

УДК 004.7+519.7

П.Е. Пустовойтов

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

## ОДНОКАНАЛЬНАЯ КОМПЬЮТЕРНАЯ СЕТЬ С НЕОДНОРОДНЫМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ ЗАЯВОК БЕЗ ПРИОРИТЕТОВ

*Рассмотрена математическая модель узла компьютерной сети как система массового обслуживания с неоднородным входным потоком заявок. Задача решена для случаев, когда на вход системы подается суперпозиция потоков с разными интенсивностями. Высокая размерность преодолевается методом фазового укрупнения состояний марковской цепи.*

**Ключевые слова:** компьютерные сети, управление ресурсами узлов компьютерной сети, математическое моделирование, оптимизация.

### Введение

Системы массового обслуживания (СМО) являются наиболее распространенным математическим аппаратом, примененным для анализа процессов в компьютерных сетях. В классических работах в области теории СМО [1 – 3] рассматриваются объекты предметной области как совокупность «очереди» и «каналов обслуживания» на вход которых поступают требования на обслуживание. В данных работах рассматриваются одно- и многозвенные, одно- и многоканальные СМО с нормальным равномерным и экспоненциальным потоком заявок.

Рассмотрим методику анализа КС, используя марковские модели их функционирования [4 – 6].

### Постановка задачи

Пусть на вход КС поступает суперпозиция двух пуассоновских потоков с интенсивностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Предположим, что интенсивности обслуживания заявок этих потоков равны соответственно  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Будем считать далее, что длины очередей для потоков заявок первого и второго типов ограничены значениями  $n_1$  и  $n_2$ .

Введем множество возможных состояний такой КС. Пусть  $E_{ik}$  – состояние КС, соответствующее ситуации, когда в системе находятся  $i$  заявок первого типа и  $k$  заявок второго типа. Граф состояний и переходов такой системы приведен на рис. 1.

### Основные результаты

Для решения задачи используем технологию фазового укрупнения состояний [7, 8]. Будем говорить, что множество состояний  $\{E_{i0}, E_{i1}, \dots, E_{in_2}\}$  принадлежит слою  $i$ . Введем укрупненное состояние  $E_{\tilde{A}i} = \{E_{i0}, E_{i1}, \dots, E_{in_2}\}$ . Тогда в терминах укрупненных состояний граф состояний переходов примет следующий вид (рис. 2).

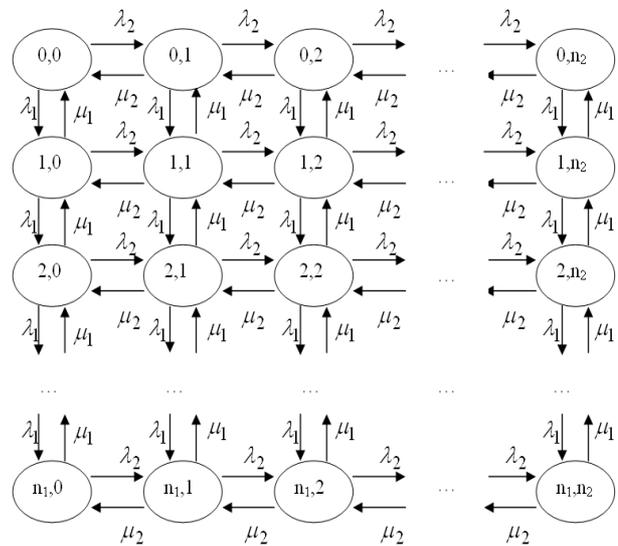


Рис. 1. Граф состояний и переходов системы

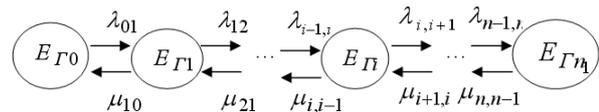


Рис. 2. Граф состояний и переходов укрупненной системы

Рассчитаем интенсивности переходов для графа укрупненных состояний. Интенсивность  $\lambda_{i,i+1}$  перехода из  $E_{\tilde{A}i}$  в  $E_{\tilde{A}i+1}$  равна

$$\lambda_{i,i+1} = \sum_{k=0}^{n_2} \lambda_1 \cdot \hat{P}_{ik} = \lambda_1 \sum_{k=0}^{n_2} \hat{P}_{ik}, \quad i = 0, 1, \dots, n_1 - 1,$$

где  $\hat{P}_{ik}$  – условная вероятность пребывания системы в  $k$ -м состоянии  $i$ -го слоя, при условии нахождения в этом слое.

Так как  $\sum_{k=0}^{n_2} \hat{P}_{ik} = 1$ , то  $\lambda_{i,i+1} = \lambda_1, \quad i = 0, \dots, n_1 - 1$ .

Точно так же найдем интенсивность перехода из состояния  $E_{\tilde{A}i+1}$  в  $E_{\tilde{A}i}$ . Имеем

$$\mu_{i+1,i} = \sum_{k=0}^{n_2} \mu_1 \cdot \hat{P}_{i+1,k} = \mu_1 \sum_{k=0}^{n_2} \hat{P}_{i+1,k} = \mu_1, \quad i = 0, 1, \dots, n_1 - 1.$$

Найдем теперь распределение вероятностей пребывания системы в каждом из слоев, соответствующих укрупненным состояниям. С учетом полученных соотношений для интенсивностей переходов граф состояний и переходов приобретает вид, представленный на рис.3.

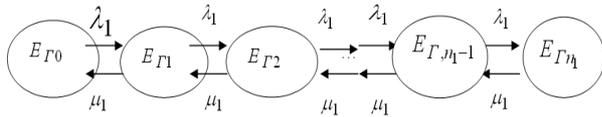


Рис. 3. Граф укрупненных состояний

Запишем соответствующую систему уравнений для вероятностей укрупненных состояний.

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 - \lambda_1 P_0 = 0, \\ \lambda_1 P_0 + \mu_1 P_2 - (\lambda_1 + \mu_1) P_1 = 0, \\ \dots \\ \lambda_1 P_{i-1} + \mu_1 P_{i+1} - (\lambda_1 + \mu_1) P_i = 0, \\ \dots \\ \lambda_1 P_{n_1-1} - \mu_1 P_{n_1} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Введем  $z_i = \lambda_1 P_{i-1} - \mu_1 P_i$  [9-10]. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ z_1 - z_2 = 0, \\ \dots \\ z_i - z_{i+1} = 0, \\ z_{n_1} = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $z_1 = z_2 = \dots = z_{n_1} = 0$ , т.е.

$$\lambda_1 P_{i-1} + \mu_1 P_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_1.$$

При этом  $P_i = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_1$ , тогда

$$P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_0, \quad P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^2 P_0, \quad \dots,$$

$$P_i = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i P_0, \quad \dots, \quad P_n = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^n P_0.$$

Значение  $P_0$  отыскивается из условия нормировки

$$\sum_{i=0}^n P_i = P_0 \sum_{i=0}^{n_1} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i = 1, \quad \text{т.е.} \quad P_0 = 1 / \sum_{i=0}^{n_1} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i,$$

тогда  $P_i = \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i / \sum_{i=0}^{n_1} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^i, \quad i = 1, 2, \dots, n_1.$

Введем  $\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1$ . При этом

$$P_i = \rho_1^i / \sum_{i=0}^{n_1} \rho_1^i, \quad i = 1, 2, \dots, n_1. \quad (2)$$

Так как  $\rho_1 < 1$ , то последовательность  $1, \rho_1, \rho_1^2, \dots, \rho_1^{n_1}$  образует убывающую геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1, и знаменателем  $\rho$ , т.е.  $\sum_{i=0}^{n_1} \rho_1^i = \frac{1 - \rho_1^{n_1+1}}{1 - \rho_1}$ . Тогда распределение вероятностей укрупненных состояний имеет вид

$$P_i = \frac{\rho_1^i (1 - \rho_1)}{1 - \rho_1^{n_1+1}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n_1. \quad (3)$$

Найдем теперь условные распределения вероятностей состояний системы для каждого из слоев. Эти распределения, очевидным образом, одинаковы, так как граф состояний и переходов для каждого из них имеет вид, показанный на рис. 4.

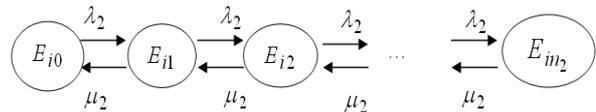


Рис. 4. Граф состояний и переходов в i-м слое

Технология анализа этого графа состояний совершенно аналогична описанной выше. Условные вероятности равны ( $\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2$ ):

$$P_{i,k} = \frac{\rho_2^k (1 - \rho_2)}{1 - \rho_2^{n_2+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n_2. \quad (4)$$

Тогда безусловная вероятность пребывания системы в i-м состоянии k-го слоя определяется как

$$P_{i,k} = P_{ik} \cdot P_i = \frac{\rho_1^i \cdot \rho_2^k (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)}{(1 - \rho_1^{n_1+1})(1 - \rho_2^{n_2+1})}, \quad (5)$$

$$i = 0, 1, \dots, n_1; \quad k = 0, 1, \dots, n_2.$$

Если длина очереди для заявок обоих типов не ограничена, то соотношение (5) упрощается к виду

$$P_{i,k} = \rho_1^i \cdot \rho_2^k (1 - \rho_1)(1 - \rho_2). \quad (6)$$

Рассчитаем средние значения  $\bar{n}_1, \bar{n}_2$  числа заявок первого и второго типа, стоящих в очереди.

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k} = \sum_{i=1}^{\infty} i \sum_{k=0}^{\infty} \rho_1^i \rho_2^k (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) = \\ &= (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \sum_{i=1}^{\infty} i \rho_1^i \sum_{k=0}^{\infty} \rho_2^k = \\ &= (1 - \rho_1) \sum_{i=1}^{\infty} i \rho_1^i = (1 - \rho_1) \rho_1 \sum_{i=1}^{\infty} i \rho_1^{i-1} = \\ &= (1 - \rho_1) \rho_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(\rho_1^i)}{d\rho_1} = (1 - \rho_1) \rho_1 \frac{d}{d\rho_1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \rho_1^i \right) = \\ &= (1 - \rho_1) \rho_1 \frac{d}{d\rho_1} \left( \frac{1}{1 - \rho_1} \right) = \frac{(1 - \rho_1) \rho_1}{(1 - \rho_1)^2} = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1}. \quad (7) \end{aligned}$$

Аналогично этому

$$\bar{n}_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k P_{i,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k \rho_1^i \rho_2^k (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) =$$

$$= (1 - \rho_2) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho_2^k = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}. \quad (8)$$

Теперь легко рассчитать среднюю продолжительность ожидания заявок в очереди до начала обслуживания. Пусть очередная заявка поступает в систему в момент, когда в очереди находятся  $i$  заявок первого типа и  $k$  заявок второго. При этом среднее время ожидания начала обслуживания для поступившей заявки равно

$$\bar{\tau}_{ik} = \frac{i}{\mu_1} + \frac{k}{\mu_2}.$$

Усредняя это соотношение по всем  $i$  и  $k$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{i}{\mu_1} + \frac{k}{\mu_2} \right) P_{i,k} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\mu_2} \sum_{i=0}^{\infty} P_{i,k} = \frac{\bar{n}_1}{\mu_1} + \frac{\bar{n}_2}{\mu_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Полученные соотношения легко обобщаются на случай, когда поток заявок представляет собой суперпозицию  $m$  потоков с интенсивностями поступления соответственно равными  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и интенсивностями обслуживания  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ . При этом среднее число заявок  $j$ -го типа, находящихся в очереди? равно

$$\bar{n}_j = \frac{\rho_j}{1 - \rho_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (10)$$

а средняя продолжительность ожидания начала обслуживания для заявки, поступившей в систему в произвольный момент времени, определяется как

$$\bar{\tau} = \sum_{j=1}^m \frac{\bar{n}_j}{\mu_j} = \sum_{j=1}^m \bar{n}_j \cdot \bar{\theta}_j, \quad (11)$$

где  $\bar{\theta}_j = 1/\mu_j$  – среднее время обслуживания заявок  $j$ -го типа.

### Выводы

Таким образом, получены аналитические расчеты вероятностей состояний марковской цепи для

случая, когда на вход системы поступают заявки двух типов с разными интенсивностями поступления и обслуживания. Высокая размерность задачи преодолевается методом фазовой декомпозиции. Полученные вероятности состояний позволяют рассчитать основные показатели системы массового обслуживания – среднюю длину очереди, среднюю продолжительность пребывания заявки в системе и т.п. Показано, что полученные результаты могут быть использованы и в случае, когда поток заявок представляет собой суперпозицию  $m$  потоков с различными интенсивностями.

### Список литературы

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение. 1979. – 325 с.
2. Клейнрок Л. Вычислительные сети с очередями: пер с англ. / Л. Клейнрок – М.: Мир. 1979. – 370 с.
3. Кофман А. Массовое обслуживание (теория и приложения) / А. Кофман, Р. Крюон – М.: Мир, 1965. – 302 с.
4. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А.Я. Хинчин – М.: Сов. Радио, 1963. – 284 с.
5. Вишневецкий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневецкий – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
6. Крылов В.В. Теория телетрафика и ее приложения / В.В. Крылов, С.С. Самохвалова – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288с
7. Пустовойтов П.Е.. Оценка эффективности многоходовых компьютерных сетей методами фазового укрупнения состояний / П.Е. Пустовойтов, Са’ди Ахмад Абдельхамид Саед Ахмад // Вестник НТУ «ХПИ». – № 19. – X., – 2005. – С.101-104.
8. Раскин Л.Г. Анализ марковских цепей с использованием фазового укрупнения состояний / Л.Г. Раскин // Информационные технологии: Наука, техника, образование, здоровье. НТУ «ХПИ». – X., 1977. – С. 280-284.
9. Раскин Л.Г. Оценка производительности компьютерных сетей как систем массового обслуживания / Л.Г. Раскин, Са’ди Ахмад Абдельхамид Саед Ахмад // Вестник НТУ «ХПИ». – №45. – X., 2004. – С.15-20.
10. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления / Р.Л. Стратонович – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 319 с.

Поступила в редколлегию 15.03.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л.Г. Раскин, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

### ОДНОКАНАЛЬНА КОМП’ЮТЕРНА МЕРЕЖА ІЗ НЕОДНОРІДНИМ ВХІДНИМ ПОТОКОМ ЗАЯВОК БЕЗ ПРІОРИТЕТІВ

П.Е. Пустовойтов

Розглянута математична модель вузла комп’ютерної мережі як система масового обслуговування із неоднорідним вхідним потоком заявок. Задача вирішена для випадків, коли на вхід системи подається суперпозиція потоків з різними інтенсивностями. Висока розмірність долається методом фазового укрупнення станів марківського ґену.

**Ключові слова:** комп’ютерні мережі, управління ресурсами вузлів комп’ютерної мережі, математичне моделювання, оптимізація.

### SINGLE-CHANNEL NETWORK WITH HETEROGENEOUS INPUT FLOW OF PACKAGES WITHOUT PRIORITY

P.E. Pustovoytov

It was described the mathematic model of network hub as a queuing system with heterogeneous input flow. The task was solved for the case of superposition of different rate flows. High definition of the task overcomes using the method of phase enlargement of markov chain states.

**Keywords:** computer networks, management, mathematical design, optimization, the resources of knots of computer network.