

УДК 004.42

М.В. Гусятин, В.М. Гусятин

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*

## ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

*В статье приведены основные соотношения для построения интерполяционной кривой. Метод основан на использовании простейшего квадрата – окружности либо сферы. Такое представление плоской кривой позволяет упростить синтез векторных текстур в компьютерной графике методом обратного трассирования.*

**Ключевые слова:** моделирование кривых и поверхностей, квадрат, интерполяция, сеточная модель.

### Введение

Одной из основных задач в современной компьютерной графике является повышение реалистичности синтезируемых сцен [1]. Выполнение требования высокой реалистичности является важным фактором, например, при проектировании систем визуализации тренажеров транспортных средств различного назначения, при создании художественных или научно-популярных фильмов с применением компьютерной графики и др. Главным направлением из возможных путей решения этой проблемы является применение метода обратного трассирования при решении задач синтеза изображений [2, 3]. Метод обратного трассирования активно развивается в последние годы [3]. Этот метод позволяет синтезировать изображение аналитически описываемых поверхностей без их предварительной триангуляции, что существенно повышает реалистичность синтезируемых изображений объектов. В случае если кривые и поверхности заданы точками на плоскости или полигонами, применение интерполяции исходных данных дает возможность этим методом синтезировать с высокой точностью гладкие кривые и поверхности [7 – 12]. Одной из особенностей этого метода является нахождение точки пересечения проекционного луча с поверхностью синтезируемого объекта [1, 2, 9]. Эта операция существенно упрощается, если для интерполяции используются алгебраические кривые или поверхности, записанные в неявной форме [10]. Такой подход также

решает важную задачу совместимости метода обратного трассирования с накопленной базой моделей и программного обеспечения, которая ориентирована на метод прямого трассирования. Таким образом, поиск новых методов моделирования гладких геометрических форм плоских точно-заданных кривых или полигональных поверхностей с целью их дальнейшей визуализации методом обратного трассирования по-прежнему является актуальной задачей на данном этапе развития компьютерной графики.

**Анализ литературы.** Моделирование кривых и криволинейных поверхностей, интерполирующих точки, которые заданы на плоскости или в пространстве, является одной из важнейших задач компьютерной графики. Различными авторами разработан ряд методов решения этой задачи [6 – 12]. Одним из самых удобных математических методов описания криволинейных форм объектов является их представление при помощи кусков параметрических кривых, поверхностей или сплайнов [4 – 6]. Недостатком такого представления является сложность соединения кусков поверхностей между собой с выполнением условия непрерывности, как самой поверхности, так и ее производной. Использование сплайнов более высоких порядков обеспечивает непрерывное соединение участков поверхностей [4]. Такой подход дает хорошие по качеству результаты, однако для каждого треугольника необходимо формирование параметрических сплайнов четвертой и пятой степени, что существенно повышает требования к производительности аппаратных средств [5, 6]. Параметрическое опи-

сание предусматривает, что исходной позицией проекционного луча, строящего изображение, является точка на поверхности, что затрудняет применение алгоритмов синтеза изображений с использованием метода обратного трассирования. Эта особенность параметрических поверхностей заставила исследователей обратиться к алгебраическим поверхностям [7 – 12]. Авторами работ [7, 8] предлагается использовать для интерполяции алгебраические поверхности высоких порядков. Недостатком такого подхода является сложность расчета коэффициентов таких поверхностей, которая ограничивает использование этого подхода для интерполяции сеток, конфигурация которых меняется при анимации синтезируемых объектов. В [9] предлагается для интерполяции исходной сетки высокой детализации использовать алгебраическую поверхность второго порядка. В целом данный метод имеет достаточно высокую ресурсоемкость. По мнению автора этого метода, он может быть использован в системах интерактивного объемно ориентированного геометрического моделирования. В работах [11, 12] предлагается использовать метод сферической интерполяции, который основан на использовании простейшего квадрата – окружности либо сферы. Такой подход упрощает нахождение точки пересечения проекционного луча с интерполирующей поверхностью методом обратного трассирования [10].

**Цель статьи.** Излагается метод построения (конструирования) плоской кривой с использованием сферической интерполяции. Такое представление плоской кривой позволяет упростить синтез векторных текстур методом обратного трассирования

### Метод конструирования плоской кривой

**1. Область интерполяции.** В процессе моделирования плоских кривых, интерполирующих произвольно расположенные точки на плоскости, важно определиться с областью интерполяции и векторным полем направляющих. По аналогии с [12] область интерполяции определим локально для двух последовательно заданных точек. Векторное поле направляющих, на которых собственно и будут лежать точки интерполирующей кривой, определим как прямые, расположенные перпендикулярно к прямой линии, соединяющей две последовательно заданные точки в области интерполяции. На рис. 1 в системе координат (с/к) ХУ показан набор произвольно расположенных точек  $p_1(x_1, y_1) - p_{10}$ . Точки пронумерованы в порядке их задания. Эти исходные данные дополняются нормальными в каждой точке  $n_1\{n_1x, n_1y\} - n_{10}$ . Нормали могут быть, как и точки, заданы, либо получены расчетом с учетом расположения точек. В статье, как один из вариантов, приведем пример расчета нормалей. Будем полагать,

что направление нормалей в точке совпадает с биссектрисами углов, образованных линиями, соединяющих эту точку с соседними. В этом случае компоненты нормали, например, для точки  $p_2$  равны:

$$\begin{aligned} n_2x &= x_2 - (x_1 + (x_3 - x_1)((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{0.5}) / \\ &(((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2)^{0.5} + ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{0.5}) \\ n_2y &= y_2 - (y_1 + (y_3 - y_1)((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{0.5}) / \\ &(((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2)^{0.5} + ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{0.5}). \end{aligned} \quad (1)$$

**2. Основные соотношения для построения кривой.** Основной особенностью метода является использование такого квадрата как окружность для построения кривой произвольной формы между двумя точками. Наличие нормалей к будущей кривой в каждой точке, через которые она проходит, позволяет получить наряду со связностью (C0) [1, 8] и непрерывность первой производной, т.е. гладкость (C1) конструируемой кривой. Для конструирования кривой выполним следующие геометрические построения. Через концы отрезка каждой прямой, например, через точки  $p_1p_2$  проведем две окружности. При этом центр  $o_1$  одной окружности должен находиться на прямой, проходящей через точку  $p_1$  и совпадающей с нормалью  $n_1$  в этой точке. Центр  $o_2$  второй окружности должен находиться на прямой, проходящей через точку  $p_2$  и совпадающей с нормалью  $n_2$ . Запишем координаты центров этих окружностей:

$$\begin{aligned} x_{o1} &= ((x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (y_1 - y_2)^2)n_1x + \\ &2x_1(y_1 - y_2)n_1y / (2(x_1 - x_2)n_1x + (y_1 - y_2)n_1y), \\ y_{o1} &= ((y_1 - y_2)(y_1 + y_2) - (x_1 - x_2)^2)n_1y + \\ &2y_1(x_1 - x_2)n_1x / (2(x_1 - x_2)n_1x + (y_1 - y_2)n_1y). \\ x_{o2} &= ((x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (y_2 - y_1)^2)n_2x + \\ &2x_2(y_2 - y_1)n_2y / (2(x_2 - x_1)n_2x + (y_2 - y_1)n_2y), \\ y_{o2} &= ((y_2 - y_1)(y_2 + y_1) - (x_2 - x_1)^2)n_2y + \\ &2y_2(x_2 - x_1)n_2x / (2(x_2 - x_1)n_2x + (y_2 - y_1)n_2y). \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом (2) найдем радиусы окружностей:

$$\begin{aligned} r_1 &= ((x_1 - x_{o1})^2 + (y_1 - y_{o1})^2)^{0.5} \\ r_2 &= ((x_2 - x_{o2})^2 + (y_2 - y_{o2})^2)^{0.5}. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем в параметрической форме координаты произвольной точки  $p$ , например, на отрезке  $p_1p_2$ :

$$p(px = x_1 + (x_2 - x_1)t, py = y_1 + (y_2 - y_1)t. \quad (4)$$

Запишем проекции отрезка  $po_1$ , соединяющего центр окружности  $o_1$  и центр отрезка  $p_1p_2$ :

$$\begin{aligned} po_1\{po_1x &= (x_{o1} - (x_1 + x_2)/2), \\ po_1y &= (y_{o1} - (y_1 + y_2)/2)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем в параметрической форме уравнение прямой, проходящей через произвольную точку  $p$  и параллельно отрезку  $p_0p_1$ :

$$x = px + (p_0x)t^0, y = py + (p_0y)t^0. \quad (6)$$

Уравнение (6) является направляющей прямой, на которой и будут лежать точки конструируемой кривой. По аналогии уравнения (5), (6) следует найти для второй окружности.

Подставляем (6) в уравнения окружностей (2), (3) и находим значения  $t^0$ , при которых выполняется пересечение прямой (6) с окружностью. Пусть это будут: для первой окружности  $t_{11}^0, t_{12}^0$ , а для второй  $t_{21}^0, t_{22}^0$ . Подставим эти значения в уравнение (6) и получим для каждой точки пересечения значения координат в системе координат (с/к) XY. Для каждой окружности имеем по две точки пересечения. Пусть это будут: для первой и второй окружности соответственно

$$P_{11}(x_{11}, y_{11}), P_{12}(x_{12}, y_{12}), \\ P_{21}(x_{21}, y_{21}), P_{22}(x_{22}, y_{22}). \quad (7)$$

Для правильного выбора корней в решениях (7) определим функцию, используя уравнение прямой, проведенной через точки  $p_1p_2$ :

$$L_{12} = (x - x_1)/(x_2 - x_1) - (y - y_1)/(y_2 - y_1). \quad (8)$$

Подставим в равенство (8) координаты центров окружностей  $o_1$  и  $o_2$ . По результатам этих подстановок получим эталонные значения знаков:

$$os_1 = L_{12}(o_1), \quad os_2 = L_{12}(o_2). \quad (9)$$

Подставляя (7) в (8) и попарно сравнивая результат с (9), выбираем из пары корней тот, который имеет знак, противоположный знакам  $os_1$  и  $os_2$ . Пусть, например, это будут  $p_{11}$  и  $p_{21}$ . С учетом (4) в векторной форме запишем выражения для отрезков:

$$s_{11} = p_{11}(t) - p(t), \quad s_{21} = p_{21}(t) - p(t). \quad (10)$$

Окончательно выражение для радиуса-вектора, задающего точку на конструируемой кривой, например, на отрезке между точками  $p_1p_2$ , запишем в виде соотношения:

$$p_{12}(t) = p(t) + (s_{11}(1-t) + s_{21}t)k, \quad (11)$$

где  $k$  – коэффициент коррекции кривой, рекомендуемый диапазон изменения от единицы до двух;  $t$  – параметр, изменяющейся от нуля до единицы.

3. Математическое моделирование. Моделирование предлагаемого метода выполнено с использованием математического пакета Wolfram Mathematica. На рис. 1 представлены результаты моделирования. Показаны произвольно расположенные, пронумерованные в порядке их задания

точки  $p_1 - p_{10}$  и интерполирующая кривая, построенная в соответствии с предлагаемым методом и проведенная через эти точки с учетом порядка их задания.

Наряду с построением интерполяционной кривой с помощью пакета Wolfram Mathematica выполнена оценка погрешности конструируемой кривой. В качестве эталонных кривых выбраны: замкнутая кривая эллипс, разомкнутая кривая парабола и периодическая кривая синус. Для таких разных кривых погрешность будем оценивать как относительную погрешность отклонения точек конструируемой кривой от эталонных, лежащих на направляющей прямой (6). Запишем в нашем случае относительную погрешность в следующей форме:

$$\delta = \Delta/M, \quad (12)$$

где  $\Delta$  – абсолютная погрешность отклонения точек конструируемой кривой от эталонных, лежащих на направляющей прямой;  $M$  – некоторый параметр, имеющий максимальное значение, для той или иной эталонной функции.

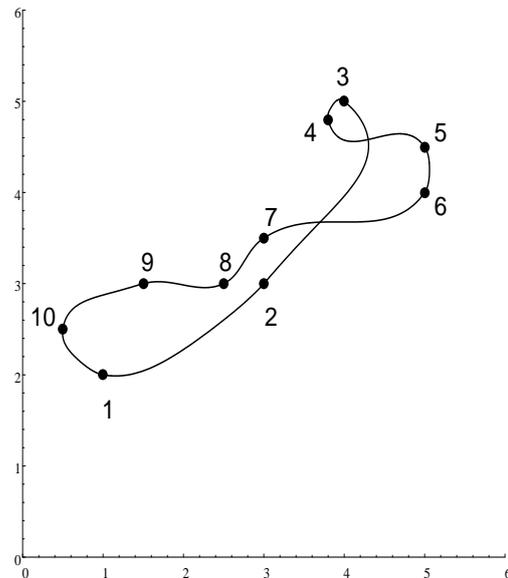


Рис. 1. Исходное задание точек  $p_1 - p_{10}$  и интерполирующая их кривая

Например, для эллипса – длина большой оси, для параболы – наибольшее значение функции на участке интерполяции, для синуса – наибольший размах значений функции. На рис. 2 показан пример интерполирования кривой – улитка Паскаля (проведена сплошной линией), интерполяционная кривая (проведена пунктирной линией).

В табл. 1 приведены результаты оценки погрешности в соответствии с (12). В колонке нормаль представлены два случая: первый – нормаль совпадает с биссектрисой; второй – нормаль рассчитана аналитически для эталонных кривых. Во втором случае погрешность интерполяции существенно уменьшается

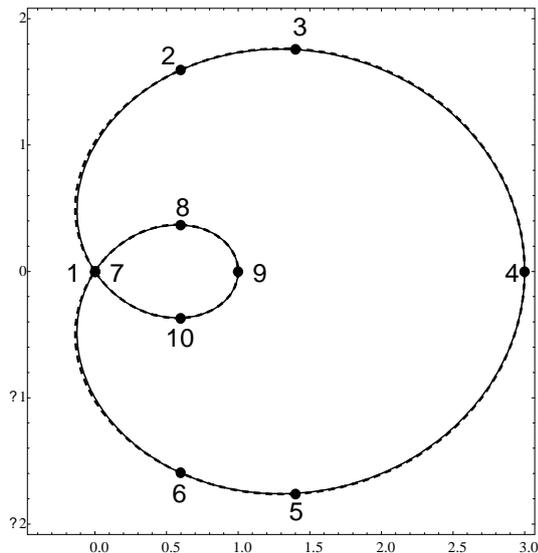


Рис. 2. Пример интерполирования по точкам  $p_1 - p_{10}$  кривой – улитка Паскаля

### Список литературы

1. Foley J.D. Computer Graphics (principles and practice) / J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes. – Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1996., – 1175 p.
2. Иванов В.П. Трехмерная компьютерная графика / В.П. Иванов, А.С. Батраков; под ред. Г.М. Полищука. – М.: Радио и связь, 1995. – 224 с.: ил.
3. Hurley Jim. Ray Tracing Goes Mainstream / Jim Hurley // Intel Technology Journal “Compute-Intensive, Highly Parallel Applications and Uses.” – 2005. – May 19. – vol.09, Published. – Issue 02.
4. Hahmann Stefanie. Polynomial Surface Interpolating Arbitrary Triangulations / Stefanie Hahmann, George-Pierre Bonneau // IEEE Transaction On Visualization And Computer Graphics. – January-march 2003. – Vol. 9, No. 1. – P. 99-109.
5. Barth W. Efficient Ray Tracing for Bezier and B-Spline Surfaces / W. Barth, W. Sturzlinger // Computers & Graphics. – 1993. – 17(4):423{430}.
6. Campanga S. Improving Bezier Clipping and Chebyshev Boxing for Ray Tracing Parametric Surfaces / S. Campanga, P. Slusallek // Technical report. – University of Erlangen, Computer Graphics Group, 1996.
7. Turk G. Modelling with Implicit Surfaces that Interpolate / G. Turk, J. O’ Brien // ACM Transactions on Graphics. – 2002. – 21(4). – P. 855-873.
8. Bajaj C. Modeling with Cubic A-Patches / C. Bajaj, J. Chen, G. Xu // ACM Trans. on Graphics . –1995.14, 2, – P. 103-133.
9. Вяткин С.И. Моделирование сложных поверхностей с применением функций возмущения / С.И. Вяткин // Автоматрия. – 2007. – № 3.
10. Гусятин В.М. Метод уменьшения итераций в алгоритмах синтеза изображений реального масштаба времени / В.М. Гусятин // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – №1. – С. 99-100.
11. Гусятин В.М. Метод сферической интерполяции триангулированных поверхностей / В.М. Гусятин, А.Е. Громенко, Р.В. Сорокин // Материалы второй международной научной конференции «Современные информационные системы. Проблемы и тенденции развития». – Харьков- Туапсе. – 2007. – С. 495-496.
12. Гусятин В.М. Векторное поле направляющих в задаче моделирования криволинейных поверхностей методом сферической интерполяции / В.М. Гусятин, М.В. Гусятин // Вимірвальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький, 2012. – №1. – С. 88-92.

Таблица 1

Результаты оценки погрешности интерполяции

Эталон – кривая	Кол. точек интерпол.	Нормаль	$\delta_{\max}$
эллипс	4	биссектриса	0,026
	6	биссектриса	0,022
	8	биссектриса	0,02
	8	аналитик	0,0029
парабола	3	биссектриса	0,012
	3	аналитик	0,0066
синус	5	биссектриса	0,006
	5	аналитик	0,00056

### Выводы

Метод позволяет построить плоскую гладкую кривую как локально для двух точек, так и для ансамбля произвольно расположенных точек в порядке их задания. Метод основан на использовании простейшего квадрата – окружности, что упрощает расчеты при конструировании кривой. Дальнейшая работа авторов направлена на построение пространственных кривых и поверхностей предлагаемым методом, а также визуализацию этих кривых и поверхностей методом обратного трассирования.

Поступила в редколлегию 15.11.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.Г. Руденко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

### ПОБУДОВА ПЛОСКОЇ КРИВОЇ МЕТОДОМ СФЕРИЧНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ В ЗАВДАННЯХ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

М.В. Гусятин, В.М. Гусятин

У статті приведені основні співвідношення для побудови інтерполяційної кривої. Метод заснований на використанні простого квадрата – кола або сфери. Таке представлення плоскої кривої дозволяє спростити синтез векторних текстур в комп'ютерній графіці методом зворотного трасування.

**Ключові слова:** моделювання кривих і поверхонь, квадрат, інтерполяція, сіткова модель.

### BUILDING A PLANE CURVE SPHERICAL INTERPOLATION METHOD IN TASKS OF COMPUTER GRAPHICS

M.V. Gusyatin, V.M. Gusyatin

The paper presents the basic relations for the construction of the interpolation curve. The method is based on a simple quadric - a circle or sphere. This representation of a plane curve to simplify the synthesis of vector textures for computer graphics by Ray Tracing.

**Keywords:** modeling of curves and surfaces, quadrics, interpolation, grid model.