний електропривод.

SYNTHESIS OF OPTIMUM CONTROL LAWS TRACTION ELECTRIC POWER BY DIFFERENTIAL GEOMETRY AND THE PRINCIPLE OF MAXIMUM

V.V. Dmitrienko, A.Yu. Zakovorotnyi

A geometric method for feedback linearization of nonlinear mathematical model of asynchronous traction diesel-electric drive train. With the help of a sequence of involutive distributions received by a linear mathematical model of electric power in the form of Brunovskogo. Comparison processes in the source and the linear mathematical models of asynchronous drive in different modes of work has confirmed the correctness of the linearization feedback source model and operating model in the form of Brunovskogo, which was used for the synthesis of control laws using the maximum principle.

Keywords: geometric method, linearization feedback, form of Brunovskogo, Involutive distribution, asynchronous electric traction.