УДК 681.3: 66.662.7

В.Ю. Дубницкий[1], А. М. Кобылин[1], А.Д. Тевяшев[2]

[1] Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ (Киев)
[2] Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ, ИМЕЮЩИМИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ТИПА В

Поставлена прямая и обратная задача решения системы нелинейных уравнений, в которой все входящие в её состав элементы заданы в интервальном виде. Показано, что результаты решения прямой и обратной задачи можно использовать для анализа и синтеза нелинейных систем при известных воздействиях и реакциях системы на эти воздействия. Предложен алгоритм решения прямой и обратной задачи, основанный на методе исследования пространства параметров. Применение метода показано на примере задачи анализа и синтеза моделирования квазистационарного режима транспорта природного газа по участку трубопровода.

Ключевые слова: *системы нелинейных уравнений, прямая задача решения системы нелинейных уравнений, обратная задача решения системы нелинейных уравнений, интервальный анализ, нестандартный интервальный анализ ,метод исследования пространства параметров неопределённость измерений, квазистационарный режима транспорта природного газа по участку трубопровода.*

Введение

При анализе и синтезе систем различной физической природы можно выделить объединяющую их особенность. Все входящие в эти системы параметры и неизвестные величины имеют реальный физический смысл и, в силу этого, их значения могут быть получены с некоторой погрешностью. В зависимости от конкретного физического смысла задачи эти погрешности могут быть заранее известными, а в некоторых случаях их определение невозможно. Таким образом, можно утверждать, что все эти величины известны с некоторой неустранимой неопределённостью.

В соответствии с работами [1 – 4] различают неопределенность типа А, которую оценивают статистическими методами, и неопределенность типа В, которую оценивают нестатистическими методами. При этом предлагается два метода оценивания неопределенностей типов А и В: Для неопределенности типа А это использование известных статистических оценок среднеарифметического значения и среднеквадратического отклонения, используя результаты измерений и опираясь, в основном, на нормальный закон распределения полученных величин. Для неопределенности типа В это использование априорной нестатистической информации, опираясь, в основном, на равномерный закон распределения возможных значений величин в определенных границах.

Далее будем рассматривать некоторую техническую систему S для которой задан n-мерный вектор $X=\left(x_1,x_2...x_n\right)$, интерпретируемый как множество входных сигналов, конечное множество $L=\left(l_1,l_2...l_p\right)$, интерпретируемое как множество параметров системы и конечный m-мерный вектор $Y=\left(y_1,y_2,...y_m\right)$, интерпретируемый как вектор выходных сигналов системы. Пусть известны численные значения элементов множеств $X=\widehat{X}$, $L=\widehat{L}$, $Y=\widehat{Y}$. В рамках данного сообщения примем, что символ $\langle . \rangle$ будет обозначать заданное подмножество множества допустимых значений для множеств X, L, Y:

$$\left\langle\widehat{X}\right\rangle\subseteq\widehat{X},\ \left\langle\widehat{Y}\right\rangle\subseteq\widehat{Y},\ \left\langle\widehat{L}\right\rangle\subseteq\widehat{L}. \qquad (1)$$

Потребуем, чтобы

$$\left\langle\widehat{X}\right\rangle\cap\left\langle\widehat{Y}\right\rangle\cap\left\langle\widehat{L}\right\rangle=\varnothing. \qquad (2)$$

Условие(2) означает, что в системе отсутствуют обратные связи.

Все входящие в эти системы параметры и неизвестные величины имеют реальный физический смысл и, в силу этого, их значения могут быть получены с некоторой погрешностью. В зависимости от конкретного физического смысла задачи эти погрешности могут быть заранее известными, а в некоторых случаях их определение невозможно. Таким образом, можно утверждать, что все эти величины известны с некоторой неустранимой неопределённостью. При моделировании технических систем будем различать следующие типы задач.

Прямая задача. По известным значениям множества входных сигналов $\widehat{X}$ и оператора системы $\widehat{L}$ решить задачу:

$$\left\langle\widehat{L}\right\rangle D\left\langle\widehat{X}\right\rangle=\left\{\left\langle\widehat{Y}\right\rangle\right\}. \qquad (3)$$

В условии (3) символ D обозначает оператор системы, то априори известные функциональные связи между элементами множеств X, Y, L. Задачу, определяемую условием (3), назовём прямой задачей или задачей анализа системы.

Обратная задача типа 1. По известным значениям $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$ решить выбрать такие значения $\widehat{L}$, чтобы было выполнено условие $\widehat{Y} \subseteq \left\langle \widehat{Y} \right\rangle$:

$$\left\langle \widehat{X} \right\rangle D \left\{ \left\langle \widehat{L} \right\rangle \right\} = \left\langle \widehat{Y} \right\rangle. \qquad (4)$$

Обратную задачу типа 1 можно назвать задачей синтеза системы.

Обратной задачей типа 2 назовём задачу вида:

$$\left\{ \left\langle \widehat{X} \right\rangle \right\} D \left\langle \widehat{L} \right\rangle = \left\langle \widehat{Y} \right\rangle. \qquad (5)$$

Обратная задача типа 2 возникает при определении допустимой области эксплуатации системы.

Анализ литературы. Впервые постановка обратной задачи при интервально заданных условиях поставлена в работе [8, С.185].

Одним из первых на необходимость учёта неопределённости в исходных данных обратил внимание А.Н. Крылов. В работе [5, С. 6] он писал: «Отсюда ясно, что для прикладных вопросов нет надобности производить вычисления по абсолютно точным формулам и с совершенною точностью; напротив, можно пользоваться заведомо неточными формулами или приемами, лишь бы была уверенность, что происходящая от этого погрешность не превышает тех пределов, которые в данном вопросе допускаются». Математическим аппаратом, в полной мере реализующим эти положения, можно считать аппарат интервальных вычислений. Его основы изложены в работах [6 – 8]. В работах [10 – 12] в результате исследования последствий применения различных систем аксиом интервальной арифметики показано, что наименьший интервал неопределённости получается при использовании нестандартных интервальных вычислений. Система аксиом, им соответствующая, описана в работе [9]. Следуя работам [6 – 8], замкнутым интервалом [a, b] вещественной оси R назовём множество всех чисел, расположенных между заданными числами a и b, включая их самих, т.е.

$$[a,b] := \{x \in R \mid a \le x \le b\}. \qquad (6)$$

Правила нестандартной интервальной математики, приведенные в работе [9], следующие.

Обозначим

$$M = \left(I(R), +, -, \times, /, +^-, -^-, \times^-, /^- \right),$$

где $I(R) = \left\{ \left[a^-, a^+ \right] \mid a^- \le a^+, a^-, a^+ \in R \right\}$ – множество действительных интервалов; $(+, -, \times, /)$ и $\left(+^-, -^-, \times^-, /^-\right)$ – стандартные и нестандартные интервальные операции сложения, вычитания, произведения и деления соответственно действительным интервалам.

Для программной реализации представим значения интервальных чисел **A** и **B** в форме центр-радиуса $A = \langle a, r_a \rangle$, $B = \langle b, r_b \rangle$, где

$$a = \frac{\underline{a} + \overline{a}}{2}, \quad r_a = \frac{\overline{a} - \underline{a}}{2}, \; b = \frac{\underline{b} + \overline{b}}{2}, \quad r_b = \frac{\overline{b} - \underline{b}}{2} \qquad (7)$$

– центры и радиусы соответственно интервалов **A** и **B**.

Нестандартная интервально-арифметическая операция сложения определяется так:

$$A +^- B = \langle a + b, | r_a - r_b | \rangle. \qquad (8)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция вычитания определяется так:

$$A -^- B = \langle a - b, | r_a - r_b | \rangle. \qquad (9)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция произведения определяется так:

$$A \times^- B = \langle ab - \mathrm{sgn}(ab) r_a r_b, | a r_b - \mathrm{sgn}(ab) b r_a | \rangle,$$

$$\text{если} \quad \frac{|a|}{r_a} \ge 1, \; \frac{|b|}{r_b} \ge 1; \qquad (10)$$

$$A \times^- B = \langle ab - \mathrm{sgn}(b) a r_b, | b r_a - \mathrm{sgn}(b) r_a r_b | \rangle,$$

$$\text{если} \quad \frac{|a|}{r_a} < 1, \; \frac{|a|}{r_a} < \frac{|b|}{r_b}; \qquad (11)$$

$$A \times^- B = \langle ab - \mathrm{sgn}(a) b r_b, | a r_a - \mathrm{sgn}(a) r_b r_b | \rangle,$$

$$\text{если} \quad \frac{|b|}{r_b} < 1, \; \frac{|a|}{r_a} \ge \frac{|b|}{r_b}. \qquad (12)$$

При умножении интервала на число применяется такое правило:

$$\mu \cdot a = \begin{cases} \left[\mu \cdot \underline{a}, \mu \cdot \overline{a} \right], \text{если} & \mu \ge 0, \\ \left[\mu \cdot \overline{a}, \mu \cdot \underline{a} \right], \text{если} & \mu < 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция деления определяется так:

$$A /^- B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \left\langle ab - \mathrm{sgn}(ab) r_a r_b, \left| a r_b - \mathrm{sgn}(ab) b r_a \right| \right\rangle,$$

$$\text{если} \quad \frac{|b|}{r_b} > 1, \; \frac{|a|}{r_a} \ge 1; \qquad (14)$$

$$A /^- B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \left\langle ab - \mathrm{sgn}(b) a r_b, \left| b r_a - \mathrm{sgn}(b) r_a r_b \right| \right\rangle,$$

$$\text{если} \quad \frac{|b|}{r_b} > 1, \; \frac{|a|}{r_a} < 1; \qquad (15)$$

$$A /^- B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \left\langle ab - \mathrm{sgn}(a) b r_a, \left| a r_b - \mathrm{sgn}(a) r_a r_b \right| \right\rangle,$$

$$\text{если} \quad \frac{|b|}{r_b} < 1, \; \frac{|a|}{r_a} < 1. \qquad (16)$$

При делении интервала на число применяется такое правило:

$$\mu / a = \begin{cases} \left[\mu \cdot \dfrac{1}{\underline{a}}, \mu \cdot \dfrac{1}{\overline{a}} \right], \text{если} \quad \mu \geq 0, \\ \left[\mu \cdot \dfrac{1}{\overline{a}}, \mu \cdot \dfrac{1}{\underline{a}} \right], \text{если} \quad \mu < 0. \end{cases} \qquad (17)$$

Постановка задачи. Цель работы – разработка метода решения прямой (3) и обратных задач (4), (5) для системы нелинейных уравнений, составляющим которых присуща неопределённость типа В.

Полученные результаты

Решение прямой задачи анализа технической системы, то есть задачи (3), не вызывает особых затруднений. При известных численных значениях вектора входных сигналов $\widehat{X}$, оператора системы $\widehat{L}$ и допустимых границах интервалов их определения, используя аксиомы интервальной арифметики и теорему об интервальном расширении функций [6 – 8], получение интервалов для компонентов вектора выходных сигналов $\widehat{Y}$ особых затруднений не представляет. Существенным в дальнейшем изложении будет понятие точности решения. Определим его таким образом.

Предположим, что для вычисления некоторой величины используем древовидный многоуровневый алгоритм, показанный на рис. 1 и известный [8], как дерево Канторовича. Примем, что y_0 – конечный результат вычислений, результат высшего уровня.

Примем, что $x_{1;0}; x_{2;0} ... x_{n;0}$ – аргументы первого уровня и получим дерево расчёта этой величины.

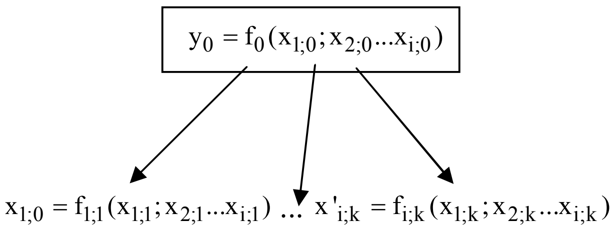

Рис. 1. Построение дерева формул

Далее построение дерева можно продолжить по аналогичной схеме.

Для дальнейшего решения задачи воспользуемся методом исследования пространства параметров, теоретические основы которого изложены в [14].

Будем считать, для удобства выполнения расчётов, что на каждом уровне дерева в зависимости вида $f_{i;k}(x_{1;0}; x_{2;0} ... x_{i;k})$, входят все переменные данного уровня. Часть из них может быть нулевыми.

Предлагается последовательность действий, состоящая со следующих шагов.

Шаг 1: Задаем желаемое значение итогового показателя y_0.

Шаг 2: Задаем допустимый интервал неопределенности пошагового показателя, т.е. интервалы изменения переменных нулевого уровня.

Шаг 3: Используя правила интервального анализа, вычисляем допустимый интервал для y_0.

Если $y_0 \in [y_н; y_в]$, где $y_н$, $y_в$ – левая и правая граница допустимых значений y_0, то задача имеет решения.

Если $y_0 \notin [y_н; y_в]$, то задача не имеет решения.

Шаг 4: (этот шаг используется как общий шаг алгоритма) Если задача не имеет решения, то необходимо изменить интервалы неопределенности аргументов нулевого уровня. Если задача имеет решения, то подбор значений переменных начинают с уровня дерева с наибольшим номером.

Для каждой переменной каждого уровня берём ее допустимый интервал расчета, и в нем определяем равномерно распределенные случайные числа.

Шаг 5: Для выбранных случайных чисел вычисляются соответствующие показатели и выбираются те значения, для которых модуль отклонения расчетного значения от желаемого не превышает заданной точности.

Шаг 6: Имея вычисленные интервалы неопределенности, вычисляют интервал соответствующего показателя для данного уровня дерева.

Рассмотрим простейшую обратную задачу. Пусть задана формула:

$$(AB) + (CD) = = (20 \cdot 4) + (10 \cdot 2) = 100 .$$

Дерево для получения такого выражения показано рис. 2.

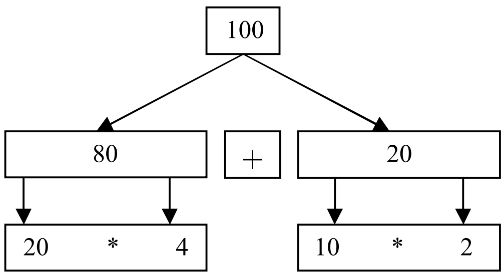

Рис. 2. Дерево формул (дерево Канторовича) решения примера обратной задачи

Необходимо так изменить все элементы выражения, не приравнивая ни один из них нулю, чтобы получить число 105, если диапазон интервала каждого элемента нижнего уровня составляет ± 5% от исходного, среднего значения, соответствующего интервала. Решать задачу будем методом исследования пространства параметров.

Результат поиска решения приведен на рис. 3.

Приведём необходимые пояснения к рис. 3. От значения каждого элемента вычитанием и сложением 5% его исходного значения получаем соответствующие интервальные значения и занесем их в таблицу. Следующим шагом найдем числа, указанные в столбцах E и F.

Для этого проведем необходимые арифметические операции.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**20**	**4**	**10**	**2**	**A*B**	**C*D**	**E+F**	**G-105**
2	19	3,8	9,5	1,9	72,2	18,05	90,25	-14,75
3	19,1	3,82	9,55	1,91	72,962	18,2405	91,2025	-13,7975
4	19,2	3,84	9,6	1,92	73,728	18,432	92,16	-12,84
5	19,3	3,86	9,65	1,93	74,498	18,6245	93,1225	-11,8775
6	19,4	3,88	9,7	1,94	75,272	18,818	94,09	-10,91
7	19,5	3,9	9,75	1,95	76,05	19,0125	95,0625	-9,9375
8	19,6	3,92	9,8	1,96	76,832	19,208	96,04	-8,96
9	19,7	3,94	9,85	1,97	77,618	19,4045	97,0225	-7,9775
10	19,8	3,96	9,9	1,98	78,408	19,602	98,01	-6,99
11	19,9	3,98	9,95	1,99	79,202	19,8005	99,0025	-5,9975
12	20	4	10	2	80	20	100	-5
13	20,1	4,02	10,05	2,01	80,802	20,2005	101,0025	-3,9975
14	20,2	4,04	10,1	2,02	81,608	20,402	102,01	-2,99
15	20,3	4,06	10,15	2,03	82,418	20,6045	103,0225	-1,9775
16	20,4	4,08	10,2	2,04	83,232	20,808	104,04	-0,96
17	20,5	4,1	10,25	2,05	84,05	21,0125	105,0625	0,0625
18	20,6	4,12	10,3	2,06	84,872	21,218	106,09	1,09
19	20,7	4,14	10,35	2,07	85,698	21,4245	107,1225	2,1225
20	20,8	4,16	10,4	2,08	86,528	21,632	108,16	3,16
21	20,9	4,18	10,45	2,09	87,362	21,8405	109,2025	4,2025
22	21	4,2	10,5	2,1	88,2	22,05	110,25	5,25

Рис. 3. Результаты поиска решения обратной задачи поисковым методом (ответ находится в строке 17)

Далее находим численные значения элементов столбца G. Его значение определяется сложением столбцов E и F. В столбце H находим именно ту комбинацию столбцов A, B, C, и D, которая ближе всего находится к искомому значению числу 105.

Рассмотрим применение метода исследования пространства параметров для решения задач синтеза системы, моделируемой нелинейными алгебраическими уравнениями**.**

Рассмотрим систему, условия функционирования которой определены как

$$Y = F(X, L, C), \quad (18)$$

и заданы: $X = \left(x_1, x_2 ... x_j, x_{j+1}, ... x_n\right)$ – множество входных каналов,

$Y = \left(y_1, y_2, ..., y_i, y_{i+1}, ... y_m\right)$ – множество выходных каналов,

$L = \left(l_1, l_2 ... l_u, l_{u+1}, ... l_p\right)$ – множество параметров системы,

$C = \left(c_1, c_2, ... c_v, c_{v+1}, ... c_w\right)$ – множество постоянных величин.

Пусть преобразование входных величин, поступающих в систему, в сигнал, получаемый на i -м выходном канале, осуществляется по правилу

$$y_i = F_i(X_i, L_i, C_i), \; i = 1, 2, ... m. \quad (19)$$

В условии (19) принято, что нижний индекс обозначает подмножества соответствующих множества элементов условия (18), необходимых для получения численного значения величины y_i: $X_i \subseteq X; \; L_i \subseteq L; \; C_i \subseteq C$, то есть: при этом выполняются следующие условия истинности для предикатов вида:

$$P\left[((X_i \cap X_j) \neq \varnothing) \vee ((X_i \cup X_j) \neq \varnothing)\right] = 1;$$

$$i = 1, 2, ... m. \quad (20)$$

$$P\left[((L_i \cap L_j) \neq \varnothing) \vee ((L_i \cup L_j) \neq \varnothing)\right] = 1;$$

$$i = 1, 2, ... m. \quad (21)$$

$$P\left[((C_i \cap C_j) \neq \varnothing) \vee ((C_i \cup C_j) \neq \varnothing)\right] = 1;$$

$$i = 1, 2, ... m. \quad (22)$$

Условия (20)…(22) обеспечивают связность структуры моделируемой системы.

С учётом неопределённость типа B в исходных данных, условие (19) представим в таком виде:

$$(\underline{y_i}, \overline{y_i}) = F[((\underline{x_1}, \overline{x_1}), ...(\underline{x_j}, \overline{x_j}));$$

$$((\underline{l_1}, \overline{l_1}), ...(\underline{l_u}, \overline{l_u})); (\underline{c_1}, \overline{c_1}), ...(\underline{c_v}, \overline{c_v}))];$$

$$j \leq n; \; u \leq p; \; v \leq w. \quad (23)$$

Известно, что интервал возможных значений любой физически реализуемой величины W в общем виде можно представить так:

$$\overline{A}(1 - \varepsilon) < A < \overline{A}(1 + \varepsilon), \quad (24)$$

где: $\overline{A}$ – среднее значение измеряемой величины, ε – относительная погрешность её определения.

Примем, что левая часть условия (22) определяет нижнюю границу интервала, на котором определена величина A, правая часть этого же условия – верхнюю. В соответствии с принятой в интервальном анализе символикой обозначим эти границы так:

$$\underline{a} = \overline{A}(1 - \varepsilon); \; \overline{a} = \overline{A}(1 + \varepsilon). \quad (23)$$

Следовательно, связь между величиной относительной погрешности определения величины A и свойствами интервальной величины [A] определяют по условию:

$$\varepsilon = \frac{2\left(\overline{a} - \underline{a}\right)}{\left(\overline{a} + \underline{a}\right)}. \quad (24)$$

Из условия (23) следует, что:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_a}{a} = \frac{\overline{a} - \underline{a}}{\overline{a} + \underline{a}}. \quad (25)$$

Полученные условия (24) и (25) устанавливают связь между погрешностью определения величины и интервалом неопределённости, который ей соответствует. Пусть относительная погрешность переменных $X = \left(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\right)$ равна:

$$\varepsilon(X) = \max_i \left(\varepsilon(x_1), \varepsilon(x_2), ..., \varepsilon(x_i), ..., \varepsilon(x_n)\right); \quad (26)$$

тносительная погрешность переменных $Y = \left(y_1, y_2, ..., y_j, ..., y_m\right)$ равна:

$$\varepsilon(Y) = \max_j \left(\varepsilon(y_1), \varepsilon(y_2), ..., \varepsilon(y_j), ..., \varepsilon(y_m)\right); \quad (27)$$

относительная погрешность переменных $L = \left(l_1, l_2, ..., l_k, ..., l_p\right)$ равна:

$$\varepsilon(L) = \max_k \left(\varepsilon(l_1), \varepsilon(l_2), ..., \varepsilon(l_k), ..., \varepsilon(l_p)\right), \quad (28)$$

желаемой погрешностью решения назовём величину:

$$E = \max(\varepsilon(X), \varepsilon(L), \varepsilon(Y)). \quad (29)$$

Условие (39), с учётом условия (35), означает, что точность получаемого решения не может быть меньше, чем точность определения исходных данных, то есть реализует принцип, установленный в работе [5]. В работе [8] введено понятие ширины интервала интервального числа [A]:

$$\operatorname{wid}\,[A] = \bar{a} - \underline{a} \qquad (30)$$

и средины интервала интервального числа [A]:

$$\operatorname{mid}[A] = \frac{1}{2}\left(\bar{a} + \underline{a}\right). \qquad (31)$$

Тогда относительной погрешностью интервального числа [A] назовём величину

$$\Delta[A] = \operatorname{wid}[A] / \operatorname{mid}[A]. \qquad (32)$$

Понятие решения системы интервально заданных нелинейных уравнений введено в работе [8]. Тогда решение первой и второй обратных задач в общем случае определим так. Для системы нелинейных уравнений, заданных в интервальном виде:

$$\Phi([U],[S]) = [T] \qquad (33)$$

решением $[Z]$ назовём такое значение интервального вектора $\left[U^0\right] = ((\underline{u}_1^0, \bar{u}_1^0),\ldots(\underline{u}_q^0, \bar{u}_q^0),\ldots(\underline{u}_w^0, \bar{u}_w^0))$, для которого выполнены условия:

$$[Z] = \left|\left\langle \hat{U} \right\rangle - \left\langle U^0 \right\rangle\right| = \min_{[U]\in\left\langle U^0 \right\rangle} \sum_{q=1}^{w} \Delta\hat{u}_q \qquad (34)$$

при том, что

$$\Delta[Z] \geq \max\left(\Delta[U], \Delta[S], \Delta[T]\right). \qquad (35)$$

Задачи, поставленные в данной работе, решали методом исследования пространства параметров [14], блок-схема которого, адаптированная к особенностям их решения, показана на рис. 4. Метод исследования пространства параметров допускает поиск решения в интерактивном режиме, что особенно важно при проектирования технических систем потому, что не всегда возможна строгая формализация процесса принятия решения. Укрупнённая блок-схема решения поставленных задач методом исследования пространства параметров показана на рис. 4.

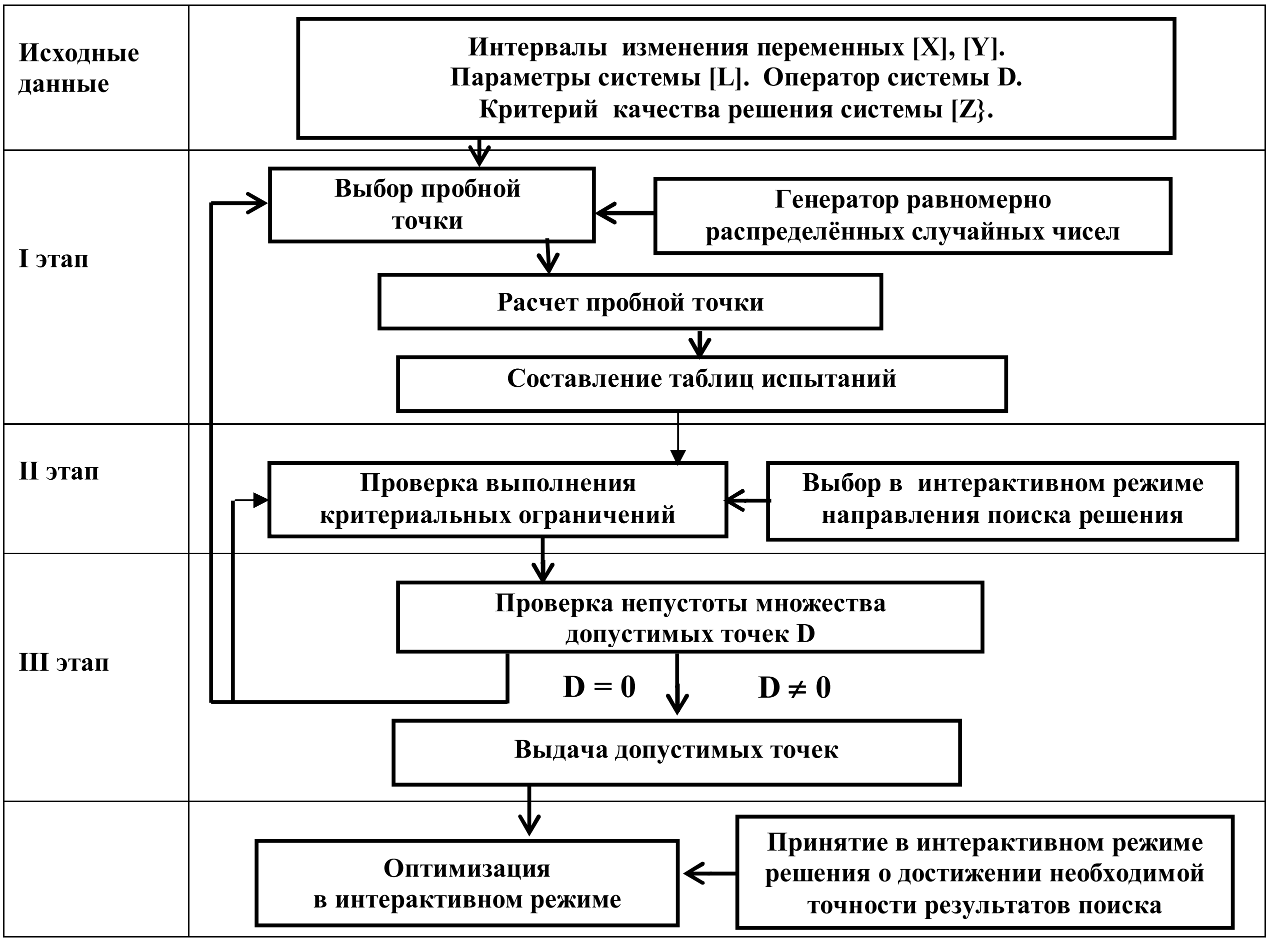

Рис. 4. Укрупнённая блок-схема применения метода исследования пространства параметров

Более подробное изложение особенностей метода, адаптированного к условиям аналогичной задачи, приведено в работе [13].

Применение описанного метода рассмотрим на примере задачи моделирования квазистационарного режима транспорта природного газа по участку трубопровода. Подробно задачи моделирования трубопроводных систем рассмотрены в работе [15], особенности статистического моделирования таких систем описаны в работах [16, 17]. Рассмотрим далее модель квазистационарного неизотермического режима транспорта природного газа на участке магистрального газопровода, описываемую системой уравнений вида:

$$\begin{cases} P_k(\omega) = \sqrt{P_н^2(\omega) - \dfrac{\Delta L P_0 T_{ср}(\omega) Z_{ср} q(\omega)^2 \alpha\lambda}{D^{5,2} E(\omega)^2 g\pi^2 R\nu T_0^2}}; \\ T_к(\omega) = T_{гр} + \left(T_н(\omega) - T_{гр}\right) \exp\left(-\dfrac{62{,}6 K_m(\omega) D_в L}{10^6 q(\omega) \Delta S}\right), \end{cases} \quad (36)$$

где $P_н(\omega)$ – начальное давление газа (атмосферы), $T_н(\omega)$ – начальная температура (градусы Цельсия), $q(\omega)$ – расход газа (миллионов м^3 в сутки), $Kt(\omega)$ – теплопередачи конденсата в грунт (вт/(м*с)), $E(\omega)$ – коэффициент эффективности, $\beta(\omega)$ – гидравлическое сопротивление, $P_к(\omega)$ – конечное давление газа, атмосферы, $T_к(\omega)$ – конечная температура, Δ – относительная плотность газа по воздуху, L – длина участка трубопровода, T_0 –температура почвы, D – внутренний диаметр участка трубопровода, D_n – внешний диаметр участка трубопровода, ρ_0 – плотность газа при стандартных условиях, k – коэффициент шероховатости, g – коэффициент свободного падения, g=9,80665 м/сек^2, R – Газовая постоянная, P_0 – давление окружающей среды, α – коэффициент перерасчета, λ – коэффициент гидравлического сопротивления газу, π = 3,14159, S – теплоемкость газа, Rv = R/Δ, $Z_{ср}$ – коэффициент сжимаемости газа, $T_{ср}$ – среднее значение температуры газа на участке газопровода, $P_к(\omega)$ – конечное давление газа, атмосферы.

Более подробное изложение особенностей метода, адаптированного к условиям аналогичной задачи, приведено в работе [13].

Применение описанного метода рассмотрим на примере задачи моделирования квазистационарного режима транспорта природного газа по участку трубопровода. Подробно задачи моделирования трубопроводных систем рассмотрены в работе [15], особенности статистического моделирования таких систем описаны в работах [16, 17]. Рассмотрим далее модель квазистационарного неизотермического режима транспорта природного газа на участке магистрального газопровода, описываемую системой уравнений вида:

$$\begin{cases} P_k(\omega) = \sqrt{P_н^2(\omega) - \dfrac{\Delta L P_0 T_{ср}(\omega) Z_{ср} q(\omega)^2 \alpha\lambda}{D^{5,2} E(\omega)^2 g\pi^2 R\nu T_0^2}}; \\ T_к(\omega) = T_{гр} + \left(T_н(\omega) - T_{гр}\right) \exp\left(-\dfrac{62{,}6 K_m(\omega) D_в L}{10^6 q(\omega) \Delta S}\right), \end{cases} \quad (36)$$

где $P_н(\omega)$ – начальное давление газа (атмосферы), $T_н(\omega)$ – начальная температура (градусы Цельсия), $q(\omega)$ – расход газа (миллионов м^3 в сутки), $Kt(\omega)$ – теплопередачи конденсата в грунт (вт/(м*с)), $E(\omega)$ – коэффициент эффективности, $\beta(\omega)$ – гидравлическое сопротивление, $P_к(\omega)$ – конечное давление газа, атмосферы, $T_к(\omega)$ – конечная температура, Δ – относительная плотность газа по воздуху, L – длина участка трубопровода, T_0 –температура почвы, D – внутренний диаметр участка трубопровода, D_n – внешний диаметр участка трубопровода, ρ_0 – плотность газа при стандартных условиях, k – коэффициент шероховатости, g – коэффициент свободного падения, g=9,80665 м/сек^2, R – Газовая постоянная, P_0 – давление окружающей среды, α – коэффициент перерасчета, λ – коэффициент гидравлического сопротивления газу, π=3,14159, S – теплоемкость газа, Rv=R/Δ, $Z_{ср}$ – коэффициент сжимаемости газа, $T_{ср}$ – среднее значение температуры газа на участке газопровода, $P_к(\omega)$ – конечное давление газа, атмосферы.

При моделировании системы (36) примем, что величины $P_н(w)$, $q(w)$, $E(w)$, $P_k(w)$, $T_н(w)$, $K_t(w)$, $T_k(w)$, $E(w)$ – переменные, остальные величины постоянные.

Упростим условия (36). Примем, что:

$$\left(C_1, C_1\right) = \frac{\Delta L P_0 T_{ср}(\omega) Z}{D^{5.2} g\pi^2 R\nu T_0} \alpha\lambda, \quad (37)$$

$$(C_{2,} C_2) = \frac{62{,}6 D_e L}{10^5 \Delta L}. \quad (38)$$

С учётом (37) и (38) уравнения, входящие в систему (36), примут вид:

$$\left(\underline{P_k}(\omega), \overline{P_к}(\omega)\right) = \sqrt{\left(\underline{P_н(\omega),} \overline{P^в}(\omega)\right) - (C_1, C_1)\left(\frac{\left(\underline{q}(\omega), \bar{q}(\omega)\right)}{\left(\underline{E}(\omega), \bar{E}(\omega)\right)}\right)^2}, \quad (39)$$

$$\left(\underline{T}_k(\omega), \overline{T_k}(\omega)\right) = \left(\left(T_{гр}, T_{гр}\right) - \left(\left(\underline{T}_н(\omega), \overline{T_н}(\omega)\right)\right) - \left(\left(T_{гр}, T_{гр}\right)\right)\right) \times \quad (40)$$
$$\times \exp(-(\underline{G,}\overline{G})),$$

при условии, что:

$$\left(\underline{G}, \overline{G}\right) = \frac{\left(\underline{Kt}(\omega), \overline{K}t(\omega)\right) \cdot (C_1, C_1)}{(\underline{q}\ \ (\omega), \bar{q}(\omega))}. \quad (41)$$

Условия и результаты решения прямой и обратной задачи для условий (36) показаны в табл. 1 – 4.

Результаты решения прямой задачи можно интерпретировать следующим образом:

Максимальное значение выходного давления газа $P_k(w)$ может быть достигнуто в интервале [41,18424, 52,95135] при входных переменных, интервальные значения которых должны находиться в следующих интервалах: $P_n(w)$ = [49,97356, 56,9767], q(w)=[10,916177, 11,85], E(w)=[0,965589, 0,9659415].

Таблица 1

Решение прямой задачи по определению конечного давления природного газа на участке трубопровода

Входные данные						Выходные данные	
Pn(w)		q(w)		E(w)		Pk(w)	
Значения интервалов		Значения интервалов		Значения интервалов		Значения интервалов	
Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее
49,97356	56,9767	10,916177	11,85	0,965589	0,9659415	41,18424	52,95135

Таблица 2

Решение прямой задачи по определению конечной температуры газа на участке трубопровода

Входные данные						Выходные данные	
Tn(w)		Kt(w)		q(w)		Tk(w)	
Значения интервалов		Значения интервалов		Значения интервалов		Значения интервалов	
Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее
49,21047	71,94533	1,2458768	1,2568094	11,95945	12,893277	47,59986	69,62324

Таблица 3

Решение обратной задачи по определению начального давления природного газа на участке трубопровода*)

Заданное значение давление газа на выходе для решения обратной задачи	Полученные значения на входе при решении обратной задачи							
Mid(Pk(w)	Pk(w)		Pn(w)		q(w)		E(w)	
	Значения интервалов		Значения интервалов		Значения интервалов		Значения интервалов	
	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее
42	35,1614	48,8410	47,339	54,3431	11,85846	12,7922	0,9399	0,94030

*) Примечание: отклонение от требуемого результата- 0,001237.

Таблица 4

Решение обратной задачи по определению начальной температуры на участке трубопровода

Заданное значение температуры газа на выходе для решения обратной задачи	Полученные значения на входе при решении обратной задачи							
Mid(Tk(w)	Tk(w)		Tn(w)		Kt(w)		q(w)	
	Значения интервалов		Значения интервалов		Значения интервалов		Значения интервалов	
	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее	Нижнее	Верхнее
51,7	40,7282	62,6532	42,20323	64,9380	1,339111	1,35004	11,556	12,4906

*)Примечание: отклонение от требуемого результата-0,009274.

Максимальное значение выходной температуры газа $T_k(w)$ может быть достигнуто в интервале [47,59986, 69,62324] при входных переменных, интервальные значения которых должны находиться в следующих интервалах:

$$T_n(w) = [49{,}21047,\ 71{,}94533],$$
$$K_t(w)=[1{,}2458768,\ 1{,}2568094],$$
$$q(w)=[11{,}95945,\ 12{,}893277].$$

Результаты решения обратной задачи можно интерпретировать следующим образом:

Заданное среднее значение давления газа на выходе $Mid(P_k(w)=42$ может быть достигнуто при отклонении равном 0,001237, что соответствует значению $P_k(w)$= [35,1642, 48,8410], при входных значениях:

$$P_n(w)=[47{,}339,\ 54{,}3431],$$
$$q(w)=[11{,}85846,\ 12{,}7922],$$
$$E(w)=[0{,}9399,\ 0{,}94030].$$

Заданное среднее значение температуры газа на выходе $Mid(T_k(w)=51{,}7$ может быть достигнуто при отклонении равном 0,009274, что соответствует значению $T_k(w)$= [40,7282, 62,6532], при входных значениях:

$$T_n(w)=[42{,}20323,\ 64{,}9380],$$
$$K_t(w)=[1{,}339111,\ 1{,}35004],$$
$$q(w)=[11{,}556,\ 12{,}4906].$$

Учитывая зависимость результатов интервальных вычислений от формы представления результатов, на что обращено внимание в работе [6], выражения (39) – (41) представлены в виде, дающим наименьший интервал для полученного результата.

Выводы

1. Поставлены прямая и обратная задача решения системы нелинейных уравнений, в которой все входящие в её состав элементы заданы в интервальном виде.

2. Показано, что результаты решения прямой и обратной задачи можно использовать для анализа и синтеза нелинейных систем при известных воздействиях и реакциях системы на эти воздействия.

3. Предложен алгоритм решения прямой и обратной задачи, основанный на методе исследования пространства параметров.

4. Применение метода показано на примере задачи анализа и синтеза моделирования квазистационарного режима транспорта природного газа по участку трубопровода.

Список литературы

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First edition. – ISO, Switzerland, 1993.

2. ДСТУ-Н РМГ 43:2006 Метрологія. Застосування «Руководства по выражению неопределенности измерений» (РМГ 43:2001).

3. Поджаренко В.О. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності: Навчальний посібник. [Текст] / В.О. Поджаренко, О.М. Васілевський, В.Ю. Кучерук. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 158 с.

4. Захаров И.П. Теория неопределённости в измерениях [Текст] / И.П. Захаров, В.Д. Кукуш. – Х.: Консум, 2002. – 256 с.

5. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. [Текст] / А.Н. Крылов. – Л.: Изд. АН СССР, 1993. – 541 с.

6. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир,1987. – 360с.

7. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях [Текст] /А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Изд. ТГУ, 2000. – 352 с.

8. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ [Текст] / С.П. Шарый. – Новосибирск: Издательство «XYZ», 2010. – 601 с.

9. Жуковская О.А. Исследование нестандартных интервальных арифметических операций [Текст] / О.А. Жуковская // Системные исследования и информационные технологии. – 2005. – №2. – С. 106-116.

10. Дубницький В.Ю. Використання нестандартних інтервальних операцій для зменшення невизначеності у процесі виконання фінансових розрахунків [Текст] / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилін // Вісник університету банківської справи Національного банку України. – 2014. – № 1 (19). – С. 255-260.

11. Дубницький В.Ю. Порівняльний аналіз результатів планування нормативів банківської безпеки засобами класичної та нестандартної арифметики [Текст] / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилін // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2014. – № 5 (69). – С. 29-33.

12. Дубницкий В.Ю. Решение обратной задачи интервального анализа поисковым методом [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобылин // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. – 2014. – № 1131. – С. 54-72.

13. Дубницкий В.Ю. Решение прямой и обратной задачи для системы линейных алгебраических уравнений с интервально заданными характеристиками [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобылин // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2014. – Вип.6 (122). – С. 3-8.

14. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями [Текст] / И.М. Соболь, Р.Б. Статников. – М.: Дрофа, 2006. – 175 с.

15. Новицкий Н.Н. Трубопроводные системы энергетики: математическое моделирование и оптимизация [Текст] / Н.Н. Новицкий, М.Г. Сухарев, А.Д. Тевяшев и др. – Новосибирск: Наука, 2010. – 419 с.

16. Тевяшев А.Д. Стохастические модели и методы оптимизации режимов работы газотранспортных систем [Текст] / А.Д. Тевяшев // Технологический аудит и резервы производства. – 2013. – №6/4. – С. 49-51.

17. Тевяшев А.Д. Статистический анализ свойств стохастической модели квазистационарных режимов транспорта и распределения природного газа в газотранспортных системах [Текст] / А.Д. Тевяшев, Ю.С. Асаенко // 19-я Международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии» ИСТ-2013. – С. 37.

Поступила в редколлегию 4.03.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.А. Кучук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ПРЯМА І ЗВОРОТНА ЗАДАЧА ПРОЕКТУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ З ПОЧАТКОВИМИ ДАНИМИ, ЩО МАЮТЬ НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ ТИПУ В

В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилін, А.Д. Тевяшев

Поставлена пряма і зворотна задача розв'язання системи нелінійних рівнянь, в якій всі вхідні елементи, що входять до її складу, задано в інтервальному вигляді. Показано, що результати розв'язання прямої і зворотної задачі можна використовувати для аналізу і синтезу нелінійних систем при відомих впливах і реакціях системи на ці дії. Запропоновано алгоритм розв'язання прямої і зворотної задачі, заснований на методі дослідження простору параметрів. Застосування методу показано на прикладі задачі аналізу і синтезу моделювання квазістаціонарного режиму транспорту природного газу по ділянці трубопроводу.

Ключові слова: *системи нелінійних рівнянь, пряма задача розв'язання системи нелінійних рівнянь, зворотна задача розв'язання системи нелінійних рівнянь, інтервальний аналіз, нестандартний інтервальний аналіз, метод дослідження простору параметрі, невизначеність вимірювань, квазістаціонарний режим транспорту природного газу по ділянці трубопроводу.*

DIRECT AND INVERSE DESIGN PROBLEM OF TECHNICAL SYSTEMS WITH INITIAL DATA HAVING B TYPE UNCERTAINTY

V.Yu. Dubnitskiy, A.M. Kobylin, A.D. Teviashev

A direct and inverse problem set for solution of a system on non-linear equations where all component elements were assigned in interval form. The results of dolution of direct and inverse problem were shown to be capable of usage for analysis and synthesis of non-linear systems under known actions and system responses to such actions. An algorithm proposed for solution of direct and inverse problem based on parameter space research method. Application of the method shown on the example of quasi-stationary mode of natural gas transportation along a pipeline section.

Keywords: *systems of non-linear equations, direct problem of solving a system of non-linear equations, interval analysis, non-standard interval analysis, parameter space research method, uncertainty of measurement, quasi-stationary mode of natural gas transportation along a pipeline section.*