

УДК 25.040.01; 43.040.30

**Бердник Ю. М., Катін П. Ю., Сопов О. О.**

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕЛЕЙНОГО КЕРУВАННЯ НАГРІВАЧЕМ У ВИГЛЯДІ СКРИПТА МАТЛАВ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ НА ОСНОВІ МІКРОКОНТРОЛЕРА**

*У статті подано результати отримання математичної моделі релейного способу керування нагрівачем автоматизованої системи виготовлення харчових продуктів методом випарювання вихідної сировини. На основі цієї моделі отримано код для програмного пакета Matlab для обчислення помилки встановлення температури регулятором. Можливість аналітичного обчислення помилки дає змогу передбачити максимальну й мінімальну температури сировини. За рахунок цього відбувається запобігання перегріванню сировини й забезпечується якість готової продукції. Крім того, отримані дані може бути використано для реалізації керування з використанням мікроконтролера. Достовірність отриманих результатів підтверджено в результаті тестових обчислень.*

**Ключові слова:** автоматизовані й автоматичні системи виготовлення харчових продуктів, релейне керування, мікроконтролер, математична модель, диференціальне рівняння, скрипт Matlab.

**Постановка проблеми в загальному вигляді.** Сучасні автоматизовані й автоматичні системи виготовлення харчових продуктів (АСВХП) методом випарювання під зниженим тиском потребують підтримки заданого температурного режиму. Особливо це стосується виготовлення джемів, варення, повидла тощо. Перевищення температури може призвести до зменшення вмісту вітамінів, корисних речовин і нарешті до псування готової продукції. Наразі є багато варіантів автоматичного регулювання температурного режиму на основі мікроконтролерів. Найпростішим із них є спосіб релейного керування нагріванням (РКН) (on-off control), актуальний у простих і недорогих АСВХП у системах під керуванням мікроконтролерів [1–3]. Важливим параметром, що впливає на якість продукції, є абсолютна похибка встановлення температури, обумовлена наявністю допусків і похибок в елементах АСВХП і особливостями РКН. Для її визначення у практичних системах з РКН проведено аналітичні викладення й числові експерименти для підтвердження отриманих результатів.

**Аналіз останніх публікацій** засвідчує, що виготовлення харчових продуктів методом випарювання з використанням АСВХП є актуальним [1–3]. Для розроблення й досліджень цього напрямку можна використовувати математичні моделі, починаючи від складних [4] і закінчуючи такими, що можуть описати логіку роботи АСВХП [5] й процеси, які відбуваються в робочих резервуарах АСВХП [6–7]. Наразі розв'язано задачу побудови аналітичної моделі автоматичного підтримання заданого температурного режиму в АСВХП з РКН за зниженого тиску [7]. При цьому основним недоліком РКН є наявність помилки (перегулювання), яку потрібно врахувати для забезпечення якості готової продукції. Отже, потрібно отримати аналітичну модель і застосувати її для обчислення температури, з урахуванням помилок в елементах системи керування АСВХП, що призводять до помилок установлення температури.

Отримано розв'язки цієї задачі для систем з РКН у загальному вигляді або частково без урахування помилки, визначеної допусками в системі керування АСВХП [7]. Далі називатимемо цю помилку інструментальною. Саме вона призводить до суттєвого відхилення температури від номінального значення й може призвести до зниження якості готової продукції у АСВХП. Крім того, для підвищення якості готової продукції доцільно проводити керування температурним режимом з використанням мікроконтролерів, зокрема й з

використанням моделювання.

Наразі є багато способів спрощення робіт з побудови й використання математичної моделі (ММ) для підтримання заданого температурного режиму [8]. Найвідомішим способом обчислень є використання програмних математичних пакетів, зокрема Matlab [10–11]. У статті для аналітичного визначення похибки встановлення температури, обумовленої допусками елементів АСВХП у системах з РКН й керування процесами з використанням мікроконтролерів, буде отримано математичну модель. Цю модель використано також для побудови скриптів у пакетах Matlab, що дають змогу автоматизувати обчислення інструментальної похибки встановлення температури й використовувати її в подальшому для автоматизованого керування системами на основі мікроконтролерів.

Визначимо **обмеження щодо моделі** й системи АСВХП:

- систему нагрівання АСВХП описано звичайним лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами;
- АСВХП має одну місткість з робочою сировиною для приготування харчових продуктів способом випарювання;
- АСВХП отримує енергію з нагрівача з РКН;
- припускаємо, що сировина в робочій місткості АСВХП перебуває в стані ідеального перемішування [6];
- для отримання загального вигляду первинного результату моделювання вважаємо, що початкова температура сировини дорівнює нулю, сировина не перебуває у стані кипіння.

**Викладення основного матеріалу.** На першому етапі напишемо рівняння фізичних процесів нагрівання в робочій місткості випарювача АСВХП, з урахуванням визначених обмежень. Нехай електричний нагрівач сировини АСВХП за час  $dt$  виділяє теплоту кількістю  $dQ$ :

$$dQ = Pdt,$$

де  $P$  – потужність нагрівача.

Запишемо рівняння теплового балансу в диференціальній формі з урахуванням визначених обмежень, з урахуванням того, що кипіння не відбувається:

$$dQ = dQ_p + dQ_v,$$

де  $dQ_p = cmdT$  – теплота, яка передається рідині за елемент часу  $dt$ ;

$dQ_v = k(T - T_s)dt$  – теплота, яку рідина втрачає за елемент часу  $dt$ .

Тоді з урахуванням уведених познач рівняння матиме вигляд:

$$Pdt = cmdT + k(T - T_s)dt, \quad (1)$$

де

$c$  – питома теплоємність рідини;

$m$  – маса рідини в резервуарі;

$dT$  – приріст температури рідини за елемент часу  $dt$ ;

$k$  – коефіцієнт теплообміну між рідиною й навколишнім середовищем;

$T_s$  – температура навколишнього середовища.

Зробимо звичайні математичні перетворення для приведення рівняння (1) до зручного вигляду й отримаємо:

$$\frac{cm}{k} \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{P}{k} - (T - T_s).$$

Для приведення цього рівняння до канонічного вигляду рівняння системи автоматичного керування введемо такі позначки:

$u = P$  – керівний вплив на вході системи;

$y = T - T_s$  – вихід системи;

$k_p = \frac{1}{k}$  – коефіцієнт підсилення системи;

$\tau_p = \frac{cm}{k}$  – стала часу системи.

Підставивши ці значення у вихідне рівняння, отримаємо таке рівняння:

$$\frac{cm}{k} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{u}{k} - y.$$

Після проведення простих перетворень це рівняння має вигляд:

$$\tau_p \frac{dy}{dt} = k_p u - y. \quad (2)$$

Це звичайне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язок якого в аналітичній формі має вигляд:

$$y = C e^{-\frac{t}{\tau_p}} + k_p u, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Розглянемо систему з двопозиційним регулятором температури РКН у робочій місткості АСВХП, долученого до прямого каналу керування.

Статична характеристика двопозиційного регулятора має такий вигляд:

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_{max} & \text{за } \varepsilon(t) \geq a, \\ \mu_{min} & \text{за } \varepsilon(t) \leq -a, \\ \mu_{max} & \text{за } -a < \varepsilon(t) < a, \frac{d\varepsilon(t)}{dt} < 0, \\ \mu_{min} & \text{за } -a < \varepsilon(t) < a, \frac{d\varepsilon(t)}{dt} > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\varepsilon(t) = \xi(t) - y(t), \quad (5)$$

де  $\mu(t)$  – вихід регулятора;

$\varepsilon(t)$  – помилка системи (абсолютна інструментальна похибка встановлення температури харчової сировини в АСВХП, зумовлена параметрами системи  $a$ );

$\xi(t)$  – завдання (задана температура приготування харчових продуктів);

$y(t)$  – вихід системи керування (поточна температура приготування харчової сировини в робочій місткості АСВХП). Фактично система (4) формально описує процес РКН (on-off control).

Для отримання математичної моделі процесу в робочій системі АСВХП потрібно отримати аналітичне рішення (3) з урахуванням (4). У цьому разі вихідним параметром системи  $y$  з двопозиційним регулятором РКН є температура. Долучений до прямого каналу керування АСВХП двопозиційний регулятор визначає два стани, формалізовані в системі (4): максимальне значення нагрівання й відсутність нагрівання. З урахуванням (2) та (5)

отримаємо розв'язок для кожного інтервалу регулятора РКН в аналітичній формі. Виконуючи елементарні перетворення, отримаємо:

$$y = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{t}{\tau_p}} + k_p u, & 0 \leq t < -\tau_p \cdot \ln \left| \frac{\xi(t)+a-k_p u}{C_1} \right|, \\ C_2 e^{-\frac{t}{\tau_p}} + k_p u, & -\tau_p \cdot \ln \left| \frac{\xi(t)+a-k_p u}{C_1} \right| \leq t < -\tau_p \cdot \ln \left| \frac{\xi(t)-a-k_p u}{C_2} \right|, \\ C_3 e^{-\frac{t}{\tau_p}} + k_p u, & -\tau_p \cdot \ln \left| \frac{\xi(t)-a-k_p u}{C_2} \right| \leq t < -\tau_p \cdot \ln \left| \frac{\xi(t)+a-k_p u}{C_3} \right|. \\ \dots \end{cases} \quad (6)$$

Перше рівняння визначають припущеннями щодо нульової температури й початку процесу нагрівання – станом нагрівання. Друге рівняння визначають другим станом – станом охолодження. Третє рівняння визначають станом нагрівання з урахуванням значення досягнутої температури. Далі процес повторюється циклічно й актуальними є друге та третє рівняння.

Приведемо (6) у зручнішу для розроблення скрипта форму:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-\frac{t}{\tau_p}} + k_p u, & 0 \leq t < t_1, \\ y_i = C_i e^{-\frac{t}{\tau_p}} + k_p u, & t_{i-1} \leq t < t_i, i = \overline{2, n}, \end{cases} \quad (7)$$

де

$$t_1 = -\tau_p \cdot \ln \left| \frac{\xi(t)+a-k_p u}{C_1} \right|,$$

$$t_i = -\tau_p \cdot \ln \left| \frac{\xi(t) + (-1)^{i-1} \cdot a - k_p u}{C_i} \right|, \quad i = \overline{2, n}$$

$$\begin{cases} u = \mu_{max} & \text{за } i = 2j + 1, \\ u = \mu_{min} & \text{за } i = 2j, \end{cases}$$

$t_i$  – моменти часу спрацювання двопозиційного регулятора;

$u$  – сигнал керування відповідно до алгоритму роботи РКН, має мінімальне й максимальне значення. Під час розроблення скрипта для Matlab вважатимемо, що в одному стані системи АСВХП як керівний вплив визначають максимальну потужність нагрівача. В іншому стані нагрівання немає. Тобто відбувається аналітичний опис звичайного варіанта реалізації релейного керування нагріванням (on-off control), актуальний для простої й недорогої АСВХП.

Коефіцієнти  $C_i$  знаходимо з умов:

$$y_1(0) = 0,$$

$$y_i(t_{i-1}) = \xi + (-1)^i \cdot a, \quad i = \overline{2, n}.$$

Для використання (7) як основи для написання скрипта моделювання АСВХП визначимо тестові параметри практично реалізованої системи керування, показані в таблиці 1 [1–3, 7].

Таблиця 1

## Числові значення параметрів АСВХП

Параметр	Числове значення
$k_p$	$1,434 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{кВт}}$
$\tau_p$	5 хв
$\mu_{max}$	10 кВт
$\mu_{min}$	0

Для автоматизації обчислень (7) та підтвердження правильності результатів на конкретному прикладі з метою підвищення якості готової продукції розроблено такий скрипт Matlab:

```
syms tau;
syms k;
syms u;
y=dsolve('tau*Dy+y=k*u')
```

```
tau=5;
k=1.434;
a=0.5;
Umax =10;
Umin =0;
Ksi=7;
D=0;
```

```
y1=vpa(subs(dsolve('tau*Dy+y=k*Umax', 'y(0)=0')),5)
C1=subs((y1-k*Umax)*exp(0/tau),0)
t1=(-tau)*log(abs((ksi+a+d-k*Umax)/C1))
```

```
y2=vpa(subs(dsolve('tau*Dy+y=k*Umin', 'y(t1)=ksi+a+d')),5)
C2=subs((y2-k*Umin)*exp(t1/tau),t1)
t2=(-tau)*log(abs((ksi-a+d-k*Umin)/C2))
```

```
y3=vpa(subs(dsolve('tau*Dy+y=k*Umax', 'y(t2)=ksi-a+d')),5)
C3=subs((y3-k*Umax)*exp(t2/tau),t2)
t3=(-tau)*log(abs((ksi+a+d-k*Umax)/C3))
```

```
y4=vpa(subs(dsolve('tau*Dy+y=k*Umin', 'y(t3)=ksi+a+d')),5)
C4=subs((y4-k*Umin)*exp(t3/tau),t3)
t4=(-tau)*log(abs((ksi-a+d-k*Umin)/C4))
```

```
y5=vpa(subs(dsolve('tau*Dy+y=k*Umax', 'y(t4)=ksi-a+d')),5)
C5=subs((y5-k*Umax)*exp(t4/tau),t4)
t5=(-tau)*log(abs((ksi+a+d-k*Umax)/C5))
```

```
y6=vpa(subs(dsolve('tau*Dy+y=k*Umin', 'y(t5)=ksi+a+d')),5)
C6=subs((y6-k*Umin)*exp(t5/tau),t5)
t6=(-tau)*log(abs((ksi-a+d-k*Umin)/C6))
```

$$y7 = \text{vpa}(\text{subs}(\text{dsolve}('tau*Dy+y=k*Umax', 'y(t6)=ksi-a+d'), 5))$$

$$C7 = \text{subs}((y7 - k*Umax) * \exp(t6/tau), t6)$$

$$t7 = (-tau) * \log(\text{abs}((ksi + a + d - k*Umax) / C7))$$

У результаті обчислень у програмному пакеті Matlab на основі математичної моделі (7) і тестових значень таблиці 1 отримано результати, зазначені в таблиці 2.

Таблиця 2

**Вигляд рівняння системи (7) на різних проміжках часу**

Момент часу спрацювання реле, с		Вигляд (7) у відповідний момент часу	
$t_1$	3.7013	$y_1$	$14.34 - 14.34/\exp(0.2*t)$
$t_2$	4.4169	$y_2$	$15.724/\exp(0.2*t)$
$t_3$	5.0993	$y_3$	$14.34 - 18.966/\exp(0.2*t)$
$t_4$	5.8148	$y_4$	$20.796/\exp(0.2*t)$
$t_5$	6.4970	$y_5$	$14.34 - 25.083/\exp(0.2*t)$
$t_6$	7.2125	$y_6$	$27.503/\exp(0.2*t)$
$t_7$	7.8947	$y_7$	$14.34 - 33.173/\exp(0.2*t)$

Результати моделювання можна оцінити графічно в програмі Matlab/Simulink. Для побудови моделі системи в пакеті Matlab/Simulink від диференційного рівняння (2) перейдемо до передавальної функції системи керування нагріванням АСВХП:

$$\tau_p \frac{dy}{dt} = k_p u - y;$$

$$\tau_p \dot{y} + y = k_p u.$$

Робимо перетворення Лапласа лівої та правої частини отриманого рівняння:

$$\tau_p s Y(s) + Y(s) = k_p U(s);$$

$$Y(s)(\tau_p s + 1) = k_p U(s).$$

Записуємо передавальну функцію за температурою як відношення зображення виходу до входу:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_p}{(\tau_p s + 1)};$$

$$W(s) = \frac{k_p}{(\tau_p s + 1)}.$$

На підставі передавальних функцій створено схему моделі системи, результати роботи якої з урахуванням обмежень показано на рисунку 1.

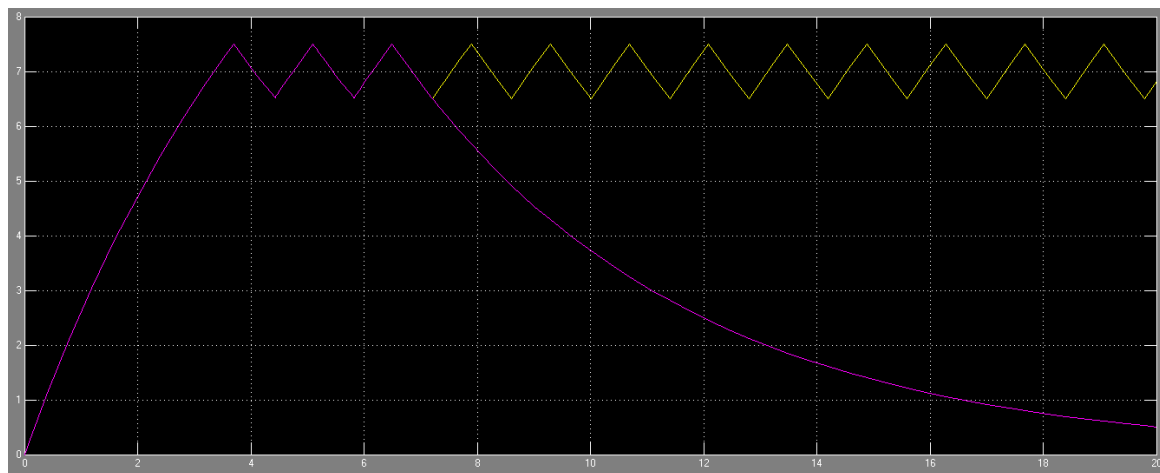


Рисунок 1. Результати обчислень роботи системи АСВХП

На рисунку 1 подано результати роботи системи АСВХП зі способом релейного керування нагріванням (on-off control), що відповідають практичним значенням аналогічних систем керування.

**Висновки.** Отже, в цій статті вирішено завдання побудови аналітичної моделі автоматичного підтримання заданого температурного режиму в АСВХП з РКН за зниженого тиску. Використання моделі дає можливість отримати аналітично інструментальну помилку (перегулювання) для забезпечення якості готової продукції у вигляді (7). Крім того, модель дає можливість обчислювати значення температури й використовувати їх для реалізації систем керування на основі МК. Отримано скрипти в пакеті Matlab, що дають можливість автоматизувати процес обчислень. Аналітична модель дає змогу врахувати помилки й допуски в елементах системи керування АСВХП, й особливості РКН, що призводять до появи помилок устанавлення температури. Скрипти Matlab дають можливість автоматизувати обчислення інструментальної похибки встановлення температури.

Актуальність результатів доведено в пакеті Matlab/Simulink й показано на рисунку 1 для практичної системи з параметрами, визначеними в таблиці 1.

Як подальші дослідження можна навести розв'язок (7) для дискретних систем, що є актуальним для АСВХП. Доцільно отримати розв'язок аналогічно (7) за умови кипіння сировини. Крім того, доцільно отримати розв'язок (4) для досконаліших регуляторів з метою підвищення якості готової продукції [11]. Визначити шляхи оброблення й накопичення знань під час приготування продукції [12] на основі систем АСВХП.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Комплексне виробництво нектару і джему з плодів абрикоса, сливи, вишні, а також з концентратів і напівфабрикатів [електронний ресурс]: <http://www.gardenstaff.ru/>.
2. Описание вакуум-выпарного аппарата Normit [електронний ресурс]: <http://normit.ru/otrasli/katalog-oborudovaniia/527>.
3. Банных О. П. Проектирование вакуум-выпарной установки / Е. И. Борисова. — Санкт-Петербург : «Синтез», 2009. — 52 с.
4. Устаткування для виробництва варення, джему, конфітюру, повидла, желе [електронний ресурс]: <http://www.agro-t.de/Binder/jam.html>.
5. Ролик А. И. Оценка качества предоставления мультимедийных сервисов с использованием нейросетевого классификатора / Ролик А. И., Галушко Д. А., Барна В. В., Томащук А. В., Ясочка М. В. // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка : збірник наукових праць. – К.: Століття+, 2015. – № 63. – С. 25–30.

5. Катін П. Ю., Досенко Є. В., Іванів Р. Б. Моделювання програм з паралельними обчисленнями за допомогою мереж Петрі / П. Ю. Катін, Є. В. Досенко, Р. Б. Іванів // Економіка і управління. – 2013. – № 4(60). – С.124–132. – Бібліогр.: 8 назв.
6. Математичне моделювання об'єктів керування хімічних і фармацевтичних виробництв / [І. Л. Красніков, А. К. Бабіченко, В. І. Вельма та ін.]. – Харків : ТОВ «С.А.М.», 2015. – 224 с.
7. Bequette W. W. Process control: modeling, design, and simulati / Bequette, 2003. – 769 с.
8. MATLAB, Manual. "The language of technical computing. The MathWorks." [Електронний ресурс] // The MathWorks. Inc.. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.mathworks.com>.
9. Peacock S. D. The use of Simulink for process modelling in the sugar industry / Peacock. // Proc S Afr Sug Technol Ass. – 2002. – № 76. – С. 444–455.
10. Al-Qaisy M. S. Linear and Non-linear Multi-Input Multi-Output Model Predictive Control of Continuous Stirred Tank Reactor. / M. A. Al-Qaisy. // Tikrit Journal of Engineering Sciences. – 2012. – № 19. – С. 41–57.
11. ДСТУ 4900:2007 Джеми. Технічні умови : станом на 12 груд. 2007 р. / Держспоживстандарт України. – Офіц. вид. – К. : ДП «Укр НДНЦ», 2009. – 15 с. – (Бібліотека офіційних видань).
12. Шемаєв В. М., Ляшенко І. О., Стефанцев С. С. Формалізація відкритої галузі знань розподіленої системи управління. ISSN 2211-7249 (Print) / ISSN 2410-7336 (Online). Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. 2019. № 1(34). – С. 64–68.

**Бердник Ю. Н., Катин П. Ю., Сопов А. А.**

#### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЕЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАГРЕВАТЕЛЕМ В ВИДЕ СКРИПТА МАТЛАБ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА**

*В статье представлены результаты получения математической модели релейного способа управления нагревателем автоматизированной системы изготовления пищевых продуктов путем выпаривания исходного сырья. На основе данной модели полученный код для программного пакета Matlab для расчета ошибки установления температуры регулятором. Возможность аналитического расчета ошибки позволяет предусмотреть максимальную и минимальную температуру сырья. За счет этого происходит предотвращение перегрева сырья и обеспечивается качество готовой продукции. Кроме того полученные данные могут быть использованы для реализации управления с использованием микроконтроллера. Достоверность полученных результатов подтверждена в результате тестовых вычислений.*

**Ключевые слова:** автоматизированные и автоматические системы изготовления пищевых продуктов, релейное управление, микроконтроллер, математическая модель, дифференциальное уравнение, скрипт Matlab.

**Katin P.Y., Berdник Y.M., Sopov O.O.**

#### **MATHEMATICAL MODEL OF RELEVED HEAD CONTROL IN MATRAB SCRIPT MATLAB FOR MICROCONTROLLER REALIZATION**

*The article presents the results of obtaining a mathematical model of the relay control method of the heater of an automated system for the manufacture of food products by evaporation of the raw material. On the basis of this model, a code is obtained for the Matlab software package to calculate the error of setting the temperature by the regulator. Possibility of analytical calculation of the error allows to predict the maximum and minimum temperature of raw materials. Due to this, the prevention of overheating of raw materials and the quality of finished products is ensured. In addition, the data obtained can be used to implement control using a microcontroller. The reliability of the results is confirmed by test calculations.*

**Keywords:** automated and automatic food production systems, relay control, microcontroller, mathematical model, differential equation, Matlab script.

Рецензент: Ткач М.М., канд. техн.наук, доцент,  
Київський політехнічний інститут ім. І.  
Сікорського, м. Київ