УДК 519.22:519.24

С.В. Гадецкая, В.Ю. Дубницкий

Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, АРГУМЕНТЫ КОТОРЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ: ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Для дискретных случайных величин, распределенных по законам гиперболического синуса и гиперболического косинуса, получены оценки математического ожидания, дисперсии, вероятности удвоения среднего.

Ключевые слова: *распределение гиперболического синуса, распределение гиперболического косинуса, распределение shx, распределение chx, характеристические функции.*

Введение

В некоторых задачах физики, теории надежности, оценки экономического риска возникает необходимость в использовании распределений, аргументы которых есть гиперболические функции. К таким распределениям относят распределения гиперболического синуса, гиперболического косинуса, логистическое распределение (распределение гиперболического тангенса), распределение гиперболического секанса [1 – 4].

Эти распределения не так хорошо изучены как традиционные распределения, поэтому и возникла задача изучения свойств этих распределений, получения оценок их параметров и числовых характеристик (первых начальных и центральных моментов).

Постановка задачи. Для дискретных распределений гиперболического синуса (гиперболического синуса) и гиперболического косинуса (распределение chx) необходимо определить математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение, вероятность превышения возможного значения случайной величины X своего удвоенного среднего значения. Последнее весьма важно при моделировании задач, связанных с экономической оценкой последствий разного рода аварий [5].

Анализ литературы. В работе [4] приведен вид функций распределения shx и chx, их характеристические функции, а остальные сведения отсутствуют.

Изложение результатов

Распределение гиперболического синуса (распределение shx) в работе [4] определено в следующем виде:

$$P_r(X=k)=\frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!\,\mathrm{sh}\beta},\quad k=0,1,2,... \tag{1}$$

где $\beta>0$ – параметр распределения.

Характеристическая функция распределения shx, приведеннная в работе [4], имеет вид:

$$\varphi(t)=\frac{\mathrm{sh}(\beta e^{it})}{\mathrm{sh}\beta}. \tag{2}$$

Связь между начальными моментами порядка k и k-й производной характеристической функции $\varphi(t)$ имеет, согласно [4], вид:

$$\frac{d^k\varphi(0)}{dt^k}=i^k m_k. \tag{3}$$

Следовательно, математическое ожидание m_x можно определить так:

$$m_x=\frac{1}{i}\cdot\frac{d\varphi(0)}{dt}, \tag{4}$$

второй начальный момент

$$m_2=-\frac{d^2\varphi(0)}{dt}. \tag{5}$$

Определим величину m_x для распределения shx. Из условия

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=\frac{i\beta\left[\exp(-\beta e^{it}+it+\beta)\right]\cdot\left[\exp(2\beta e^{it})+1\right]}{e^{2\beta}-1}. \tag{6}$$

при t=0 получим, что

$$\frac{d\varphi(0)}{dt}=\frac{i\beta(e^{2\beta}+1)}{e^{2\beta}-1}, \tag{7}$$

следовательно, для распределения shx:

$$m_x=\frac{\beta(e^{2\beta}+1)}{e^{2\beta}-1}. \tag{8}$$

Второй начальный момент m_2 определим, выполнив следующие действия:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}=\frac{AB}{e^{2\beta}-1}$$

где:

$$A=i^2\beta\exp(-\beta e^{it}+it+\beta);$$

$$B=\exp(2\beta e^{it})\cdot(\beta e^{it}+1)-\beta e^{it}+1.$$

При условии t=0:

$$\frac{d^2\varphi(0)}{dt^2}=\frac{i^2\beta\left[e^{2\beta}(\beta+1)-\beta+1\right]}{e^{2\beta}-1}. \tag{9}$$

Следовательно, используя условие (3), получим, что

$$m_2 = \frac{\beta\left[e^{2\beta}(\beta+1)-\beta+1\right]}{e^{2\beta}-1}. \qquad (10)$$

Так, как дисперсия случайной величины X

$$\sigma_x^2 = m_2 - (m_x)^2, \qquad (11)$$

то получим, что дисперсия случайной величины X, распределенной по закону shx, будет:

$$\sigma_x^2 = \frac{\beta(e^{4\beta}-4\beta e^{2\beta}-1)}{(e^{\beta}+1)^2(e^{\beta}-1)^2}. \qquad (12)$$

Соответственно, среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{\beta(e^{4\beta}-4\beta e^{2\beta}-1)}}{e^{\beta}-1}, \qquad (13)$$

коэффициент вариации

$$V = \frac{\sigma}{m_x} = \frac{\sqrt{\beta(e^{4\beta}-4\beta e^{2\beta}-1)}}{\beta(e^{\beta}+1)}. \qquad (14)$$

Параметр β можно определить методом моментов из условия (8). При решении численными методами уравнения (8) относительно β в качестве начального приближения β_0 можно принять, что $\beta_0 = \bar{x}$, где $\bar{x}$ – среднее значение, определенное по выборке $x_1, x_2, \ldots x_k$ случайных величин, распределение которых соответствует распределению shx.

Далее рассмотрим решение важной в актуарной математике задачи – задачи об оценке вероятности превышения возможного значения случайной величины X своего удвоенного среднего значения.

Примем в условии (1), что $k = 2m_x$. Тогда

$$\Pr(X = 2m_x) = \frac{\beta^{4m_x+1}}{(2m_x+1)!\,\mathrm{sh}\beta}. \qquad (15)$$

Пусть m_x – величина целая. Тогда

$$\frac{\Pr(X = 2m_x)}{\Pr(X = m_x)} = \frac{\beta^{2m_x}(2m_x+1)!}{(4m_x+1)!} \qquad (16)$$

или

$$\frac{\Pr(X = 2m_x)}{\Pr(X = m_x)} = \frac{\beta^{2m_x}}{(2m_x+1)(2m_x+2)\ldots 4m_x(4m_x+1)!}. \qquad (17)$$

Отсюда следует, что это отношение малая величина. Таким образом, при выполнении расчетов, связанных с оценкой риска, вероятность $\Pr(X = 2m_x)$ можно считать верхней допустимой границей вероятности поступления события, влекущего нежелательные последствия.

Рассмотрим случай, когда m_x произвольное действительное число $m_x > 0$.

В этом случае необходимо вычислять величины $(2m_x+1)!$ и $(4m_x+1)!$, не имеющие смысла при нецелочисленных значениях.

Представим число A в виде

$$A = [A] + \{A\}, \qquad (18)$$

где $[A]$ – целая часть числа A, $\{A\}$ – его дробная часть. В соответствии с теорией гамма-функции [6] получим, что:

$$\Gamma(A) = (A-1)(A-2)\ldots(A-n)\Gamma(\alpha-n),\ 0 < \alpha - n < 1. \qquad (19)$$

С учетом (18) и (19) получим, что

$$\Gamma(A) = \Gamma\{A\}\prod_{k=1}^{[A]} [A]-k+\{A\}. \qquad (20)$$

Тогда получим, что

$$[A]-1\,! < \Gamma(A) < [A]+2\,!. \qquad (21)$$

Или, с учетом того, что

$$n! = \Gamma(n+1)$$

преобразуем (21) к виду

$$\Gamma\ [A]\ < \Gamma(A) < \Gamma\ [A]+2\ . \qquad (22)$$

Сохраняя условие целочисленности и работая «себе в запас», запишем, что

$$\Pr(X = 2m_x) \approx \frac{\beta^{4m_x+1}}{\Gamma([4m_x])}.$$

Более точная оценка будет

$$\Pr(X = 2m_x) \approx \frac{\beta^{4m_x+1}}{\mathrm{sh}\beta\,\Gamma(4m_x+1)}. \qquad (23)$$

Распределение гиперболического косинуса (распределение chx) в работе [4] представлено в виде:

$$\Pr(X = k) = \frac{\beta^{2k}}{2k!\,\mathrm{ch}\beta};\quad k = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (24)$$

Характеристическая функция этого распределения

$$\varphi(t) = \mathrm{ch}(\beta e^{it})/\mathrm{ch}\beta. \qquad (25)$$

Используя описанные выше методы получения числовых характеристик случайных величин найдем, что:

$$\frac{d\varphi(0)}{dt} = \frac{i\beta(e^{2\beta}-1)}{e^{2\beta}+1}. \qquad (26)$$

Следовательно, математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по закону chx, имеет вид:

$$m_x = \beta(e^{2\beta}-1)/\ e^{2\beta}+1\ . \qquad (27)$$

Для определения дисперсии случайной величины, распределенной по закону chx, вначале определим величину

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = i^2\beta\exp(-\beta e^{it}+it+b)\times$$
$$\times\left[\exp(2\beta e^{it})(\beta e^{it}+1)-\beta e^{it}+1\right]/\ e^{2\beta}+1\ . \qquad (28)$$

Откуда

$$m_2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2\varphi(0)}{dt^2} = \frac{\beta\left[e^{2\beta}(\beta+1)+\beta-1\right]}{e^{2\beta}+1}. \qquad (29)$$

Следовательно, дисперсия

$$\sigma_x^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{\beta(e^{4\beta}+4\beta e^{2\beta}-1)}{(e^{2\beta}+1)^2}; \qquad (30)$$

среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{(e^{4\beta} + 4\beta e^{2\beta} - 1)}}{e^{2\beta} + 1}; \qquad (31)$$

коэффициент вариации

$$V = \frac{\sigma_x}{m_x} = \frac{\sqrt{\beta(e^{4\beta} + 4\beta e^{2\beta} - 1)}}{\beta(e^{2\beta} - 1)}. \qquad (32)$$

Учитывая полученные ранее оценки вероятности удвоения среднего, получим, что

$$\Pr(X = 2m_x) \approx \frac{\beta^{4m_x}}{\Gamma(4m_x)\mathrm{ch}\beta}. \qquad (33)$$

Для удобства пользования сведем полученные результаты в таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Основные числовые характеристики дискретной случайной величины, распределенной по законам гиперболического синуса и гиперболического косинуса

Числовые характеристики	Закон распределения	
	гиперболического синуса	гиперболического косинуса
функция распределения	$P_r(X = k) = \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!\mathrm{sh}\beta}, k = 0,1,2,...$	$P_r(X = k) = \frac{\beta^{2k}}{2k!\mathrm{ch}\beta}; \; k = 0,1,2,...$
математическое ожидание	$\frac{\beta(e^{2\beta} + 1)}{e^{2\beta} - 1}$	$\frac{\beta(e^{2\beta} - 1)}{e^{2\beta} + 1}$
дисперсия	$\frac{\beta(e^{4\beta} - 4\beta e^{2\beta} - 1)}{(e^{\beta} + 1)^2 (e^{\beta} - 1)^2}$	$\frac{\beta(e^{4\beta} + 4\beta e^{2\beta} - 1)}{(e^{2\beta} + 1)^2}$
вероятность удвоения среднего	$\frac{\beta^{4m_x + 1}}{\Gamma(4m_x + 1)\mathrm{sh}\beta}$	$\frac{\beta^{4m_x}}{\Gamma(4m_x)\mathrm{ch}\beta}$

Выводы

1. Для дискретной случайной величины X, распределенной по закону гиперболического синуса и закону гиперболического косинуса, получены выражения для определения математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения, коэффициента вариации.

2. Для указанных распределений определена вероятность превышения возможного значения случайной величины X своего удвоенного среднего значения.

3. Описан способ получения оценок параметров распределений методом моментов.

Список литературы

1. Токмачев М.С. Прикладной аспект обобщенного распределения гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 2005. – № 34. – С. 96-100.

2. Лебедев С.А. Статистические оценки финансовых рисков на основе универсальных семейств распределений: дис. ... канд. эконом. наук / Лебедев Сергей Александрович. – М., 2006. – 177 с.

3. Further development of reliability analysis annlication to structural fatique evaluation. Boeing Commercial airplane company. – Techn. Rep. AFML-TR-75-191, January 1976. – 102 p.

4. Переверзев Е.С. Случайные сигналы в задачах оценки состояния технических систем / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев, Г.П. Филей. – К.: Наук. думка, 1992. – 252 с.

5. Дубницкий В.Ю. Оценка вероятности превышения случайной величиной своего удвоенного среднего значения / В.Ю. Дубницкий, Н.С. Пилипенко // Обработка информации. – Х.: ХВУ, 1997. – С. 16-21.

6. Янке Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1964. – 344 с.

Поступила в редколлегию 2.09.2010

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский государственный университет строительства и архитектуры, Харьков.

ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, АРГУМЕНТИ ЯКИХ ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ: ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

С.В. Гадецька, В.Ю. Дубницький

Для дискретних випадкових величин, розподілених по законах гіперболічного синуса і гіперболічного косинуса, отримані оцінки математичного сподівання, дисперсії, ймовірності подвоєння середнього.

Ключові слова: *розподіл гіперболічного синуса, розподіл гіперболічного косинуса, розподіл shx, розподіл chx, характеристичні функції.*

DETERMINATION OF NUMERICAL CHARACTERISTICS OF RANDOM NUMBERS DISTRIBUTION FUNCTIONS HAVING AS ARGUMENT HYPERBOLIC FUNCTIONS: DISCRETE RANDOM VALUES

S.V.Gadetska, V.Yu.Dubnitsky

For discrete random varues distributed after hyperbolic sinus law and hyperbolic cosine law estimates were obtained of mathematical expectation, dispersion, probable doubling of mean value.

Keywords: *hyperbolic sinus distribution, hyperbolic cosine distribution, shx distribution, chx distribution, characteristic function.*