УДК 681.324

П.Е. Пустовойтов

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

ЭРЛАНГОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ САМОПОДОБНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОТОКА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

В работе предлагается процедура формирования самоподобного потока на основе закона распределения Эрланга. Проведено исследование качества формирования самоподобного потока, доказывающее правильность работы процедуры.

Ключевые слова: *компьютерные сети, математическое моделирование, имитационное моделирование, оптимизация, самоподобие, фракталы.*

Введение

Специфические особенности трафика с медленно затухающим распределением длин пакетов и интервалов между ними негативно сказывается на качестве функционирования узла компьютерной сети [1]. Высокая дисперсия такого распределения приводит к крайней изменчивости и непостоянству нагрузки. Кроме того, как отмечено в [2], суперпозиция самоподобных потоков не приводит к пуассоновости результирующего потока, что является прямым следствием наличия последействия в составляющих суммарного потока. Это, в частности, приводит к тому, что традиционно используемые соотношения теории массового обслуживания, полученные на основе допущения об экспоненциальности входящего потока, оказываются неверными для самоподобных потоков. Это обстоятельство вызывает необходимость использования для оценки эффективности систем, на вход которых поступает самоподобный поток, имитационных моделей. В связи с этим рассмотрим процедуру формирования самоподобного потока на основе распределения Эрланга n-го порядка и оценим качество формирования самоподобного потока.

Постановка задачи. При рассмотрении самоподобных процессов с формальных позиций вводится параметр Херста – $H \in (0.5 < H < 1)$ [3]. С учетом этого параметра случайный процесс X(t) называется статистически самоподобным с параметром H, если для любого вещественного $a > 0$ процесс $a^{-H}X(at)$ обладает теми же статистическими характеристиками, что и процесс X(t), т.е. имеют место равенства средних, дисперсий, автокорреляционных функций.

Характерной чертой самоподобного процесса является долгосрочная зависимость процесса, наблюдаемого на каком-либо интервале, от значений этого процесса на предыдущих интервалах. Эта зависимость проявляется в более медленном убывании значений автокорреляционной функции такого процесса по сравнению с процессами, для которых имеет место краткосрочная зависимость.

Нормированная автокорреляционная функция для самоподобного процесса описывается выражением

$$r_x(\tau) = (1+\tau)^{-\beta/2}, \qquad (1)$$

где показатель степени β связан с параметром Херста H следующим соотношением:

$$\beta = 2(1-H). \qquad (2)$$

Тогда $$r(\tau) = (1+\tau)^{-(1-H)}. \qquad (3)$$

Для несамоподобного процесса $H = 0.5$ и $\beta = 1$. При наличии самоподобия параметр $H > 0.5$.

Плотность распределения длины интервала между событиями для потока Эрланга n-порядка имеет вид

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0. \qquad (4)$$

Наличие степенного сомножителя в описании плотности (4) приводит к замедлению ее убывания и появлению типичного для самоподобных процессов «тяжелого» хвоста.

В [4] отмечается, что наличие тяжелого хвоста является основной причиной долгосрочной зависимости и самоподобия сетевого трафика. Так как эрланговский поток представляет собой просеянный пуассоновский поток, то для получения потока Эрланга, например, 2-го порядка интенсивностью λ достаточно сформировать пуассоновский поток интенсивностью 2λ и извлечь из этого потока каждое четное событие.

Перейдем к описанию второго принципиального свойства самоподобного потока – последействия. В соответствии с (1) для заданного значения параметра Херста H могут быть рассчитаны коэффициенты корреляции между случайными длинами межсобытийных интервалов. Тогда задача формирования потока с заданным показателем самоподобия H заключается в следующем: получить последовательность случайных величин с плотностью распределения Эрланга заданного порядка, коррелированных в соответствии с корреляционной матрицей $K = \{k_{ij}\}$, элементы которой определяются корреляционной функцией (1).

Основные результаты

Пусть последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ имеет плотность распределения Эрланга заданного (например, второго) порядка. Теперь искомую последовательность $x_1, x_2, ..., x_n$ случайных величин с тем же математическим ожиданием (например, равным a), но коррелированных в соответствии с матрицей $\{k_{ij}\}$ получим с использованием линейного преобразования

$$
\begin{aligned}
&x_1 = c_{11}(\xi_1 - a) + a,\\
&x_2 = c_{12}(\xi_1 - a) + c_{22}(\xi_2 - a) + a,\\
&x_3 = c_{13}(\xi_1 - a) + c_{23}(\xi_2 - a) + c_{33}(\xi_3 - a) + a, \qquad (5)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_n = c_{1n}(\xi_1 - a) + c_{2n}(\xi_2 - a) + ... + c_{nn}(\xi_n - a) + a.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты преобразования (5) отыскиваются по формуле [5]:

$$
c_{ij} = \frac{\left(\frac{k_{ij}}{a^2} - c_{1i}c_{1j} - c_{2i}c_{2j} - ... - c_{i-1,i}\,c_{i-1,j}\right)}{c_{ii}}, \quad j > i .
$$

Подстановка полученных значений c_{ij}, $i = 1, 2, ..., n$, $j \ge i$, в (5) позволяет рассчитать искомый набор коррелированных случайных величин.

Более простая схема получения коррелированной последовательности случайных величин соответствует ситуации, когда учитывается только корреляция между соседними элементами последовательности [5].

Пусть по-прежнему, в качестве базовой используется некоррелированная последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, имеющая плотность распределения Эрланга заданного порядка. Эта последовательность формируется путем просеивания последовательности случайных величин с пуассоновским распределением.

Пусть

$$
M\left[\xi_j\right] = a, \quad M\left[(\xi_j - a)^2\right] = D .
$$

Зададим требуемое значение коэффициента корреляции k между соседними элементами формируемой последовательности. Искомую коррелированную последовательность получим по формулам

$$
\begin{aligned}
&\zeta_1 = \xi_1,\\
&\zeta_2 = c_{12}(\xi_1 - a) + c_{22}(\xi_2 - a) + a,\\
&\zeta_3 = c_{23}(\xi_2 - a) + c_{33}(\xi_3 - a) + a,\\
&\dots\dots\dots\dots \qquad (6)\\
&\zeta_j = c_{j-1,j}(\xi_{j-1} - a) + c_{jj}(\xi_j - a) + a,\\
&\zeta_{j+1} = c_{j,j+1}(\xi_j - a) + c_{j+1j+1}(\xi_{j+1} - a) + a.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты преобразования имеют следующий вид [5]:

$$
\begin{aligned}
&C_{12} = k, \qquad C_{22} = (1 - C_{12}^2)^{1/2},\\
&C_{23} = \frac{k}{C_{22}}, \quad C_{33} = (1 - C_{23}^2)^{1/2}, \qquad (7)\\
&-----------------\\
&C_{j,j+1} = \frac{k}{C_{jj}}, \quad C_{j+1,j+1} = (1 - C_{j,j+1}^2)^{1/2}.\\
&-----------------
\end{aligned}
$$

С использованием этих соотношений построим последовательность случайных величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$.

Проверка качества получаемой коррелированной последовательности случайных величин осуществляется следующим образом. Пусть задан набор элементов последовательности $x_1, x_2, ..., x_n$. Рассчитаем эмпирические значения для среднего и дисперсии: $m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m)^2$. Кроме того, для каждого j определяем интегральное отклонение

$$
D_j = \sum_{k=1}^{j} x_k - jm .
$$

Теперь оценим уровень изменчивости заданной случайной последовательности длиной n как

$$
R_n = \max_j D_j - \min_j D_j .
$$

В [3] было показано, что для самоподобных процессов имеет место соотношение

$$
\frac{R_n}{S_n} \cong \left(\frac{n}{2}\right)^H , \qquad (8)
$$

где H – параметр самоподобия.

Из (8) следует

$$
\log\frac{R_n}{S_n} \cong H \log\left(\frac{n}{2}\right). \qquad (9)
$$

Соотношение (9) позволяет приближенно оценить значение параметра Херста для любой последовательности случайных величин. С целью использования (9) для возрастающей последовательности $n_1, ..., n_p$ наборов случайных величин рассчитаем соответствующие значения $\frac{R_{n_1}}{S_{n_1}}, ..., \frac{R_{n_p}}{S_{n_p}}$. Тогда наилучшая в смысле наименьших квадратов оценка параметра H определяется путем минимизации

$$
J = \sum_{\ell=1}^{P}\left(\log\frac{R_{n_\ell}}{S_{n_\ell}} - H\log\frac{n_\ell}{2}\right)^2 ,
$$

откуда $\frac{dJ}{dH} = -2\sum_{\ell=1}^{P}\left(\log\frac{R_{n_\ell}}{S_{n_\ell}} - H\log\frac{n_\ell}{2}\right) = 0$

и

$$
\hat{H} = \frac{\sum_{\ell=1}^{P}\log\frac{R_{n_\ell}}{S_{n_\ell}}}{\sum_{\ell}^{P}\log\frac{n_\ell}{2}} = \frac{\log\prod_{\ell=1}^{P}\frac{R_{n_\ell}}{S_{n_\ell}}}{\log\prod_{\ell=1}^{P}\frac{n_\ell}{2}} . \qquad (10)
$$

В конкретном эксперименте формировались последовательности коррелированных случайных величин с заданными значениями $H_1 = 0.65$, $H_2 = 0.8$. При этом вначале путем просеивания пуассоновского потока с заданной интенсивностью формировался набор случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, распределенных в соответствии с законом Эрланга второго порядка. Далее с использованием (6), (7) осуществляется построение самоподобных потоков с коэффициентом корреляции, которые рассчитывались по формуле (3). Результаты эксперимента: $\hat{H}_1 = 0.62$, $\hat{H}_2 = 0.77$.

Более точные значения параметра Херста можно получить, если построить график зависимости $\log\ R_{n_\ell} / S_{n_\ell}$ от $\log\ n_\ell / 2$, аппроксимировать его прямой и оценить тангенс угла ее наклона.

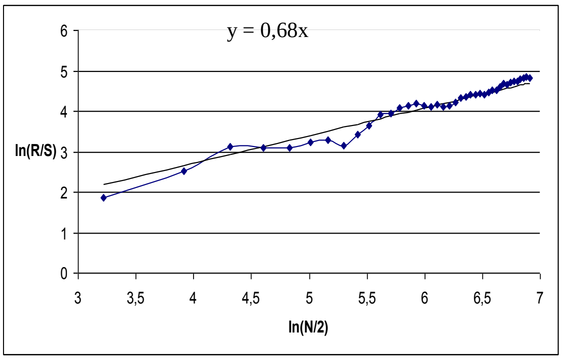
Результаты эксперимента приведены на графиках (рис. 1).

Очевидно, что полученные в эксперименте значения тангенса угла наклона прямой, аппроксимирующей зависимость $\ln\ R_{ne} / S_{ne}$ от $\ln\ N_e / 2$, близки к исходным значениям. Таким образом, работоспособность предложенной процедуры формирования самоподобной последовательности с заданным параметра Херста подтверждена.

Выводы

При построении имитационных моделей компьютерных сетей необходимо учитывать свойство самоподобия в реальном сетевом трафике. При выборе закона распределения для описания потоков пакетов в сети необходимо учитывать факт, что он должен обладать длинным медленно затухающим хвостом. В работе предлагается процедура генерации самоподобного потока с заданным значением параметра H на основе закона распределения Эрланга n-го порядка.

Приведены примеры генерации, построены графики, доказывающие правильность работы процедуры.



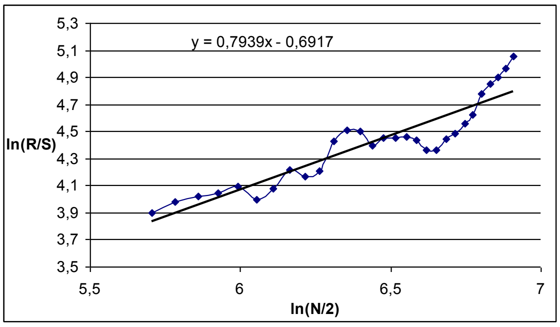


Рис. 1. Результаты эксперимента

Список литературы

1. *Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.*
2. *Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Е.С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 1999. – 576 с.*
3. *Hurst H. Long-term Storage. An Experimental Study / H. Hurst, R. Black, Y. Simaika. – London: Coustable, 1965. – 184 p.*
4. *Шелухин О.И. Фрактальные процессы в телекоммуникациях: монография / О.И. Шелухин, А.М. Тенякшев, А.В. Осин; под ред. О.И. Шелухина. – М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.*
5. *Пустовойтов П.Е. Формирование самоподобного случайного процесса с заданными свойствами / П.Е. Пустовойтов, Н.И. Ящук // Системи обробки інформації. – Х.: Харківський університет Повітряних Сил, 2009. – Вип. 3(77). – С. 81-85.*

Поступила в редколлегию 15.06.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков.

ЕРЛАНГІВСЬКА АПРОКСИМАЦІЯ САМОПОДІБНОГО ВИПАДКОВОГО ПОТОКУ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

П.Є. Пустовойтов

У роботі запропоновано процедуру формування самоподібного потоку на основі закону розподілу Ерлангу. Проведено дослідження якості формування самоподібного потоку, що доказує вірність роботи процедури.

Ключові слова: *комп'ютерні мережі, математичне моделювання, імітаційне моделювання, оптимізація, самоподобие, фрактали.*

ERLANG APPROXIMATION OF SELF-SIMILARITY FLOWING FORMATION WITH ASSIGNED PROPERTIES

P.E. Pustovoitov

It was suggested the procedure of self-similarity flowing formation based on Erlang distribution law. It was researched a quality of self-similarity flowing formation, which proves a procedure accuracy.

Keywords: *computer networks, mathematical design, imitation design, optimization, self-similarity, fractals.*