

Обробка інформації в складних технічних системах

УДК 621.396.96.095.4:528.8.04-047.27

В.К. Волосюк¹, В.В. Павликов¹, Е.Н. Тимощук²

¹ *Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*

² *Киевская государственная академия водного транспорта
имени гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Киев*

ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНО-ВОЛНОВЫХ V_F -ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ ПОЛЕЙ

В физико-алгоритмической трактовке обоснованы возможности технической реализации математических V_F -преобразований как алгоритмов спектрально-волнового анализа и пространственно-временной обработки сверхширокополосных полей. V_F -преобразования обратимы и не требуют выполнения условий пространственно-временной узкополосности (квазимонохроматического приближения). На основе исследования этих преобразований рассмотрены характеристики направленности сверхширокополосных антенных систем, определяющие их разрешающую способность по угловым координатам при восстановлении изображений пространственно-протяженных источников радиоизлучения.

Ключевые слова: V_F -преобразования, сверхширокополосные поля, пространственно-временная обработка сигналов.

Введение

Применительно к решению нового актуального класса задач оптимальной пространственно-временной обработки широкополосных и сверхширокополосных полей в данной статье рассмотрены и исследованы возможности физической реализации взаимно-обратимых V_F - и V_F^{-1} -преобразований [1, 2].

Преобразования V_F позволяют анализировать волновые поля в зоне Фраунгофера. Их введение позволяет снять проблему применимости классической теоремы Ван Циттерта-Цернике при обработке сверхширокополосных полей при решении задач радиолокации, радиоастрономии и дистанционного зондирования. Эта проблема связана с тем, что классические преобразования Фурье, применимые для анализа узкополосных пространственно-временных полей и требующие выполнения условия пространственно-временной узкополосности (ПВУ) [3], называемого также квазимонохроматическим приближением (КМП), [4], не позволяют в необходимой степени выполнить анализ и соответствующую обработку сверхширокополосных полей в связи с невозможностью разделения временных и пространственных частот. В работах [1, 2] основное внимание уделено математическим свойствам преобразований.

Целью данной работы является рассмотрение, исследование и обоснование возможностей технической реализации этих преобразований для решения задач спектрально-волнового анализа и пространственно-временной обработки сверхширокополосных сигналов.

1. V_F -преобразования как математический аппарат анализа сверхширокополосных пространственно-временных сигналов в зоне Фраунгофера

Применимые для анализа полей в дальней зоне Фраунгофера преобразования V_F , V_F^{-1} имеют вид [1]:

$$f^{-2}c^2\dot{A}(\bar{\vartheta}, f) = V_F\{s(\bar{r}', t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int s(\bar{r}', t) \exp\{-j2\pi f(t \pm c^{-1}\bar{\vartheta}\bar{r}')\} dt d\bar{r}', \quad (1)$$

$$s(\bar{r}', t) = V_F^{-1}\{\dot{A}(\bar{\vartheta}, f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int \dot{A}(\bar{\vartheta}, f) \exp\{j2\pi f[t \pm c^{-1}\bar{\vartheta}\bar{r}']\} df d\bar{\vartheta}, \quad (2)$$

где $V_F\{\cdot\}$, $V_F^{-1}\{\cdot\}$ – операторы прямого и обратного преобразования Волосюка.

Поясним физический смысл этих преобразований. Для этого рассмотрим геометрию задачи, пока-

занную на рис. 1. Здесь введены следующие обозначения: $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f)$ – спектральная плотность комплексной амплитуды по временным частотам f и пространственным переменным $\bar{\vartheta}$; $s(\vec{r}', t)$ – поле в области его регистрации D' , зависящее от времени t и пространственных переменных $\vec{r}' = (x', y') \in D'$. В качестве пространственных переменных $\bar{\vartheta}$ рассматриваются направляющие косинусы $\bar{\vartheta}(\vec{r}) = (\vartheta_x = \cos\theta_x, \vartheta_y = \cos\theta_y)$, характеризующие угловые положения элементов протяженных источников излучения или отражения (рассеивания) электромагнитных волн. В связи с этим в дальнейшем функцию $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f)$ будем называть спектрально-угловой (спектрально-волновой) плотностью комплексной амплитуды, являющейся многомерным спектральным V_F -образом пространственно-временного сигнала (поля) $s(\vec{r}', t)$. Несмотря на то, что в реальных физических задачах областью определения функции $s(\vec{r}', t)$ являются пространственный и временной интервалы регистрации поля $\vec{r}' = (x', y') \in D'$, $t \in (0, T)$, а функции $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f)$ – круг $\bar{\vartheta} \in (\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 \leq 1)$, формально распространим пределы интегрирования до бесконечности, полагая, что эти функции за пределами областей их определения равны нулю.

В классическом представлении через базисные функции – комплексные экспоненты, V_F -преобразования не являются преобразованиями Фурье, т.к. переменные f и $\bar{\vartheta}$, соответствующие временным и пространственным частотам, как сомножители неразделимы.

Однако во многом свойства преобразований V_F подобны свойствам традиционных преобразований Фурье и их можно рассматривать как обобщения последних, применимые для анализа сверхширокополосных полей.

В преобразованиях (1), (2) с одной стороны переменные $\bar{\vartheta}(\vec{r})$ и \vec{r} характеризуют пространственное положение излучающих элементов. С другой, являясь аргументами спектральных плотностей комплексных амплитуд излучения, эти переменные пропорциональны пространственным частотам полей $s(\vec{r}', t)$ и содержащихся в них волн по соответствующим переменным.

Функции $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f) \exp\{j2\pi ft\} d\vec{r} d\bar{\vartheta}$ характеризует излучающую способность отдельных пространственных элементов $d\vec{r} d\bar{\vartheta}$ исследуемого пространственно-протяженного источника.

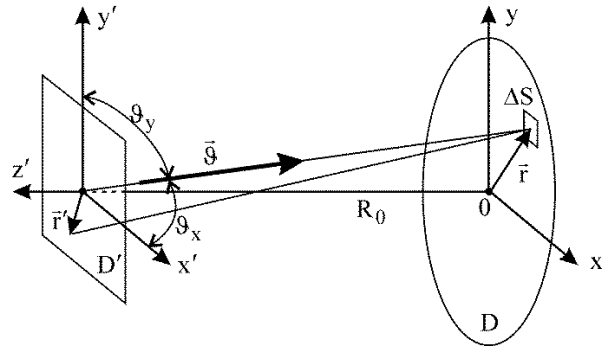


Рис. 1. К пояснению физической сущности V_F -преобразований

Поля, рассеянные случайно-неровными поверхностями а также поля радиотеплового излучения пространственно-протяженных объектов являются случайными. Очевидно, что и процессы $s(\vec{r}', t)$ в области наблюдения D' также являются случайными. Можно показать на примерах спектрального анализа стационарных случайных процессов, что спектральные составляющие поля $s(\vec{r}', t)$ некоррелированы на различных частотах f . Во многих случаях, особенно для радиотеплового излучения, спектральные плотности $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f)$ также некоррелированы при различных значениях переменных $\bar{\vartheta}$, т.е.

$$\begin{aligned} \langle \dot{A}(\bar{\vartheta}_1, f_1) \dot{A}^*(\bar{\vartheta}_2, f_2) \rangle &= \\ &= B(\bar{\vartheta}_1, f_1) \delta(\bar{\vartheta}_1 - \bar{\vartheta}_2) \delta(f_1 - f_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ – оператор статистического усреднения; $B(\bar{\vartheta}, f)$ – спектральная плотность мощности поля $s(\vec{r}', t)$ (спектральная яркость протяженного источника излучения). Соотношение (3) характерно для статистически стационарных во времени и однородных в пространстве случайных процессов. Из этих соотношений и рассмотренных преобразований следуют теоремы, которые можно рассматривать как обобщения теоремы Ван Циттерта-Цернике, применимые для математического анализа и исследований случайных сверхширокополосных полей. Классическая теорема Ван Циттерта-Цернике [4, 5], предполагает выполнение условий ПВУ (КМП).

На основе результатов и выводов теории Карунена-Лоэва об ортогональных разложениях случайных процессов и в дополнение к спектрально-корреляционным теоремам Хинчина-Винера и Ван Циттерта-Цернике рассмотрим следующие теоремы.

Теорема 1. Эта теорема утверждает, что корреляционная функция $R(\vec{r}', \tau) = \langle s(\vec{r}', t) s(\vec{r}' \pm \vec{r}', t \pm \tau) \rangle$ стационарного и однородного процесса $s(\vec{r}', t)$ и его спектральная плотность мощности $B(\bar{\vartheta}, f)$ связаны между собой преобразованиями V_F :

$$f^{-2}c^2B(\bar{\vartheta}, f) = V_F \{R(\bar{\rho}', \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\bar{\rho}', \tau) \exp\{-j2\pi f(\tau + c^{-1}\bar{\vartheta}\bar{\rho}')\} d\tau d\bar{\rho}', \quad (4)$$

$$R(\bar{\rho}', \tau) = V_F^{-1} \{B(\bar{\vartheta}, f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(f, \bar{\vartheta}) \exp\{j2\pi f(\tau + c^{-1}\bar{\vartheta}\bar{\rho}')\} df d\bar{\vartheta}. \quad (5)$$

Правую часть формулы (5) получаем непосредственной подстановкой в формулу для корреляционной функции $\langle s(\bar{r}', t) s(\bar{r}' \pm \bar{\rho}', t \pm \tau) \rangle$ правой части выражения (2) с учетом равенства (3). Выражение (4) получим, применив к (5) преобразование V_F и учитывая следующие равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j2\pi(f - f_1)\tau + c^{-1}(f\bar{\vartheta} - f_1\bar{\vartheta}_1) \cdot \bar{\rho}'\} d\tau d\bar{\rho}' = c^2 f^{-2} \delta(f - f_1) \delta(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_1), \quad (6)$$

$$\delta(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_1) = \delta(\vartheta_x - \vartheta_{x1}) \delta(\vartheta_y - \vartheta_{y1}).$$

Первое равенство в (6) получаем из интегрального представления дельта-функции

$$\delta(x - x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi(x-x_1)\tau} d\tau. \quad (7)$$

В (4), (5) спектральная плотность мощности $B(\bar{\vartheta}, f)$ является двухсторонней $f \in (-\infty, \infty)$ и четной функцией f (как и в теории спектральных преобразований случайных функций одного переменного t).

Теорема 2. Эта теорема эквивалентна первой теореме, но касается комплексных аналитических процессов. Комплексный аналитический процесс имеет вид:

$$\dot{s}(\bar{r}', t) = s(\bar{r}', t) + js_{\perp}(\bar{r}', t), \quad (8)$$

где $s_{\perp}(\bar{r}', t)$ – сопряженный процесс, связанный по переменной t с процессом $s(\bar{r}', t)$ преобразованием Гильберта. Спектральная плотность комплексного процесса $\dot{s}(\bar{r}', t)$ удвоена по абсолютному значению в положительной области переменной f и равна нулю при $f < 0$, т.е. является односторонней. Тогда

$$\dot{s}(\bar{r}', t) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\dot{A}(\bar{\vartheta}, f) \exp\{j2\pi f[t + c^{-1}\bar{\vartheta}\bar{r}']\} d\bar{\vartheta} df. \quad (9)$$

Учтем, что для аналитического процесса $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f) = 0$ при $f < 0$. Тогда формально можно распространить нижний предел интегрирования по переменной f на $-\infty$ и записать

$$\dot{s}(\bar{r}', t) = V_F^{-1} \{2\dot{A}(\bar{\vartheta}, f)\}. \quad (10)$$

Умножив обе части (9) на сопряженную функцию $\exp\{-j2\pi f_1(\tau + c^{-1}\bar{\vartheta}_1\bar{r}')\}$, интегрируя по переменным \bar{r}' и t в бесконечных пределах и, учитывая (6), получим

$$V_F \{\dot{s}(\bar{r}', t)\} = 2f^{-2}c^2 \cdot \dot{A}(\bar{\vartheta}, f). \quad (11)$$

Таким образом, комплексный аналитический процесс $\dot{s}(\bar{r}', t)$ также связан со своей спектральной плотностью $(2\dot{A}(\bar{\vartheta}, f), f > 0)$ V_F -преобразованиями.

Формулируется теорема 2 следующим образом: комплексная функция когерентности $\dot{\Gamma}(\bar{\rho}, f)$ (взаимная корреляционная функция комплексно-сопряженных аналитических стационарных и однородных процессов) $\dot{s}(\bar{r}', t)$, $\dot{s}^*(\bar{r}', t)$ и односторонняя (равная нулю при $f < 0$) спектральная плотность мощности $B(\bar{\vartheta}, f)$ связаны между собой V_F -преобразованиями

$$\dot{\Gamma}(\bar{\rho}', \tau) = \langle \dot{s}(\bar{r}'_1, t_1) \dot{s}^*(\bar{r}'_2, t_2) \rangle = V_F^{-1} \{4B(\bar{\vartheta}, f)\}, \quad (12)$$

$$f^{-2}c^2 4B(\bar{\vartheta}, f) = V_F \{\dot{\Gamma}(\bar{\rho}', \tau)\}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Для получения первой формулы (12) необходимо в ее левую часть подставить (10) и учесть равенство (3). Для получения второй формулы (12) необходимо к первой применить V_F -преобразование и учесть равенство (6). Также следует учесть, что односторонняя (т.е. определенная для $f > 0$) спектрально-угловая плотность комплексной амплитуды $\dot{A}(f_1, \bar{\vartheta}_1)$ комплексного аналитического процесса $\dot{s}(\bar{r}', t) = s(\bar{r}', t) + js_{\perp}(\bar{r}', t)$ удвоена по амплитуде.

Эти результаты обобщают теорему Ван Циттерта-Цернике для анализа широкополосного излучения в дальней зоне Фраунгофера. Классические варианты этой теоремы следуют из рассмотренных выше теорем при выполнении условий ПВУ (КМП). Эти условия выполняются для узкополосных сигналов. Их спектр расположен в окрестности средней частоты f_0 и его ширина $\Delta f \ll f_0$.

2. Учёт условия ПВУ (КМП)

Представим условие ПВУ (КМП) в виде [3, 4]:

$$\frac{\Delta F_{ef} \bar{\vartheta}_{\max} \bar{r}'_{\max}}{c} \ll 1, \quad (13)$$

где ΔF_{ef} – эффективная полоса частот, занимаемая сигналом, $\bar{\vartheta}_{\max}$ – направление, соответствующее максимальному угловому размеру протяженного источника излучения, \bar{r}'_{\max} – координата, соответствующая максимальному размеру апертуры.

Для аналитического сигнала

$$B(f, \bar{\vartheta}) = \begin{cases} B(f - f_0, \bar{\vartheta}), & f < 0, \\ 0, & f > 0. \end{cases} \quad (14)$$

В этом случае (при одностороннем спектре) в квазимонохроматическом приближении допустимо при скалярном произведении пространственных переменных $\bar{\vartheta}$ $\bar{\rho}'$ вместо сомножителя f поставить сомножитель f_0 .

Один из классических вариантов теоремы Ван Циттерта-Цернике для дальней зоны Фраунгофера, предполагающий выполнение условия приближения ПВУ, связывает угловую плотность интенсивности (УПИ) $I(\bar{\vartheta})$ (интегральную по частоте яркость $B(\bar{\vartheta})$)

$$I(\bar{\vartheta}) = B(\bar{\vartheta}) = \int_{-\infty}^{\infty} 4B(f, \bar{\vartheta}) df, \quad (15)$$

и комплексную функцию пространственной когерентности $\dot{\Gamma}(\bar{\rho}', 0)$ двумерным преобразованием Фурье. Для доказательства подставим в (12) значения переменных $\tau = 0$ и $f c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}' \approx f_0 c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}'$

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(\bar{\rho}', 0) &= V_F^{-1} \left\{ 4B(f, \bar{\vartheta}) \right\}_{\tau=0} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 4B(f, \bar{\vartheta}) \exp \left\{ j2\pi f (\tau + c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}') \right\} df d\bar{\vartheta} \Big|_{\tau=0} \approx \\ &\approx \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty(F)}^{\infty} 4B(f, \bar{\vartheta}) df \right\} \exp \left(j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}' \right) d\bar{\vartheta} = \\ &= \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} I(\bar{\vartheta}) \exp \left(j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}' \right) d\bar{\vartheta}, \end{aligned} \quad (16)$$

т.е. комплексная функция пространственной когерентности

$$\dot{\Gamma}(\bar{\rho}', 0) = \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} I(\bar{\vartheta}) \exp \left(j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}' \right) d\bar{\vartheta} \quad (17)$$

связана с угловой плотностью интенсивности $I(\bar{\vartheta})$ обычным обратным пространственным двумерным преобразованием Фурье. Очевидно, что

$$\left(\frac{f_0}{c} \right)^{-2} I(\bar{\vartheta}) = \int_{-\infty(D')}^{\infty} \dot{\Gamma}(0, \bar{\rho}') \exp \left(-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}' \right) d\bar{\rho}'. \quad (18)$$

Таким образом, комплексная пространственная функция когерентности и угловая плотность интенсивности (интегральная яркость) определяются как:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(0, \bar{\rho}') &= F^{-1} \left\{ I(\bar{\vartheta}) \right\} = \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} I(\bar{\vartheta}) \exp \left(j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}' \right) d\bar{\vartheta}, \\ \left(f_0 / c \right)^{-2} I(\bar{\vartheta}) &= F \left\{ \dot{\Gamma}(0, \bar{\rho}') \right\} = \\ &= \int_{-\infty(D')}^{\infty} \dot{\Gamma}(0, \bar{\rho}') \exp \left(-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\vartheta} \bar{\rho}' \right) d\bar{\rho}'. \end{aligned} \quad (19)$$

Эти формулы соответствуют классической теореме Ван Циттерта-Цернике форме.

Теоремы 1, 2 обобщают теорему Ван Циттерта-Цернике и применимы для спектрально-корреляционного анализа широкополосного и сверхширокополосного излучения с применением как прямых V_F -, так и обратных, V_F^{-1} -преобразований.

3. Физико-алгоритмическое описание V_F -преобразований как математического инструмента, обеспечивающего техническую обработку сверхширокополосных полей

Рассмотренные преобразования в физико-алгоритмической трактовке содержат основные операции спектрального анализа полей в областях временных и пространственных частот, заключающиеся в соответствующей фильтрации во времени и фокусировке (диаграммообразовании) пространственно-распределенных систем на заданные элементы (участки) исследуемых протяженных источников излучаемых или рассеянных сигналов. Так прямое V_F -преобразование пространственно-временного сигнала $s(t, \bar{r}')$ при его физической реализации, например, с помощью антенных решеток или других регистрирующих средств, позволяет восстановить спектрально-угловую плотность комплексной амплитуды $\dot{A}(f, \bar{\vartheta})$, которая на каждой частоте f после визуализации ее вещественной и мнимой частей представляет собой комплексное изображение источника излучения в зоне Фраунгофера. То же V_F -преобразование, примененное к комплексной функции когерентности (12) позволяет в виде соответствующих изображений восстановить спектральную яркость $B(f, \bar{\vartheta})$.

Рассмотрим более подробно физическую сущность этих преобразований, ценным достоинством которых, как отмечалось, является возможность работы со сверхширокополосными полями.

Формула $c^2 f^{-2} \dot{A}(\bar{\vartheta}, f) = V_F \{ s(\bar{r}', t) \}$ в ее физической интерпретации и в соответствии с выражениями (1), (2) требует для конкретно заданных переменных f_0 и $\bar{\vartheta}_0$ умножения принятого поля $s(\bar{r}', t)$ на функцию

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -j2\pi f_0 \left(t + \frac{\bar{\vartheta}_0 \bar{r}'}{c} \right) \right\} &= \\ = \exp(-j2\pi f_0 t) \times \exp \left(-j2\pi f_0 \cdot \bar{\vartheta}_0 \bar{r}' / c \right) \end{aligned} \quad (20)$$

и последующего интегрирования по временной переменной t и пространственным координатам \vec{r}' ,

$$V_F\{s(\vec{r}', t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\vec{r}', t) \exp\left\{-j2\pi f_0\left(t + c^{-1}\bar{\vartheta}_0\vec{r}'\right)\right\} dt d\vec{r}' =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(\bar{\vartheta}, f) \exp\left\{j2\pi f\left[t + c^{-1}\bar{\vartheta}\vec{r}'\right]\right\} df d\bar{\vartheta} \times$$

$$\times \exp\left\{-j2\pi f_0\left(t + c^{-1}\bar{\vartheta}_0\vec{r}'\right)\right\} dt d\vec{r}' = f^{-2}c^2 \dot{A}(\bar{\vartheta}_0, f_0). \quad (21)$$

Здесь при выводе формулы учтено равенство (6). Первый из сомножителей функции (20) вместе с операцией интегрирования по времени отвечает за временную обработку – фильтрацию, в результате которой выделяется спектральная составляющая поля на заданной частоте f_0 . Эта операция соответствует обычному время-частотному преобразованию Фурье. Второй сомножитель с соответствующим интегрированием по пространственным координатам \vec{r}' обеспечивает фокусировку антенной системы на заданное направление $\bar{\vartheta}_0$. Теоретически интегрирование в бесконечных пределах по переменной \vec{r}' обеспечивает полное восстановление спектральной плотности комплексной амплитуды $\dot{A}(\bar{\vartheta}_0, f_0)$ как функции направлений $\bar{\vartheta}_0$. На каждой конкретной частоте f_0 эта операция соответствует пространственному преобразованию Фурье в его традиционной форме. Однако, как уже отмечалось, в целом V_F -преобразование в силу неразделимости временных и пространственных частот не является многомерным пространственно-временным преобразованием Фурье, но сводится к их последовательному (по временным и пространственным переменным) применению.

Практически интегрирование по времени на конечном интервале $t \in (0, T)$ при временной обработке сигнала эквивалентно его фильтрации в полосовом фильтре с амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)

$$|\dot{K}(j2\pi f)| = \left| \frac{\sin[\pi T(f - f_0)]}{\pi(f - f_0)} \right| = T |\operatorname{sinc}[\pi T(f - f_0)]|. \quad (22)$$

Такой АЧХ соответствует избирательное устройство с полосой $\Delta F \approx 1/T$, которое вырезает из спектра $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f)$ не только спектральную линию $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f_0)$, но и боковые частоты, снижая разрешающую способность спектрального анализа. Далее на заданной частоте сигнала f_0 необходимо построить комплексное изображение $\dot{A}(\bar{\vartheta}, f_0)$. Для этого необходимо выполнить определенные действия по пространственной обработке принятого поля

$s(\vec{r}', t)$. За пространственную обработку в этом простейшем случае отвечает второй сомножитель в (20).

Интегрирование с весом $\exp(-j2\pi f_0 c^{-1} \bar{\vartheta}_0 \vec{r}')$ по пространственным координатам \vec{r}' в ограниченной области восстанавливает функцию $\dot{A}(\bar{\vartheta}_0, f_0)$ по переменной $\bar{\vartheta}_0$ с точностью до сглаживающей ее диаграммы направленности (ДН). ДН является пространственным образом Фурье этой весовой функции, заданной в ограниченной области определения $\vec{r}' \in D'$, которой является апертура антенной системы. Эта ДН имеет максимум в направлении $\bar{\vartheta}_0$. Спектрально-угловая плотность $\dot{A}(\bar{\vartheta}_0, f_0)$ в различных направлениях $\bar{\vartheta}_0$ восстанавливается с пространственной разрешающей способностью, определяемой шириной луча ДН. Для получения соответствующего изображения нужно в каждом направлении $\bar{\vartheta}_0$ сформировать луч ДН путем сканирования или путем параллельного обзора. При параллельном обзоре формируется веер лучей, покрывающих заданный сектор обзора, в котором находится исследуемый пространственно-протяженный объект. В данном случае эта весовая функция

$$i(f_0, \bar{\vartheta}_0, \vec{r}') = \exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\bar{\vartheta}_0 \vec{r}'}{c}\right), \quad (23)$$

определенная в области, занимаемой апертурой антенной системы $\vec{r}' \in D'$, на заданной частоте f_0 и для заданного направления является амплитудно-фазовым распределением (АФР) чувствительности элементов апертуры $d\vec{r}'$. ДН антенной системы находится с помощью пространственного преобразования Фурье от ее АФР

$$\dot{F}(f_0, \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) = \int_{-\infty(D')}^{\infty} i(f_0, \bar{\vartheta}_0, \vec{r}') \exp\left(j2\pi f_0 \frac{\bar{\vartheta}\vec{r}'}{c}\right) d\vec{r}'. \quad (24)$$

Учитывая, что в V_F -преобразовании второй сомножитель в (20) выполняет функцию АФР предполагаемой апертуры, запишем это преобразование в таком виде

$$V_F\{s(\vec{r}', t)\} =$$

$$= \int_{-\infty(D')}^{\infty} \int_{-\infty(T)}^{\infty} s(t, \vec{r}') \exp\left\{-j2\pi f_0\left(t + \frac{\bar{\vartheta}_0\vec{r}'}{c}\right)\right\} dt d\vec{r}' =$$

$$= \int_{-\infty(T)}^{\infty} \exp(-j2\pi f_0 t) dt \int_{-\infty(D')}^{\infty} s(t, \vec{r}') i(f_0, \bar{\vartheta}_0, \vec{r}') d\vec{r}'.$$

Очевидно, что в бесконечных пределах интегрирования

$$V_F\{s(\vec{r}', t)\} = V_F\left\{V_F^{-1}\left\{\dot{A}(\bar{\vartheta}, f)\right\}\right\} = f^{-2}c^2 \dot{A}(\bar{\vartheta}, f). \quad (26)$$

Подставим в (25) в соответствии с (26) выражение (2) для $s(t, \vec{r}')$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty(T)}^{\infty} \exp(-j2\pi f_0 t) \int_{-\infty(D')}^{\infty} i(f_0, \vec{\Theta}_0, \vec{r}') \times \\ & \times \left\{ \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} \int_{-\infty(F)}^{\infty} \dot{A}(f, \vec{\Theta}) \exp \left\{ j2\pi f \left(t + \frac{\vec{\Theta} \vec{r}'}{c} \right) \right\} df d\vec{\Theta} \right\} dt d\vec{r}' = \\ & = \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} \int_{-\infty(F)}^{\infty} \dot{A}(f, \vec{\Theta}) \int_{-\infty(T)}^{\infty} \exp \{ j2\pi (f - f_0) t \} dt \times \\ & \times \int_{-\infty(D')}^{\infty} i(f_0, \vec{\Theta}_0, \vec{r}') \exp \left(j2\pi f \frac{\vec{\Theta} \vec{r}'}{c} \right) d\vec{r}' df d\vec{\Theta}. \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ j2\pi (f - f_0) t \} dt = \delta(f - f_0), \quad (27)$$

запишем выражение (25) в следующем виде

$$\begin{aligned} & V_F \{ s(\vec{r}', t) \} = \\ & = \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} \dot{A}(f_0, \vec{\Theta}) \int_{-\infty(D')}^{\infty} i(f_0, \vec{\Theta}_0, \vec{r}') \exp \left(j2\pi f_0 \frac{\vec{\Theta} \vec{r}'}{c} \right) d\vec{r}' d\vec{\Theta} = (28) \\ & = \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} \dot{A}(f_0, \vec{\Theta}) \dot{F}(f_0, \vec{\Theta} - \vec{\Theta}_0) d\vec{\Theta}. \end{aligned}$$

Свертка комплексного изображения с диаграммой направленности указывает на тот факт, что качество изображения (разрешающая способность) зависит от вида ДН и ее ширины. В бесконечных пределах (гипотетический случай)

$$\begin{aligned} \dot{F}(f_0, \vec{\Theta} - \vec{\Theta}_0) & = \int_{-\infty(D')}^{\infty} \exp \left\{ j2\pi \frac{f_0}{c} (\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_0) \vec{r}' \right\} d\vec{r}' = \\ & = (f_0/c)^{-2} \delta(\vartheta_x - \vartheta_{0x}) \delta(\vartheta_y - \vartheta_{0y}) = (29) \\ & = (f_0/c)^{-2} \delta(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_0), \end{aligned}$$

и в этом случае – преобразование полностью обратимо, т.е. справедливо равенство (26).

Рассмотрим выражение для ДН в ограниченных пространственных пределах интегрирования, $\vec{r}' \in D'$. Если АФР определено в конечной области наблюдения, например, в простейшем случае в области в виде площади прямоугольной формы

$$\begin{aligned} i(f_0, \vec{\Theta}_0, \vec{r}') & = I(\vec{r}') \exp(-j2\pi \cdot (f_0/c) \cdot \vec{\Theta}_0 \vec{r}'), \\ I(\vec{r}') & = I(x') I(y') = (30) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при } x' \in (-X'/2, X'/2), y' \in (-Y'/2, Y'/2), \\ 0 & \text{при } x' \notin (-X'/2, X'/2), y' \notin (-Y'/2, Y'/2), \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} \dot{F}(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_0) & = \\ & = \int_{-X'/2}^{X'/2} \int_{-Y'/2}^{Y'/2} \exp \left\{ j2\pi \frac{f_0}{c} \left[(\vartheta_x - \vartheta_{0x}) x' + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\vartheta_y - \vartheta_{0y}) y' \right] \right\} dx' dy' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = X' Y' \sin c \left[\pi \frac{f_1}{c} (\vartheta_x - \vartheta_{0x}) X' \right] \times \\ & \times \sin c \left[\pi \frac{f_1}{c} (\vartheta_y - \vartheta_{0y}) Y' \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Разрешающая способность антенной системы по направлениям ϑ_x и ϑ_y определяется шириной ДН (24), например, как полуширина углового расстояния в точках, где она обращается в ноль

$$\begin{aligned} \Delta \vartheta_x & = \vartheta_x - \vartheta_{0x} = \frac{c}{f_0 X'} = \frac{\lambda_0}{X'}, \\ \Delta \vartheta_y & = \vartheta_y - \vartheta_{0y} = \frac{c}{f_0 Y'} = \frac{\lambda_0}{Y'}, \end{aligned} \quad (32)$$

$\lambda_0 = c/f_0$ – длина волны.

Для нахождения соответствующей характеристики разрешения сверхширокополосной антенной системы запишем полный сигнал после фокусировки ее элементов на направление $\vec{\Theta}_0$ с учетом того, что все ее элементы имеют коэффициент передачи $\dot{K}(j2\pi f)$:

$$\begin{aligned} s(t, \vec{\Theta}_0) & = \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} \int_{-\infty(F)}^{\infty} \int_{-\infty(D')}^{\infty} \dot{K}(j2\pi f) \dot{I}(f, \vec{r}', \vec{\Theta}_0) \times \\ & \times \dot{A}(f, \vec{\Theta}) \exp \left\{ j2\pi f \left(t + \frac{\vec{\Theta} \vec{r}'}{c} \right) \right\} d\vec{r}' df d\vec{\Theta} = (33) \\ & = \int_{-\infty(F)}^{\infty} \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty} \dot{K}(j2\pi f) \dot{F}(f, \vec{\Theta} - \vec{\Theta}_0) \times \\ & \times \dot{A}(f, \vec{\Theta}) \exp \{ j2\pi f t \} df d\vec{\Theta}. \end{aligned}$$

Спектрально-угловая плотность комплексной амплитуды, характеризующая сверхширокополосное излучение точечного источника, равна:

$$\dot{A}(f, \vec{\Theta}) = \dot{A}(f) \delta(\vec{\Theta} - \vec{\Theta}_1),$$

где $\vec{\Theta}_1$ – угловое положение источника излучения.

Тогда формула (33) примет вид

$$\begin{aligned} s(t, \vec{\Theta}_1 - \vec{\Theta}_0) & = \int_{-\infty(F)}^{\infty} \int_{-\infty(D')}^{\infty} \dot{K}(j2\pi f) \dot{I}(f, \vec{r}', \vec{\Theta}_0) \times \\ & \times \dot{A}(f) \exp \left\{ j2\pi f \left(t + \frac{\vec{\Theta}_1 \vec{r}'}{c} \right) \right\} d\vec{r}' df = (34) \\ & = \int_{-\infty(F)}^{\infty} \dot{K}(j2\pi f) \dot{F}(f, \vec{\Theta}_1 - \vec{\Theta}_0) \dot{A}(f) \exp \{ j2\pi f t \} df. \end{aligned}$$

Здесь сигнал $s(t, \vec{\Theta}_1 - \vec{\Theta}_0)$ – функция времени и функционал спектра $\dot{A}(f)$. Если функцию $\dot{A}(f) \exp \{ j2\pi f t \}$ считать характеристикой источника излучения и исключить ее из рассмотрения (или принять $\dot{A}(f) = 1$ во всей полосе частот $f \in (-\infty, \infty)$), то в когерентной трактовке диаграммой направленности

когерентної сверхширокополосної антенної системи, визначаючої її розрешальну здатність, можна назвати інтеграл

$$\dot{F}_{\text{СШП}}(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) = \int_{-\infty(F)}^{\infty} \dot{K}(j2\pi f) \dot{F}(f, \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) df. \quad (35)$$

На дискретній СШП мережі частот

$$\dot{F}_{\text{СШП}}(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0) = \sum_{i=1}^N \dot{K}(j2\pi f_i) \dot{F}(f_i, \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0). \quad (36)$$

В загальному випадку розрешальна здатність визначення положення елемента випромінювання залежить не тільки від смуги частот, заданої коефіцієнтом передачі $\dot{K}(j2\pi f)$, але й від ширини та форми спектра $\dot{A}(f)$.

Висновки

Показано, що найбільш прийнятним математичним апаратом аналізу сверхширокополосних просторово-часових сигналів (полів) відповідно в дальній зоні Фраунгофера є апарат V_F - і V_F^{-1} -перетворень. Ці перетворення мають властивості багатовимірних перетворень Фур'є, але не є такими в традиційній формі їх описання, т.к. в них незрозумілими як множники часові та просторові частоти.

Важливою їх особливістю є те, що вони на відміну від традиційних багатовимірних перетворень Фур'є та Френеля не потребують виконання умов просторово-часової узкополосності (квазімонохроматичного наближення) і дозволяють аналізувати просторово-часові сигнали з будь-якою широкосмуговістю.

Розглянуті теореми про зв'язок V_F -перетвореннями функцій когерентності полів з спек-

тральними яркостями випромінювання, узагальнюючі теорему Ван Циттерта-Церника на випадок аналізу сверхширокополосних полів. Дано фізико-алгоритмічне описання математичних V_F -перетворень з точки зору їх застосування як алгоритмів обробки сверхширокополосних полів. Особливо розглянуті основні принципи часової та просторової фільтрації поля в нескінченних та обмежених інтервалах часу та простору, а також відзначені основні фактори, що впливають на форму діаграми направленості та розрешальну здатність відновлення спектрально-кутової густоти комплексної амплітуди СШП просторово-часового сигналу.

Список літератури

1. Волосяк В.К. Перетворення полів та їх кореляційні функції в спектральні характеристики протяжених джерел широкополосного випромінювання / В.К. Волосяк // *Изв. вузів. Сер. Радиоелектроника*. – 1993. – Т. 36, № 6. – С. 27-30.
2. Волосяк В.К. Спектральні перетворення широкополосних полів та їх кореляційні характеристики. Наближення Френеля / В.К. Волосяк // *Изв. вузів. Сер. Радиоелектроника*. – 1994. – Т. 37, № 8. – С. 58-66.
3. Фалькович С.Е. Оптиміальний прийом просторово-часових сигналів в радіоканалах з розсіянням / С.Е. Фалькович, В.И. Пономарев, Ю.В. Шварко. – М.: Радио та зв'язь, 1989. – 224 с.
4. Побудова зображень в астрономії за функціями когерентності / Під ред. К. ван Схонвелда. – М.: Мир, 1982. – 318 с.
5. Томпсон Р. Інтерферометрія та синтез в радіоастрономії / Р. Томпсон, Дж. Моран, Дж. Свенсон. – М.: Мир, 1989. – 668 с.

Надійшла до редакції 22.06.2016

Рецензент: д-р техн. наук проф. І.В. Барішев, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

ОБҐРУНТУВАННЯ ЗАСТОСОВНОСТІ СПЕКТРАЛЬНО-ХВИЛЬОВИХ V_F -ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ ФІЗИЧНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЇ ОБРОБКИ НАДШИРОКОСМУГОВІ ПОЛІВ

В.К. Волосяк, В.В. Павліков, О.М. Тимошук

У фізико-алгоритмічному трактуванні обґрунтовані можливості технічної реалізації математичних V_F -перетворень як алгоритмів спектрально-хвильового аналізу та просторово-часової обробки надширокополосних полів. V_F -перетворення зворотні та не потребують виконання умов просторово-часової вузькосмуговості (квазімонохроматичного наближення). На основі дослідження цих перетворень розглянуті характеристики спрямованості надширокополосних антенних систем, що визначають їх роздільну здатність по кутових координатах при відновленні зображень просторово-протяжених джерел радіовипромінювання.

Ключові слова: V_F -перетворення, надширокополосні поля, просторово-часова обробка сигналів.

JUSTIFICATION OF THE APPLICABILITY OF SPECTRAL-WAVE V_F -TRANSFORMATIONS FOR THE PHYSICAL REALIZATION OF SPACE-TEMPORAL PROCESSING OF ULTRAWIDEBAND FIELDS

V.K. Volosyuk, V.V. Pavlikov, O.M. Tymoshchuk

The physical interpretation of the possibility of technical realization of the V_F -transformations for spectral wave analysis, and space-temporal processing of ultrawideband fields is given. V_F -transformations are reversible and do not require the conditions of quasi-monochromatic approximation (so called narrowband in space-time domains). Based on the study of these transformations directional characteristics of ultra-wideband antenna systems are considered. It determines their resolution by angular coordinates in the problems of spatially extended objects imaging.

Keywords: V_F -transformation, ultra-wideband fields, space-temporal signal processing.