УДК 006.91 (083.131)

А.Г. Чуновкина

ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, Санкт-Петербург, Россия

ЕЩЕ РАЗ О СПОСОБАХ «СУММИРОВАНИЯ» СИСТЕМАТИЧЕСКИХ И СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрены достоинства и недостатки GUM и пути его совершенствования, проведено сравнение подходов погрешности и неопределенности, излагается Байесовский подход к оцениванию неопределенности измерений.

Ключевые слова: *систематические погрешности, случайные погрешности, неопределенность измерений, Байесовский подход.*

Введение

Уже более 15 лет "*Руководство по выражению неопределенности измерения*" (GUM) [1] является основополагающим международным документом в области оценивания результатов измерений. Несомненно, к достоинствам GUM необходимо отнести следующие.

1. В основе вычисления неопределенности лежит единая для всех источников неопределенности характеристика точности – дисперсия распределения вероятностей или стандартная неопределенность. Эта характеристика обладает двумя полезными свойствами: она однозначно вычисляется на основе стандартных неопределенностей входных величин и уравнения (модели) измерения и она может использоваться далее, когда соответствующая выходная величина становится входной величиной для другой модели измерений в другой измерительной задаче.

Если уравнение измерений линейно, то вычисление стандартной неопределенности измеряемой величины основано на общем правиле суммирования дисперсий в теории вероятностей. Для выполнения вычислений необходимо знать стандартные неопределенности входных величин и их попарные ковариации. В публикациях по оцениванию неопределенности измерений это правило часто называют «законом трансформирования (распространения) неопределенности». Для линеаризуемых уравнений измерений это правило дает хорошее приближение.

3. Простота методов вычисления неопределенности измерения, предлагаемых GUM, и их известность большинству метрологов-практиков обеспечивает достижение основной цели GUM – унификации методов вычисления неопределенности измерений и представления результатов измерения.

Сегодня дальнейшее развитие GUM идет путем разработки Приложений к нему, расширяющих область распространения этого документа. Нелинейные модели измерений и распределения, отличные от нормального, рассмотрены в Приложении 1 [2]. Моделям с произвольным числом выходных величин будет посвящено Приложение 2. Отдельное приложение планируется для рассмотрения вопросов формализованного построения моделей измерений [3]. Наряду с этим продолжается дискуссия о теоретико-вероятностных основах GUM, обсуждаются внутренние противоречия GUM, предлагаются пути его совершенствования [4 – 11].

Целью статьи является рассмотрение байесовского подхода к оцениванию неопределенности измерений.

Изложение основного материала

Наиболее строгое изложение методов вычисления неопределенности измерений базируется на байесовском подходе, в соответствии с которым оцениваемому параметру (измеряемой величине) может быть сопоставлена плотность распределения вероятностей ее возможных значений. «Возможных» в данном контексте означает согласованных с имеющейся информацией. Другими словами, эта плотность распределений значений описывает неполноту нашего знания значения измеряемой величины с учетом априорной информации и экспериментальных данных, полученных при измерении.

Часто байесовский подход называют «субъективным» в противоположность классическому или «частотному» подходу, который использует понятие «характеристики погрешности» для выражения точности результата измерения. Однако надо признать, что такое разделение условно и неудачно, поскольку в измерении и оценивании результатов измерений всегда присутствует субъективный фактор.

Различия в двух подходах заключаются в обосновании использования аппарата теории вероятностей и математической статистики для оценивания результатов измерений. Продолжающаяся ни одно десятилетие дискуссия по поводу корректности применения статистических методов для оценивания точности результатов измерений выявила «узкие» места классического подхода, такие как обоснование правил суммирования систематических и случайных погрешностей, постулирование нормального закона распределений, обработка малочисленных групп результатов измерений и др.

Если в двух словах попытаться сравнить классический «подход погрешности» и «подход неопределенности» при оценивании точности измерений, то общим для них является использования теоретико-вероятностных методов. Но существует методологическое различие в оценке характеристик погрешности и вычислении неопределенности. «Подход погрешности» базируется на частотной интерпретации вероятности, а «подход неопределенности» – на субъективной вероятности.

В «подходе погрешностей» результат измерения считается случайной величиной, а ряд повторных результатов измерений – выборкой из распределения этой величины. В простейшей ситуации, когда отсутствуют систематические погрешности измерений, математическое ожидание этой величины является значением измеряемой величины. При нормальном законе распределения среднее значение ряда повторных значений есть несмещенная оценка математического ожидания, а выборочное СКО – оценка стандартного отклонения нормального распределения.

С увеличением числа измерений точность этих оценок возрастает - среднее значение стремится к значению измеряемой величины.

В «подходе неопределенности» понятие случайной величины используется для описания неполноты нашего знания значения измеряемой величины. В соответствии с принципом максимальной энтропии измеряемой величине приписывается априорное распределение вероятностей ее возможных значений на основе имеющейся информации. Инструментом объединения априорной информации об измеряемой величине с информацией, содержащейся в результатах повторных измерений, служит теорема Байеса. Апостериорное распределение измеряемой величины равно произведению априорного распределения на функцию максимального правдоподобия результатов повторных измерений.

Следует особо подчеркнуть, что в отличие от распределения результатов измерений, распределение возможных значений измеряемой величины определено полностью. Оно является наиболее полной формой выражения неопределенности измеряемой величины, из которой легко могут быть получены частные характеристики, такие как стандартная неопределенность и интервал охвата.

В случае отсутствия априорной информации об измеряемой величине и о СКО результатов повторных измерений, распределенных по нормальному закону, апостериорным распределением является смещенное распределение Стьюдента с n – 1 числом степеней свободы. Стандартное отклонение этого распределения равно

$$u_{Bayes} = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \times \frac{s}{\sqrt{n}},$$

Как видно из приведенной формулы, байесовские методы вычисления неопределенности измерения на основе анализа ряда повторных результатов измерений, т.е. по типу А, начинают работать при $n \ge 4$. Классическую оценку СКО среднего можно рассматривать как некоторое приближение байесовской стандартной неопределенности при достаточно больших n.

Покажем, как с помощью теоремы Байеса можно обосновать правило «суммирования систематических и случайных погрешностей». Рассмотрим классическую задачу оценивания результатов прямых многократных измерений. Уравнение измерений в этом случае имеет вид:

$$X_i = X + B + E_i, \quad i = 1, ..., n,$$

где B − систематическое смещение в результатах измерений, пусть для определенности оно полностью определяется смещением показаний СИ; X − значение измеряемой величины; E_i − случайные погрешности измерений.

Задачей является получение оценки измеряемой величины и соответствующей неопределенности на основе априорной информации и экспериментальных данных. В соответствии с концепцией неопределенности в качестве оценки измеряемой величины берется математическое ожидание условного распределения этой величины, а стандартная неопределенность равна СКО этого распределения.

Для того чтобы применить теорему Байеса, необходимо априорную информацию о величинах, входящих в уравнение, формализовать в виде априорных плотностей распределений. Апостериорная совместная плотность распределения этих величин получится умножением на функцию максимального правдоподобия. Интегрируя по тем величинам, которые не представляют интерес, в данном случае B, получают одномерную плотность распределения оцениваемых величин, в данном случае, измеряемой величины X.

Положим, что имеется следующая априорная информация. Известна стандартная неопределенность u_B распределения возможных значений систематического смещения (неисключенной систематической погрешности), которая определяется при калибровке СИ. По сути дела, это неопределенность поправки на показания СИ. Сама поправка может быть и нулевой, но важно, что она уже внесена. Поэтому u_B - это СКО распределения неисключенных систематических погрешностей, которые моделируются случайной величиной B. В соответствии с принципом максимума энтропии в этом случае случайная величина B имеет гауссовское распределение:

$$p_B\left(t \middle| u_B\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_B} \exp\left\{-\frac{t^2}{2u_B^2}\right\}.$$

Информация о возможных значениях измеряемой величины отсутствует, что описывается неинформативным априорным распределением:

$$p(X) \propto 1.$$

Для простоты выкладок предполагается, что известно СКО повторяемости результатов измерений σ. Тогда функция максимального правдоподобия в случае нормального закона распределений результатов измерений имеет вид:

$$p\left(t \middle| x_1, ..., x_n, b\right) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\left(t - x_i - b\right)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Перемножением априорных плотностей распределений и функции максимального правдоподобия получаем совместную апостериорную плотность распределения измеряемой величины и систематического смещения:

$$p\left(x, b \middle| ..., x_i, , u_B....\sigma....\right) \propto$$

$$\propto \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\left(x_i - x - b_i\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_B} \exp\left\{-\frac{b^2}{2u_B^2}\right\}.$$

Несложными математическими преобразованиями и интегрированием по переменной, соответствующей систематическому смещению результатов измерений, получаем условную апостериорную плотность распределения выходной величины (символом I в ней обозначена имеющаяся информация $I = \{\sigma, u_B, x_1, ..., x_n\}$):

$$.\, p\left(x \middle| I\right) = \int p\left(x, b \middle| ..., x_i, , u_B....\sigma....\right) db \propto$$

$$\propto \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\left(x_i - x - b_i\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_B} \exp\left\{-\frac{b^2}{2u_B^2}\right\} \propto$$

$$\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}u_B} \int \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_i \left(x_i - x\right)^2 - \right.\right.$$

$$-2b\sum_i\left(x_i - x\right) + nb^2\Bigg\} - \frac{b^2}{2u_B^2}\Bigg\}db \propto \exp\left\{-\frac{\left(x-\overline{x}\right)^2}{2\left(u_B^2+\dfrac{\sigma^2}{n}\right)}\right\}.$$

Таким образом, распределение измеряемой величины является гауссовским с математическим ожиданием $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ и соответствующей стандартной неопределенностью

$$u\left(\overline{x}\right) = \sqrt{u_B^2 + \frac{\sigma^2}{n}}\ .$$

Полученный результат хорошо согласуется с классическим подходом, однако имеет иную интерпретацию.

Выводы

1. Несмотря на явные достоинства при оценивании неопределенности измерений, GUM имеет ряд недостатков и внутренних противоречий, которые устраняются путем издания соответствующих приложений.

2. Продолжающаяся дискуссия о теоретико-вероятностных основах GUM приводит к необходимости внедрения байесовского подхода к оцениванию неопределенности измерений, результаты которого хорошо согласуются с классическим подходом, однако имеют иную интерпретацию.

Список литературы

1. ISO. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, Geneva. 1995. International Organization for standardization.

2. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" — Propagation of distributions using a Monte Carlo method. Joint Committee for Guides in Metrology, Bureau International des Poids et Mesures, JCGM 101.

3. Bich W. Evolution of the 'Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement' / W. Bich, M.G. Cox, P.M. Harris // Metrologia. – 2006. – 43. – S. 161-166.

4. Chunovkina A.G. Methodological problems of realizing of accuracy algorithms according to the "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" / A.G. Chunovkina // Metrological Aspects of Data Processing and Information Systems in Metrology, PTB-IT–7, Braunsweig und Berlin. – 1999. – Juni. – P. 146-155.

5. A probabilistic approach to the analysis of measurement processes / M.G. Cox, G.B. Rossi, P.M. Harris, A. Forbes // Metrologia. – 2008. – 45. – P. 493-502.

6. Elster C. Draft GUM Supplement 1 and Bayesian analysis / C. Elster, W. Woeger, M.G. Cox // Metrologia. – 2007. – 44. – L. 31-32.

7. Kacker R. Comparison of ISO-GUM, draft GUM Supplement 1 and Byesian statistics using simple linear calibration / R. Kacker, B. Toman, D. Huang // Metrologia. – 2006. – 43. – S. 161–166.

8. Lira I and Woeger W. 2006. Comparison between the conventional and Bayesian approaches to evaluate measurement data. Metrologia 43, S249-S259.

9. Possolo A. Assessment of measurement uncertainty via observation equations / A. Possolo, B. Toman // Metrologia. – 2007. – 44. – P. 464-475.

10. Possolo A. Contribution to a conversation about the Supplement 1 to the GUM / A. Possolo, B. Toman, T. Estler // Metrologia. – 2009. – 46. – L. 1–7.

11. Willink R. Principles of probability and statistics for metrology / R. Willink // Metrologia. – 2006. – 43, N 4. – P. 211-220.

Поступила в редколлегию 8.04.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ЩЕ РАЗ О ЗАСОБАХ "ПІДСУМОВУВАННЯ" СИСТЕМАТИЧНИХ І ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

А.Г. Чуновкіна

Розглянуті достоїнства та недоліки GUM і шляхи його удосконалення, проведено порівняння підходів похибки та невизначеності, викладається Байєсівський підхід до оцінювання невизначеності вимірювань.

Ключові слова: *систематичні погрішності, випадкові погрішності, невизначеність вимірювань, Байєсівський підхід.*

ONCE AGAIN ABOUT THE METHODS OF "ADDING UP" OF SYSTEMATIC AND RANDOM ERRORS OF MEASUREMENTS

A.G. Chunovkina

Merits and demerits GUM and ways of its perfection are considered, comparison of approaches of an error and uncertainty is carried out, Bayesian approach to measurements uncertainty evaluation is stated.

Keywords: *systematic errors, random errors, uncertainty of measurements, Bayesian approach.*