УДК 51

Ю.О. Іванов[1], І.І. Сидоренко[2]

[1] *Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків*
[2] *Академія внутрішніх військ МВС України, Харків*

ФОРМУЛИ ДЛЯ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНОГО РЯДА ТЕЙЛОРА

В роботі надана зручна для обчислень формула для базисних функцій узагальненого ряду Тейлора – Рвачова В.О., який є зображенням функцій неквазіаналітичного класу.

Ключові слова: *базисні функції, ряд Тейлора-Рвачова.*

Вступ

Постановка проблеми. Неквазіаналітичні класи нескінченно диференційованих функцій знаходять широке застосування в багатьох розділах математичного аналізу. Зокрема, вони виникають при дослідженні гіпоеліптичних рівнянь з частинними похідними, звичайних диференціальних рівнянь нескінченного порядку, функціонально-диференціальних рівнянь, а також у чисельних методах.

У зв'язку з цим актуальним є питання про можливість подання таких функцій у вигляді збіжних рядів, які виступали б аналогом рядів Тейлора для аналітичних функцій. У роботах В.О. Рвачова, продовжених пізніше його учнями І.І. Малицьким, Г.О. Старцем і В.М. Кузніченком, були запропоновані і досліджені узагальнені ряди Тейлора для класів нескінченно диференційованих функцій

$$H_\rho = \left\{ f(x) \in C^\infty[-1,1]:\ \left| f^{(n)}(x) \right| < C\rho^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}},\ n = 0,1,2,\dots \right\},$$

для $1 < \rho < 2$.

Аналіз останніх публікацій. Функції цього класу зображуються узагальненим рядом Тейлора-Рвачова В.О.[1]. Розклад функції за рядом має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t \in X_n} f^{(n)}(t)\phi_{n,t}(x),$$

де $X_0 = X_1 = \{0, \pm 1\}$, для $n = 1,2,\dots$:

$$X_{n+1} = \frac{X_n - 1}{2} \cup \frac{X_n + 1}{2};$$

$\phi_{n,t}(x)$ – базисні функції узагальненого ряда Тейлора, подібні до x^n в звичайному ряді Тейлора. Функції $\phi_{n,t}(x)$ визначаються умовами:

$$\phi_{n,t}(x) \in H_1,\ \phi_{n,t}(x) = \delta_{n,k}\delta_{t,x},\ k = 0,1,\dots,$$

$$n = 0,1,\dots,\ t \in X_n,\ x \in X_k$$

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a = b, \\ 0, & \text{якщо } a \neq b. \end{cases} \qquad (1)$$

В.О. Рвачов довів [1], що такий розклад є єдиним для функцій класу. Зауважимо, що функції неквазіаналітичних класів можуть бути відновленими за значеннями похідних тільки на всюди щільній множині точок. Тож множина $\bigcup_n X_n$ є всюди щільною на сегменті [–1, 1].

Базисні функції були побудовані на основі функції $up(x)$ –розв'язку з компактним носієм функціонально-диференціального рівняння [2]:

$$y'(x) = 2(y(2x+1) - y(2x-1)),$$

а саме є лінійною комбінацією зсувів функції $up(x)$. В.О. Рвачов надає рекурентну формулу для $\phi_{n,t}(x)$ [1].

Метою статті є виведення формули, що виражає базисні функції у вигляді лінійної комбінації n зсувів up(x) на двох інтервалах.

Виклад основного матеріалу

Для функцій $\phi_{n,0}(x)$ такі формули отримані [3]:

$$\phi_{n,0}(x) = 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} \Big(up\left(x - 1 + 2^{-n}\right) - J_0 up\left(x - 1 + 2^{-n+1}\right) - \dots - J_{n-1} up(x) \Big), \qquad (2)$$

де $J_n = up_{n+1} - J_0 up_n - \dots - J_{n-2} up_2 - J_{n-1} up_1$,

$J_i = \int_{-1}^{0} \phi_i(t)\,dt$, $up_i = up\left(-1 + \frac{1}{2^i}\right)$, $n = 1,2,\dots$,

Базисні функції мають очевидні властивості, що вибігають із означення:

1.

$$\phi_{n,t}(x) = (-1)^n \phi_{n,-t}(-x) \quad \forall\ n \in N,\ t \in X_n,\ x \in R. \qquad (3)$$

2. $\phi_{n,t}(x) = 0 \quad \forall\ n \in N,\ t \in X_n,\ tx < 0.$ (4)

З цих властивостей випливає, що достатньо отримати формули для t < 0 та x < 0.

3. $\phi_{n,t}(x) = (-1)^n \phi_{n,-1-t}(-1-x)$, (5)

4.

$$\phi_{n,(t-1)/2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}} \left[\int_{-1}^{x} \phi_{n-1,t}(2t+1)\,dt - up(x) \int_{-1}^{0} \phi_{n-1,t}(2t-1)\,dt \right], & x \le 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Використовуючи формулу (2) і властивості (3) – (6), можна отримати формули для інших базисних функцій. Наведемо деякі з них:

$$\phi_{n,-1}(x)=\mathrm{up}(x+1),\quad \phi_{n,1}(x)=\mathrm{up}(x-1). \qquad (7)$$

$$\phi_{n,-\frac{1}{2}}(x)=2^{-\frac{n(n+1)}{2}}\times$$
$$\times\left(\mathrm{up}\left(x-\frac{1}{2}+2^{-n}\right)-J_0\mathrm{up}\left(x-\frac{1}{2}+2^{-n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.-\left(J_{n-2}+J_{n-1,0}\right)\mathrm{up}(x)\right)\text{ для } x\le-\frac{1}{2} \qquad (8)$$

$$\phi_{n,-\frac{1}{2}}(x)=2^{-\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^n\times$$
$$\times\left(\mathrm{up}\left(x+\frac{3}{2}-2^{-n}\right)-J_0\mathrm{up}\left(x+\frac{3}{2}-2^{-n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.-\left(J_{n-2}+J_{n-1,0}\right)\mathrm{up}(x+1)\right)\quad\text{для } x>-\frac{1}{2}, \qquad (9)$$

де $J_{i,0}=\int\limits_{-1}^{1}\phi_{i,0}(t)dt$, $J_{i,0}=\left(1+(-1)^i\right)J_i$.

$$\phi_{n,-\frac{3}{4}}(x)=\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}\times$$
$$\times\left(\mathrm{up}\left(x-\frac{1}{4}+2^{-n}\right)-J_0\mathrm{up}\left(x-\frac{1}{4}+2^{-n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\left.-J_{n-4}\mathrm{up}\left(x-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)-\left(J_{n-3}+J_{n-2,0}+J_{n-1,-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{up}(x)\right),$$

для $$x\in\left[-1,-\frac{3}{4}\right], \qquad (10)$$

$$\phi_{n,-\frac{3}{4}}(x)=\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}\times$$
$$\times\left(\mathrm{up}\left(x+\frac{7}{4}-2^{-n}\right)-J_0\mathrm{up}\left(x+\frac{7}{4}-2^{-n+1}\right)-\ldots\right.$$
$$\ldots-J_{n-4}\mathrm{up}\left(x+\frac{7}{4}-\frac{1}{8}\right)-\left(J_{n-3}+J_{n-2,0}\right)\mathrm{up}\left(x+\frac{3}{2}\right)-$$
$$\left.-J_{n-1,-\frac{1}{2}}\mathrm{up}(x+1)\right)$$

для $$x\in\left[-\frac{3}{4},0\right], \qquad (11)$$

де $$J_{n-1,-\frac{1}{2}}=\left(1+(-1)^{n-1}\right)\left(\begin{array}{l}J_{n-1}+J_{n-2}\mathrm{up}\left(-\frac{1}{2}\right)-\\ -\left(J_{n-3}+J_{n-2,0}\right)\mathrm{up}\left(-\frac{3}{4}\right)\end{array}\right).$$

Отже, маємо формули для базисних функцій ряда Рвачова $\phi_{n,0}(x)$, $\phi_{n,-\frac{1}{2}}(x)$, $\phi_{n,-\frac{3}{4}}(x)$. Таким чином, враховуючи (3) – (5) можна сказати, що одночасно отримані формули для $\phi_{n,\frac{1}{2}}(x)$, $\phi_{n,\frac{3}{4}}(x)$, $\phi_{n,-\frac{1}{4}}(x)$, $\phi_{n,\frac{1}{4}}(x)$.

Так само можна отримати формули для решти $\phi_{n,t}(x)$ в явному вигляді, але із зростанням n вони матимуть все більш громіздкий вид. Надамо формули, що зображують $\phi_{n,t}(x)$ лінійною комбінацією зсувів функцій $\mathrm{up}(x)$ окремо на інтервалах $x\le t$ і $x>t$ іншим способом, що не використовує рекурентні співвідношення (6). Як приклад розглянемо функцію $\phi_{5,-\frac{9}{16}}(x)$.

Функцію $\phi_{5,-\frac{9}{16}}(x)$ можна зобразити у вигляді:

$$\phi_{5,-\frac{9}{16}}(x)=$$
$$\begin{cases} a_1\mathrm{up}\left(x-\frac{13}{32}\right)+a_2\mathrm{up}\left(x-\frac{3}{8}\right)+\\ \quad+a_3\mathrm{up}\left(x-\frac{1}{4}\right)+a_4\mathrm{up}(x), \quad x\le-\frac{9}{16}\\ b_1\mathrm{up}\left(x+1+\frac{17}{32}\right)+b_2\mathrm{up}\left(x+1+\frac{1}{2}\right)+\\ \quad++b_3\mathrm{up}(x+1), \qquad x>-\frac{9}{16}\end{cases}$$

Це дійсно так, тому що всі зсуви $\mathrm{up}(x)$, які беруть участь у формулі задовольняють умові (1) для всіх точок, крім точки $x=-\frac{9}{16}$, в якій дорівнюють нулю похідні зсувів, починаючи з шостої похідної. Решті умов ми задовольнимо, якщо визначимо сім коефіцієнтів a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3 із семи умов:

$$\lim_{x\to-\frac{9}{16}-0}\phi^{(5)}_{5,-\frac{9}{16}}\left(-\frac{9}{16}\right)=\lim_{x\to-\frac{9}{16}+0}\phi^{(5)}_{5,-\frac{9}{16}}\left(-\frac{9}{16}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to-\frac{9}{16}-0}\phi^{(i)}_{5,-\frac{9}{16}}\left(-\frac{9}{16}\right)=\lim_{x\to-\frac{9}{16}+0}\phi^{(i)}_{5,-\frac{9}{16}}\left(-\frac{9}{16}\right),$$

$i=4,3,2,1,0$

або

$$\begin{cases} a_1\mathrm{up}^{(5)}\left(-\frac{31}{32}\right)=1;\\ b_1\mathrm{up}^{(5)}\left(\frac{31}{32}\right)=1;\\ a_1\mathrm{up}^{(i)}\left(-\frac{31}{32}\right)+a_2\mathrm{up}^{(i)}\left(-\frac{15}{16}\right)+a_3\mathrm{up}^{(i)}\left(-\frac{13}{16}\right)+\\ +a_4\mathrm{up}^{(i)}\left(-\frac{9}{16}\right)=b_1\mathrm{up}^{(i)}\left(\frac{31}{32}\right)+b_2\mathrm{up}^{(i)}\left(\frac{15}{16}\right)+\\ +b_3\mathrm{up}^{(i)}\left(\frac{7}{16}\right), \quad i=4,3,2,1,0.\end{cases}$$

Значення похідних $up(x)$ можна знайти за формулою [2]:

$$up^{(n)}(x) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k up\left(2^n x + 2^n + 1 - 2k\right),$$

де $\delta_1 = 1$, $\delta_{2k} = -\delta_k$, $\delta_{2k-1} = \delta_k$.

Маємо сім рівнянь з сьома невідомими, розв'язуючи їх, знаходимо:

$$a_1 = \frac{1}{32768}, \; a_2 = -.1525878906 \cdot 10^{-4},$$

$$a_3 = .1907348633 \cdot 10^{-5}, \; a_4 = -.3390014171 \cdot 10^{-6},$$

$$b_1 = -\frac{1}{32768}, \; b_2 = .1287460327 \cdot 10^{-4},$$

$$b_3 = -.1378358410 \cdot 10^{-6}.$$

Тепер застосуємо цю методику для знаходження функції $\phi_{n,t}(x)$ при довільних n і $t < 0$. Функцію $\phi_{n,t}(x)$ можна представити у вигляді:

$$\phi_{n,t}(x) = \begin{cases} a_0 up(x) + \\ + \sum_{i=1}^{n} p_i a_i up(x - 0.p_1 p_2 ... p_i), \quad x \le t, \\ b_0 up(x) + \\ + \sum_{i=1}^{n} q_i b_i up(x + 1 + 0.q_1 q_2 ... q_i), \; x > t, \end{cases},$$

де p_i – двійкові цифри числа $t - \frac{1}{2^n} + 1$, q_i – двійкові цифри числа $t + \frac{1}{2^n}$.

Для функції, що задається таким чином виконується:

$\phi_{n,t}^{(k)}(x) = 0$ для $x \in X_k$, $k = n+1,\ n+2, ...$ і для $k = 0,1,...,n$ при $x \ne t$.

Відповідні умови в точці $x = t$ задовольняються за рахунок вибору коефіцієнтів a_i і b_i, тобто коефіцієнти вибираються з умов:

$$\lim_{x \to t-0} \phi^{(n)}{}_{n,t}(t) = \lim_{x \to t+0} \phi^{(n)}{}_{n,t}(t) = 1,$$

$$\lim_{x \to t-0} \phi^{(k)}{}_{n,t}(t) = \lim_{x \to t+0} \phi^{(k)}{}_{n,t}(t) = 0,$$

$$k = s+1, \; ... \; , n-1,$$

$$\lim_{x \to t-0} \phi^{(k)}{}_{n,t}(t) = \lim_{x \to t+0} \phi^{(k)}{}_{n,t}(t), \quad k = 0,1,...,s$$

або

$$\begin{cases} a_n up^{(n)}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) = b_n up^{(n)}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) = 1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i up^{(k)}(x - 0.p_1 p_2 ... p_i) + a_n up^{(k)}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} q_i b_i up^{(k)}(x + 1 + 0.q_1 q_2 ... q_i) + \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) \times \\ \times b_n up^{(k)} = 0, \qquad k = s+1, \; ... \; , n-1, \\ a_n up^{(k)}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i a_i up^{(k)}(x - 0.p_1 p_2 ... p_i) = \\ = b_n up^{(k)}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) + \sum_{i=1}^{n-1} q_i b_i up^{(k)}(x + 1 + 0.q_1 q_2 ... q_i), \\ \qquad k = 0, \; ..., \; s, \end{cases}$$

де s – номер молодшого двійкового розряду числа t, інакше таке число, що $t = \frac{2l+1}{2^s}$ $(l \in N)$.

Висновки

Таким чином, можна отримати формули для всіх $\phi_{n,t}(x)$. Функцію $up(x)$ можна обчислити за допомогою розкладання у ряд, що швидко збігається [2]. Тому надана формула є дуже зручною і ефективною. Вона може бути застосована як для досліджень базисних функцій, так і для створення ефективних програм розкладання функцій в узагальнений ряд Тейлора-Рвачова В.О.

Список літератури

1. *Рвачёв В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений / В.А. Рвачёв // Успехи мат. Наук. – 1990. – 45. – Вып. 1(271). – С. 77-103.*

2. *Рвачёв В.Л. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах / В.Л. Рвачёв, В.А. Рвачёв. – К.: Наук. думка, 1979. – 139 с.*

3. *Иванов Ю.А. Об оценке базисных функций обобщённого ряда Тейлора / Ю.А. Иванов // Прикладная математика и техническая кибернетика. – Х., 1987. – С. 5-8.*

Надійшла до редколегії 3.09.2012

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доцент В.Д. Душкін, Академія ВВ МВС України, Харків.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ТЕЙЛОРА

Ю.А. Иванов, И.И. Сидоренко

В работе выведена удобная для вычислений формула для базисных функций обобщенного ряда Тейлора – Рвачева В.А., который является изображением функций неквазианалитического класса.

Ключевые слова: *базисные функции, ряд Тейлора-Рвачева.*

FORMULAS FOR BASIS FUNCTIONS OF GENERALIZED TALOR-RVACHOV V.A. SERIES

Y.A. Ivanov, I.I. Sydorenko

The article contains a convenient formula for computing basis functions for generalized Taylor – Rvachev V.A. series, which is the image of functions of a nonquasianalytical class.

Keywords: *base functions, Teylor-Rvachev row.*