

УДК 681.3.042

В.Г. Бабенко<sup>1</sup>, С.Ю. Кучеренко<sup>1</sup>, В.М. Зажома<sup>2</sup><sup>1</sup> Черкасский государственный технологический университет, Черкассы<sup>2</sup> Черкасская академия пожарной безопасности им. Героев Чернобыля, Черкассы

## СИНТЕЗ ПРАВИЛ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

*Работа посвящена разработке технологии синтеза правил выполнения операций сложения на основе моделей позиционных систем счисления для обеспечения автоматизации процесса выбора моделей систем счисления с оптимальной информационной избыточностью, которые обеспечат минимальную аппаратную сложность при схемотехнической реализации арифметических устройств на их основе.*

**Ключевые слова:** модель, синтез, весовые коэффициенты, операция сложения.

### Введение

**Постановка проблемы.** Широкое внедрение электроники и автоматики во все сферы человеческой деятельности, наблюдаемое в настоящее время, предъявляет все более жесткие требования к изделиям вычислительной техники. Характерными требованиями, которым должна соответствовать современная вычислительная аппаратура, можно назвать повышение быстродействия и обеспечение надежности.

Одним из путей решения данной проблемы является реализация на аппаратном уровне, что влечет за собой повышение аппаратной сложности устройств. А учитывая тот факт, что одним из основных устройств электронной цифровой вычислительной машины является арифметическое устройство, то основной задачей считается разработка таких схем арифметическим устройств, которые будут иметь улучшенные характеристики быстродействия и надежности и при этом иметь минимальную аппаратную сложность. Арифметические устройства строятся в зависимости от способа кодирования чисел, используемой системы счисления, с различным количеством разрядов, с числами, представленными с фиксированной или с плавающей запятой, или с теми и с другими.

Для повышения быстродействия арифметических устройств применяют методы ускорения выполнения операций.

Особенно эффективно ускорение элементарной операции суммирования, поскольку она входит существенной частью в алгебраическое сложение-вычитание, умножение, деление и др.

В последовательных АУ ускорение суммирования достигается переходом к последовательно-параллельным схемам; в параллельных – применением схем, использующих статистический характер переносов, схем «с мгновенным переносом» и т.д. Наиболее разработаны методы ускорения умножения. В последовательных устройствах они основаны большей частью на введении дополнительных сумматоров, позволяющих одновременно суммировать несколько частичных произведений; в пределе наличие  $n$  сумматоров последовательного типа (или  $n/2$  сумматоров и логических схем) даёт возможность выполнить умножение за  $2n$  тактов. В параллельных арифметических устройствах применяются методы ускорения умножения логические и аппаратные 1-го и 2-го порядка.

Основные тенденции в развитии арифметических устройств – использование схем, которые построены с большим количеством повторяющихся элементов и систематическими связями между ними.

На наш взгляд, одним из перспективных направлений является разработка новых способов кодирования чисел, упрощающих выполнение операций, новые методы ускорения операций, аппаратного контроля и исправления ошибок.

При этом ставятся задачи повышения быстродействия, уменьшения габаритов, стоимости, потребляемой мощности, увеличения надёжности.

**Анализ исследований и публикаций.** В известных нам источниках отсутствуют результаты о системных исследованиях избыточных систем счисления с целью выявления новых, более простых алгоритмов выполнения арифметических операций.

Такие результаты необходимы для целенаправленного проведения исследований по двум направлениям:

- уменьшение аппаратной сложности арифметических устройств вычислительной техники для их реализации на аппаратном уровне за счет использования систем счисления с наиболее простыми правилами выполнения арифметических операций, а именно операции сложения [1 – 3];

- повышение быстродействия арифметических устройств на основе синтезированных систем счисления с информационной избыточностью [4, 5].

Так как избыточных систем счисления очень большое количество, то полное исследование невозможно без применения ЭВМ.

**Цель статьи.** Цель работы состоит в синтезе правил выполнения операций сложения на основе моделей позиционных систем счисления с оптимальной информационной избыточностью для обеспечения автоматизации дальнейших исследований.

### Основной материал

Под моделью позиционной системы счисления будем понимать минимальный набор кодовых комбинаций, который позволяет:

- для избыточных позиционных систем счисления определить ограничения на синтез системы счисления;
- определить весовые коэффициенты разрядов, для представления любого натурального числа;
- определить правила выполнения арифметических операций;
- синтезировать правила формирования внутригрупповых и междугрупповых сигналов переноса;
- на основе ограничений на синтез позиционной системы счисления определить правила контроля ошибок при передаче, хранении и обработке информации.

Наиболее просто модель позиционной системы счисления можно представить в виде массива или таблицы, в которой отображаются коды цифр, значение кодированной цифры и весовые коэффициенты разрядов кодов цифр.

Полученные шесть способов кодирования, которые определены на основе методики синтеза весовых коэффициентов разрядов и перестановки разрядов, были сведены к четырем моделям позиционных систем счисления, представленным в табл. 1.

Таблица 1

Модели позиционных систем счисления

Цифры	Первая модель	Вторая модель	Третья модель	Четвертая модель
0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
1	0 0 1	0 0 1	0 0 1	0 0 1
2	0 1 1	0 1 1	0 1 0	0 1 0
3	1 0 0	1 0 0	0 1 1	0 1 1
4	1 0 1	1 0 1	1 1 0	1 0 0
5	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 0 1
Весов. коэфф.	3 2 1	3 1 1	2 2 1	4 2 1

Для проведения дальнейших исследований необходимо определить правила выполнения сложения. Исследуемые модели позиционных систем счисления описывают системы счисления, весовые коэффициенты которых определяются зависимостью

$$\begin{cases} b_{3n-3} = b_0 \cdot p^{n-1}; \\ b_{3n-2} = b_1 \cdot p^{n-1}; \\ b_{3n-1} = b_2 \cdot p^{n-1}. \end{cases} \quad (1)$$

Зависимость (1) является частным случаем зависимости (2) с ограничением на трехразрядную модель кода.

$$\begin{cases} b_{k \cdot n - k} = b_0 \cdot p^{n-1}; \\ b_{k \cdot n - k - 1} = b_1 \cdot p^{n-1}; \\ b_{k \cdot n - k - 2} = b_2 \cdot p^{n-1}; \\ \dots \\ b_{k \cdot n - 2} = b_{k-2} \cdot p^{n-1}; \\ b_{k \cdot n - 1} = b_{k-1} \cdot p^{n-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Для синтеза правил выполнения операций сложения на основе моделей позиционных систем счисления необходимо определить коэффициенты наличия слагаемых в правилах выполнения сложения:

$$\begin{cases} b_{3n-3} + 0 = b_{3n-3}; \\ b_{3n-3} + b_{3n-3} = a_{11} \cdot b_{3n} + a_{12} \cdot b_{3n-1} + \\ \quad + a_{13} \cdot b_{3n-2} + a_{14} \cdot b_{3n-3}; \\ b_{3n-2} + 0 = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + b_{3n-2} = a_{21} \cdot b_{3n} + a_{22} \cdot b_{3n-1} + \\ \quad + a_{23} \cdot b_{3n-2} + a_{24} \cdot b_{3n-3}; \\ b_{3n-1} + 0 = b_{3n-1}; \\ b_{3n-1} + b_{3n-1} = a_{31} \cdot b_{3n} + a_{32} \cdot b_{3n-1} + \\ \quad + a_{33} \cdot b_{3n-2} + a_{34} \cdot b_{3n-3}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $a_{ij} \in \{0, 1\}$ .

Коэффициенты  $a_{ij}$  определяются на основе решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot b_0 = a_{11} \cdot b_0 \cdot p + a_{12} \cdot b_2 + a_{13} \cdot b_1 + a_{14} \cdot b_0; \\ 2 \cdot b_1 = a_{21} \cdot b_0 \cdot p + a_{22} \cdot b_2 + a_{23} \cdot b_1 + a_{24} \cdot b_0; \\ 2 \cdot b_2 = a_{31} \cdot b_0 \cdot p + a_{32} \cdot b_2 + a_{33} \cdot b_1 + a_{34} \cdot b_0. \end{cases} \quad (4)$$

Так как система уравнений (4) может иметь несколько решений, то отбор правил будем проводить на основе их минимальной сложности.

Минимальная сложность набора правил выполнения операции сложения определяется как сумма коэффициентов наличия слагаемых следующим образом:

$$S_{cc} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \rightarrow \min, \quad (5)$$

где  $m$  – количество уравнений в системе (4);  $n$  – количество слагаемых в правой части системы уравнений.

Рассмотрим практический синтез правил выполнения операции сложения для исследуемых моделей позиционных систем счисления.

Для первой модели позиционной системы счисления при ограничении

$$b_{3n-2} \cdot b_{3n-3} \neq 0$$

и весовых коэффициентах, полученных на основе выражения (6), правила выполнения операции сложения при минимальном значении  $S_{cc}$  определяются как в (7):

$$\begin{cases} b_{3n-3} = 6^{n-1}; \\ b_{3n-2} = 2 \cdot 6^{n-1}; \\ b_{3n-1} = 3 \cdot 6^{n-1}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} b_{3n-3} + 0 = b_{3n-3}; \\ b_{3n-3} + b_{3n-3} = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + 0 = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + b_{3n-2} = b_{3n-1} + b_{3n-3}; \\ b_{3n-1} + 0 = b_{3n-1}; \\ b_{3n-1} + b_{3n-1} = b_{3n}. \end{cases} \quad (7)$$

Расширенная первая модель позиционной системы счисления при выполнении ограничения (8) синтезирует систему счисления, с весовыми коэффициентами разрядов, которые описываются выражением (9).

$$\bar{b}_{3n-1} \cdot b_{3n-2} \cdot b_{3n-3} \neq 1, \quad (8)$$

$$\begin{cases} b_{3n-3} = b_0 \cdot 7^{n-1}; \\ b_{3n-2} = b_1 \cdot 7^{n-1}; \\ b_{3n-1} = b_2 \cdot 7^{n-1} \end{cases} \quad (9)$$

Решив систему уравнений (4), и подставив результаты в (3), получим правила выполнения операции сложения:

$$\begin{cases} b_{3n-3} + 0 = b_{3n-3}; \\ b_{3n-3} + b_{3n-3} = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + 0 = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + b_{3n-2} = b_{3n-1} + b_{3n-3}; \\ b_{3n-1} + 0 = b_{3n-1}; \\ b_{3n-1} + b_{3n-1} = b_{3n}. \end{cases}$$

Полученное выражение полностью совпадает с выражением (7), что дает возможность предположить, что сложность правил выполнения операции сложения зависит только от весовых коэффициентов модели и не зависит от количества кодируемых моделью цифр.

Вторая модель позиционной системы счисления при ограничении

$$b_{3n-2} \cdot \bar{b}_{3n-3} \neq 1$$

и весовых коэффициентах, полученных на основе выражения (10), правила выполнения операции сложения при минимальном значении  $S_{cc}$  определяются как (11):

$$\begin{cases} b_{3n-3} = 6^{n-1}; \\ b_{3n-2} = 6^{n-1}; \\ b_{3n-1} = 3 \cdot 6^{n-1}. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} b_{3n-3} + 0 = b_{3n-3}; \\ b_{3n-3} + b_{3n-3} = b_{3n-3} + b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + 0 = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + b_{3n-2} = b_{3n-3} + b_{3n-2}; \\ b_{3n-1} + 0 = b_{3n-1}; \\ b_{3n-1} + b_{3n-1} = b_{3n}. \end{cases} \quad (11)$$

Используя тот же алгоритм синтеза системы счисления с весовыми коэффициентами разрядов согласно третьей модели позиционной системы счисления, получим правила выполнения операции сложения:

$$\begin{cases} b_{3n-3} + 0 = b_{3n-3}; \\ b_{3n-3} + b_{3n-3} = b_{3n-2} = b_{3n-1}; \\ b_{3n-2} + 0 = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + b_{3n-2} = b_{3n-2} + b_{3n-1}; \\ b_{3n-1} + 0 = b_{3n-1}; \\ b_{3n-1} + b_{3n-1} = b_{3n-2} + b_{3n-1}. \end{cases} \quad (12)$$

Результаты исследования четвертой модели позиционной системы счисления показали, что не зависимо от ограничений и рядов весовых коэффициентов правила выполнения операции сложения для всех трех способов кодирования информации определяются следующим образом:

$$\begin{cases} b_{3n-3} + 0 = b_{3n-3}; \\ b_{3n-3} + b_{3n-3} = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + 0 = b_{3n-2}; \\ b_{3n-2} + b_{3n-2} = b_{3n-1}; \\ b_{3n-1} + 0 = b_{3n-1}; \\ b_{3n-1} + b_{3n-1} = b_{3n}. \end{cases} \quad (13)$$

Приведенные правила дублируют друг друга, следовательно

$$\begin{cases} b_{n-1} + 0 = b_{n-1}; \\ b_{n-1} + b_{n-1} = b_n. \end{cases} \quad (14)$$

Проведенный анализ правил выполнения операции сложения и сложности реализации моделей систем счисления показал следующее:

- сложность правил выполнения операции сложения зависит только от весовых коэффициентов модели и не зависит от количества кодируемых моделью цифр;
- сложность правил выполнения операции не определяет сложность схематехнической реализации модели системы счисления;
- наименьшую сложность дискретной модели сумматора имеет третья модель позиционной системы, при этом правила выполнения операции сложения для данной системы счисления значительно ограничивают количество переносов за пределы группы разрядов.

### Выводы

В результате проведенных исследований получены:

- обобщенные зависимости расчета весовых коэффициентов для систем счисления на основе их моделей;
- методика синтеза правил выполнения арифметических операций на основе модели систем счисления.

Данные исследования позволяют проводить выбор тех моделей позиционных избыточных систем счисления, которые обеспечивают наиболее простые правила выполнения арифметических операций и минимальную аппаратную сложность при схемной реализации арифметических устройств.

### Список литературы

1. Кучеренко С.Ю. Синтез двійково-трійкової системи числення з оптимальною інформаційною надлишковістю / С.Ю. Кучеренко, В.М. Рудницький // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2009. – № 4. – С. 54-57.
2. Кучеренко С.Ю. Синтез активно-надлишкової двійково-шестіркової системи числення / С.Ю. Кучеренко, В.М. Рудницький // Системи управління, навігації та зв'язку. К.: ДП «Центральний науково-дослідний інститут навігації і управління», 2009. – №4(12). – С.175-178.
3. Пантелєєва Н.М. Порівняльний аналіз складності реалізації методу додавання на основі взаємної компенсації переносів / Н.М. Пантелєєва, В.М. Рудницький, С.В.Бесєдіна // Системи обробки інформації: збірник наукових праць. – X.: ХУ ПС, 2009. – №1(75). – С. 40-47.
4. Рудницький В.Н. Моделирование параметров структурно-блочных кодов и систем счисления минимальной формы по условию минимальной информационной избыточности / В.Н. Рудницький, Ю.Ф. Ерофеев, С.В. Бесєдіна // Вісник Черкаського ДТУ: Наукові праці. – Черкаси: ЧДТУ, 2006. – №3. – С. 28-31.
5. Рудницький В.М. Моделювання алгоритмів конвеєрного виконання операції додавання / В.М. Рудницький, Л.В. Коломієць, С.В. Бесєдіна // Вісник Інженерної академії України. – 2008. – № 3/4. – С. 138-141.

Поступила в редколлегию 8.12.2010

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. В.Н. Рудницький, Черкаський державний технологічний університет, Черкаси.

### СИНТЕЗ ПРАВИЛ ВИКОНАННЯ ОПЕРАЦІЙ СКЛАДАННЯ НА ОСНОВІ МОДЕЛЕЙ ПОЗИЦІЙНИХ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

В.Г. Бабенко, С.Ю. Кучеренко, В.М. Зажома

*Робота присвячена розробці технології синтезу правил виконання операцій додавання на основі моделей позиційних систем числення для забезпечення автоматизації процесу вибору моделей систем числення з оптимальною інформаційною надлишковістю, які забезпечать мінімальну апаратну складність при схематехнічній реалізації арифметичних пристроїв на їх основі.*

**Ключові слова:** модель, синтез, вагові коефіцієнти, операція додавання.

### SYNTHESIS OF RULES OF IMPLEMENTATION OF OPERATIONS OF ADDITION ON BASIS OF MODELS OF BASE NOTATIONS

V.G. Babenko, S.Yu. Kucherenko, V.M. Zazhoma

*This work is devoted to the development of synthesis technology of the rules of performing the addition operations, based on models of positional number systems for automating the process of choosing models of number systems with an optimum of information redundancy, which will provide the minimum hardware complexity in the schematic implementation of arithmetic units based on them.*

**Keywords:** model, synthesis, weighting coefficients, the addition operations.