УДК 519.6

Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А.А. Михалева

КОНСТРУКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ МНОГОКРАТНОГО ПОКРЫТИЯ

Аннотация. Представлен подход к решению задач о многократном покрытии ограниченного множества из пространства E_n кругами наименьшего радиуса на основе математического и алгоритмического аппарата теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Описан конструктивный алгоритм решения задачи многократного шарового покрытия, приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: многократное покрытие области, непрерывные задачи оптимального разбиения множеств, недифференцируемая оптимизацию.

Введение

Непрерывные задачи многократного покрытия кругами ограниченного множества плоскости или n-мерного пространства исследуются давно. Интерес к задачам многократного покрытия обусловлен, прежде всего, важными практическими приложениями (см., например, [1 – 5]). Такие задачи возникают при необходимости разместить в некотором регионе логистические, распределительные, сервисные центры, службы быстрого реагирования на чрезвычайные ситуации, станции сотовой связи, банкоматы, пункты хранения химических реагентов для нефте- или газодобычи и т. п. Многократное покрытие зон обслуживания используют также навигационные системы GPS, Глонасс, разрабатываемая европейская система Галилео [5].

Анализ публикаций по теме исследования

В научной литературе широко представлены различные алгоритмы для решения задач однократного шарового покрытия. Одни из них базируются на определенных эвристиках, другие используют в качестве математического аппарата области Вороного. В [6] предложен подход, основанный на теории стержневых структур и температурных расширений и сжатий. Применение теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств [7] к задачам однократного покрытия ограниченной части плоскости представлено в [8]. Численные алгоритмы решения непрерывных задач многократного покрытия в научной литературе представлены не так широко, как для задач однократного покрытия. Распространение алгоритмов, использующих области Вороного, на k-кратные покрытия приведено в [9]. Подробный обзор по дискретным аналогам задач многократного покрытия и методам их решений содержится в [10]. В работах [1] решение задачи многократного покрытия сводится к комбинированию методов решения непрерывной и построенной дискретной задачи 0-1 минимального покрытия. Для решения задачи 0-1 минимального покрытия предложена эвристика, использующая кластеризацию.

Формулировка целей статьи

В данной работе будут приведены математические формулировки задач многократного покрытия ограниченной в E_n области кругами минимального радиуса, с использованием математического аппарата теории непрерывных задач оптимального покрытия множеств, а также представлен конструктивный алгоритм решения таких задач. При этом, следуя [1], при определении расстояний между конкретными объектами будем использовать функции, являющиеся некоторыми метриками в пространстве E_n, которому принадлежит покрываемое множество, такие как евклидова, манхэттенская, метрика Чебышева, взвешенная 1_p-метрика, взвешенная 1_p-метрика с возможным поворотом осей координат и другие. Выбор метрики зависит от свойств множества и от существующих связей центра с «клиентами».

Основная часть

Математическая постановка задачи многократного оптимального покрытия.

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n.

c-шаром радиуса R с центром в точке τ_i из E_n будем называть множество вида $B(\tau_i,R)=\left\{x\in E_n : c(x,\tau_i)\le R\right\}$, где $c(x,\tau_i)$ – некоторая квазиметрика.

Будем говорить, что совокупность центров $\tau_1,...,\tau_N$ задает k–кратное шаровое покрытие множества Ω с радиусом R, если имеет

ISSN 1562-9945

место включение $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(\tau_i, R)$, и для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется условие $x \in \bigcap_{j=1}^{l} B(\tau_{i_j}, R)$, $i_j \in \{1, 2, ..., N\}$, $k \le l \le N$. Радиус R k–кратного покрытия множества Ω, которое задается центрами $\tau_1, ..., \tau_N$ (вектором τ^N), определяется так:

$$R\left(\tau^N\right) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1,...,N} c\left(x, \tau_i\right), \tag{1}$$

при этом для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется условие $x \in \bigcap_{j=1}^{l} B(\tau_{i_j}, R)$, $k \le l \le N$, $i_j \in \{1, 2, ..., N\}$, где $\tau^N = \left(\tau_1, ..., \tau_N\right) \in \in \underbrace{E_n \times ... \times E_n}_{N} = E_n^N$ (или, в частном случае, $\tau^N = \left(\tau_1, ..., \tau_N\right) \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} = \Omega^N$).

k–кратное покрытие множества Ω, задаваемое вектором $\tau^N = \left(\tau_1, ..., \tau_N\right)$, с радиусом $R\left(\tau^N\right)$, который определяется по формуле (1), является минимальным k–кратным c-шаровым покрытием, генерируемым вектором τ^N.

k–кратное покрытие минимального радиуса называется оптимальным k–кратным покрытием.

Таким образом, для отыскания оптимального k–кратного покрытия необходимо определить величину радиуса оптимального покрытия

$$R\left(\tau_*^N\right) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1,...,N} c\left(x, \tau_i\right)$$

и вектор $\tau_*^N = \left(\tau_1^*, ..., \tau_N^*\right)$, на котором достигается значение $R\left(\tau_*^N\right)$ при условии, что для каждой точки $x \in \Omega$ выполняется включение

$$x \in \bigcap_{j=1}^{l} B(\tau_{i_j}, R), \; k \le l \le N, \; i_j \in \{1, 2, ..., N\}.$$

Задача о поиске радиуса N кругов, образующих k–кратное c-шаровое покрытие множества.

Может быть формализована математически следующим образом.

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество в пространстве E_n, $\tau = (\tau_1,...,\tau_N)$ – заданный на множестве Ω (или в пространстве E_n) набор точек, в дальнейшем называемых центрами. Будем говорить, что точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2},..., \tau_{i_k}$ являются k–ближайшими соседями точки $x \in \Omega$ из заданных N точек, если

$$\forall j = \overline{1,k} \quad c(x,\tau_{i_j}) < c(x,\tau_m), \quad m \in \{1, 2, ..., N\} \setminus \{i_1, i_2,..., i_k\}. \qquad (2)$$

В частных случаях, например, когда множество Ω имеет симметричную структуру, или центры $\tau_1,...,\tau_N$ размещены в области Ω с определенной закономерностью, для некоторых точек $x \in \Omega$ знак неравенства в (2) может быть нестрогим, то есть некоторые из заданных центров $\tau_1,...,\tau_N$ могут находится на одинаковом расстоянии от фиксированной точки $x \in \Omega$. Тогда будем считать, что точка $x \in \Omega$ имеет несколько различных наборов из k–ближайших соседей. При численной реализации поиска k–ближайших соседей фиксированной точки $x \in \Omega$ для однозначности будем полагать, что набор k–ближайших соседей образуют точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2},..., \tau_{i_k}$, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\forall j = \overline{1,k} \quad c(x,\tau_{i_j}) < c(x,\tau_m), \quad m \in \{1, 2, ..., N\} \setminus \{i_1, i_2,..., i_k\}$$

и имеющие наименьшие возможные индексы.

Введем в рассмотрение множество Λ_N^k N-мерных векторов, координаты которых могут принимать значения 0 или 1, причем в каждом таком векторе единиц может быть ровно k:

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, \, i = \overline{1,N}; \, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = k \right\}.$$

Очевидно, $\left|\Lambda_N^k\right| = C_N^k$.

Тогда для каждой точки $x \in \Omega$ k ближайших соседей из фиксированного набора точек $(\tau_1,...,\tau_N)$ можно найти, решая задачу поиска такого вектора $\lambda(x) = (\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)) \in \Lambda$, при котором достигается минимальное значение следующей величины:

$$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i = \overline{1,N}} c(x,\tau_i)\lambda_i(x). \qquad (3)$$

Таким образом, можно считать, что на множестве Ω определена вектор-функция $\lambda(\cdot)$ со значениями в $\tilde{\Lambda} = \{\lambda(\mathrm{x}) = (\lambda_1(\mathrm{x}), ..., \lambda_N(\mathrm{x})):$ $\lambda(\mathrm{x}) \in \Lambda_N^k \quad \forall \mathrm{x} \in \Omega\}$, так что для каждой точки $x \in \Omega$ компонента $\lambda_i(x)$ этой вектор-функции равна 1 тогда и только тогда, когда центр τ_i считается одним из k возможных «соседей» этой точки. Если же вектор $\lambda(x)$ таков, что на нем достигается величина $C(x)$, то он будет соответствовать ближайшим к точке x k-соседям. Эту величину $C(x)$ и будем считать радиусом кругов с центрами $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, ..., \tau_{i_k}$, покрывающим k-кратно точку x. Индексы этих центров совпадают с индексами единичных компонент вектора $\lambda(x)$. Если среди всех величин $C(x)$, $x \in \Omega$, выбрать наибольшую, то эта величина и будет определять радиус кругов с центрами в точках $(\tau_1, ..., \tau_N)$, покрывающих k-кратно множество Ω.

Итак, задача о поиске радиуса N кругов, образующих k–кратное с-шаровое покрытие множества состоит в отыскании величины

$$R = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{\mathrm{i}=\overline{1,N}} c(\mathrm{x}, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Задача о минимальном k–кратном с-шаровом покрытии с размещением центров шаров

Математически может быть сформулирована так:

Требуется найти величину

$$R\left(\lambda^*(\cdot), \tau_*^N\right) = \inf_{(\tau_1, ..., \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{\mathrm{x} \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{\mathrm{i}=\overline{1,N}} c(\mathrm{x}, \tau_i) \lambda_i(x), \tag{4}$$

где

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, \mathrm{i} = \overline{1,N}; \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = k \right\},$$

а также вектор-функцию $\lambda^*(x) \in \Lambda_N^k \quad \forall x \in \Omega$, и вектор $\tau_*^N =$ $= \left(\tau_1^*, ..., \tau_N^*\right) \in \Omega^N \subset E_n^N$, при котором в (4) достигается нижняя грань.

Если в задаче (4) не интересоваться, какими именно с-шарами покрывается каждая точка $x \in \Omega$, то вектор-функцию $\lambda^*(\cdot)$ слева в равенстве (4) можно опустить. В таком случае вектор-функция $\lambda(x)$ используется лишь для конструктивной записи математической модели задачи и является промежуточным результатом.

Частными случаями приведенных двух задач о k–кратном с-шаровом покрытии множества или их обобщениями являются следующие постановки.

Задача 1 (задача k–кратного покрытия заданного множества из E_n с фиксированными центрами).

Для заданной системы центров $(\tau_1,...,\tau_N)$ из E_n^N (или из Ω^N) найти минимальное k–кратное с-шаровое покрытие множества Ω.

Математически задача сводится к отысканию величины (1).

Задача 2 (задача об оптимальном ограниченном k–кратном с-шаровом покрытии).

При заданном количестве N центров $\tau_1,...,\tau_N$ найти такое их размещение в области Ω, которое генерирует k–кратное покрытие множества Ω с минимальным радиусом.

Если предположить, что центры $\tau_1,...,\tau_N$ могут располагаться не только во множестве Ω, но и во всем пространстве E_n, то можно сформулировать следующую задачу.

Задача 3 (задача об оптимальном k–кратном с-шаровом покрытии).

При заданном количестве N центров $\tau_1,...,\tau_N$ найти такое их размещение в E_n, которое генерирует k–кратное покрытие множества Ω с минимальным радиусом.

В предположении о том, что количество N центров $\tau_1,...,\tau_N$ может не быть заданным наперед, формулируется следующая задача.

Задача 4 (задача о нахождении минимальной по количеству совокупности центров k–кратного покрытия).

При заданном радиусе покрытия R найти минимальную по количеству N совокупность центров $\tau_1,...,\tau_N$, генерирующую k–кратное покрытие множества Ω.

Конструктивные алгоритмы решения задач 1 и 2 многократного покрытия заданного множества.

Представим приближенный алгоритм решения задачи о поиске радиуса N кругов, образующих k–кратное с-шаровое покрытие мно-

 ISSN 1562-9945

жества, а также алгоритм решения задачи о минимальном k−кратном с-шаровом покрытии с размещением центров шаров.

Для решения задачи об отыскании радиуса N кругов, образующих k−кратное с-шаровое покрытие заданного множества Ω предложен подход, основанный на дискретизации области и использовании алгоритмов сортировки массива расстояний от фиксированной точки $x \in \Omega$ до заданных центров $(\tau_1,...,\tau_N)$.

Опишем вначале алгоритм решения задачи (1) или (3) о поиске радиуса N кругов, образующих k−кратное с-шаровое покрытие заданного множества Ω из E_n. Область Ω заключим в n-мерный параллелепипед Π, стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, вводя вспомогательную функцию $\rho(x)$, определенную на Π, такую, что

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad x \in \Pi \backslash \Omega, \\ 1 & \text{для} \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда в задаче (1) под функцией $c(x,\tau_i)$ будет пониматься функция $c(x,\tau_i) \cdot \rho(x)$, определенная на Π и совпадающая с $c(x,\tau_i)$ на Ω.

Алгоритм 1

Предварительный этап. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой с шагом Δh_j, $j = 1,...,n$; обозначим $\tilde{\Pi}$ − множество узлов сетки. Задаем положение центров покрытия $\tau = (\tau_1,...,\tau_N)$.

Шаг 1. Для каждой точки x сетки $\tilde{\Pi}$ строим массив расстояний от этой точки до всех центров: $D(x) = (c(x,\tau_1), c(x,\tau_2),...,c(x,\tau_N))$.

Шаг 2. Полученный массив расстояний $D(x)$ сортируем по возрастанию элементов.

Шаг 3. В каждом отсортированном массиве отбираем элемент с порядковым номером k, обозначим этот элемент $c^k(x,\tau_{i_k})$.

Шаг 4. Среди всех отобранных элементов находим наибольший:

$$\tilde{R} = \max_{x \in \tilde{\Pi}} c^k(x,\tau_{i_k}).$$

Полученное максимальное значение и является приближенным значением радиуса окружностей с центрами в точках $(\tau_1,...,\tau_N)$, которые k-кратно покрывают множество Ω.

Алгоритм оптимального многократного покрытия множества, основанный на использовании методов недифференцируемой оптимизации.

Представим здесь один из возможных численных алгоритмов решения задачи (4) об оптимальном k-кратном покрытии – отыскания координат центров $\tau_1^*,...,\tau_N^*$, минимизирующих целевую функцию $R(\tau^N)$ в предположении, что покрываемое множество имеет простую структуру. Поскольку функция $R(\tau)$ недифференцируема, для решения задачи (4) будем использовать метод проекции обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства в направлении разности двух последовательно обобщенных градиентов (r-алгоритм Шора [11]).

i-ю компоненту N-мерного вектора обобщенного градиента

$$g_R(\tau^N) = \left(g^{\tau_1}(\tau^N),...,g^{\tau_N}(\tau^N)\right) \quad (6)$$

функции $R(\tau^N)$ в точке $\tau^N = (\tau_1,...,\tau_N)$ будем вычислять с применением формул численного дифференцирования:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = (g_1^{\tau_j}(\tau^N), g_2^{\tau_j}(\tau^N),...,g_n^{\tau_j}(\tau^N)), \quad (7)$$

где s-ая компонента вычисляется приближенно по следующей формуле:

$$g_s^{\tau_j}(\tau^N) = \frac{R(\tau_1,...,(\tau_j^{(1)},...,\tau_j^{(s)}+\Delta,...,\tau_j^{(n)}),...,\tau_N) - R(\tau_1,...,(\tau_j^{(1)},...,\tau_j^{(s)},...,\tau_j^{(n)}),...,\tau_N)}{\Delta},$$

$$s = \overline{1,n},\ j = \overline{1,N}.$$

Сформулируем алгоритм решения задачи оптимального многократного покрытия единичного n-мерного куба $\Omega = \underbrace{[0,1]\times[0,1]\times...\times[0,1]}_{n}$.

Для упрощения обозначений в алгоритме вектор $\tau^N = (\tau_1,...,\tau_N)$ обозначим через $\tau = (\tau_1,...,\tau_N)$.

 ISSN 1562-9945

Алгоритм 2

Предварительный этап. Куб Ω покрываем прямоугольной сеткой с шагом Δh_j, $j=1,...,n$. Множество узлов прямоугольной сетки на множестве Ω обозначим $\widetilde{\Omega}$. Задаем шаг численного дифференцирования Δ. Задаем начальное положение центров покрытия $\tau^{(0)}=\left(\tau_1^{(0)},...,\tau_N^{(0)}\right)$.

Вычисляем по этим центрам величину

$$R\left(\tau^{(0)}\right)=\sup_{x\in\tilde{\Omega}}\min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k}\max_{i=1,N}c(x,\tau_i^{(0)})\lambda_i(x),$$

используя алгоритм 1 решения задачи поиска радиуса N кругов, образующих k–кратное c-шаровое покрытие заданного множества Ω.

По формулам (6), (7) вычисляем вектор-градиент $g_R\left(\tau_1,...,\tau_N\right)$ в точке $\tau^{(0)}$, выбираем начальный пробный шаг r-алгоритма $h_0>0$.

Первый шаг алгоритма проводим по формуле

$$\tau^{(1)}=P_\Omega\left(\tau^{(0)}-h_0\cdot g_R\left(\tau^{(0)}\right)\right),$$

P_Ω – оператор проектирования на множество Ω.

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после m (m=1,2,...,) шагов алгоритма получен определенный вектор $\tau^{(m)}=\left(\tau_1^{(m)},...,\tau_N^{(m)}\right)$.

Опишем (m+1)-й шаг алгоритма.

1. По центрам $\tau_1^{(m)},...,\tau_N^{(m)}$ с помощью алгоритма 1 величину

$$R\left(\tau^{(m)}\right)=\sup_{x\in\tilde{\Omega}}\min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k}\max_{i=1,N}c(x,\tau_i^{(m)})\lambda_i(x),$$

2. Вычисляем значения $g_R\left(\tau\right)$ по формулам (6), (7) при $\tau=\tau^{(m)}$.

3. Проводим (m+1)-й шаг r-алгоритма в H-форме, итерационная формула которого имеет вид

$$\tau^{(m+1)}=P_\Pi\left(\tau^{(m)}-h_m\frac{H_{m+1}g_R(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1}g_R(\tau^{(m)}),\ g_R(\tau^{(m)}))}}\right),$$

где H_{m+1} – матрица растяжения пространства с коэффициентом α (его целесообразно брать равным 3) в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, имеющая вид

$$H_{m+1} = H_m + \left(1/\alpha^2 - 1\right)\frac{H_m \xi_m \xi_m^T H_k}{(H_m \xi_m, \xi_m)}, \quad \xi_m = g_R(\tau^{(m)}) - g_R(\tau^{(m-1)}).$$

Если из-за округлений счета H_{m+1} перестает быть положительно определенной, заменяем ее единичной матрицей.

Шаг h_m выбираем из условия:

$$\min_{h>0} R\left(\tau^{(m)} - h\frac{H_{m+1} g_R(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_R(\tau^{(m)}), g_R(\tau^{(m)}))}}\right).$$

4. Если условие

$$\left\|\tau^{m+1} + \tau^m\right\| \le \varepsilon, \ \varepsilon > 0, \qquad (8)$$

не выполняется, переходим к (m+2)-му шагу, в противном случае – к п. 5.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}$, где l – номер итерации, на которой выполнилось условие (8) завершения работы алгоритма.

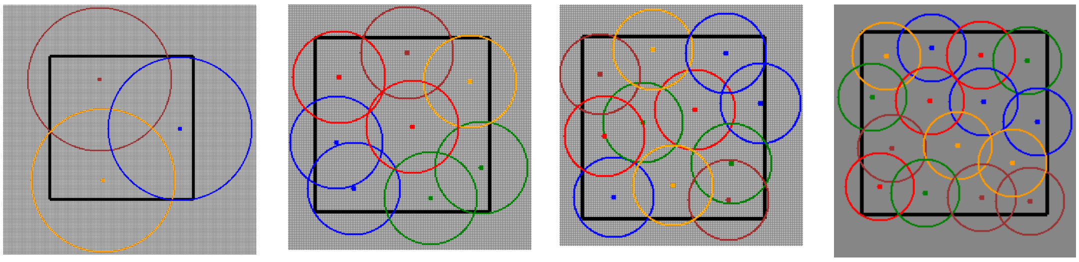
6. Вычисляем значение минимального радиуса покрытия по формуле $R\left(\tau^*\right)$ с помощью алгоритма 1.

Алгоритм 2 описан.

Анализ результатов вычислительных экспериментов

Приведем результаты вычислительных экспериментов по многократному покрытию единичного квадрата из E_2 с помощью алгоритма 2.

Вначале работу алгоритма продемонстрируем на примере решения задачи однократного покрытия указанного множества. На рис. 1 изображены оптимальные покрытия единичного квадрата, полученные с заданной точностью ε=0.0001 алгоритмом 2, для N= =3,8,11,15. В табл. 1 приведены минимальные радиусы однократного покрытия в задаче (4) для соответствующих значений N, полученные с заданной точностью алгоритмом 2, в сравнении с оптимальными решениями, полученными в [7, 12]. Незначительное расхождение в оптимальных значениях радиусов покрытия объясняется, прежде всего, погрешностью алгоритма (приближенное вычисление компонент обобщенного градиента целевой функции, дискретизация области, параметрами r-алгоритма), а также вычислительной погрешностью.



N=3 N=8 N=11 N=12

Рисунок 1 - Оптимальное однократное покрытие единичного квадрата, полученное алгоритмом 2: метрика евклидова

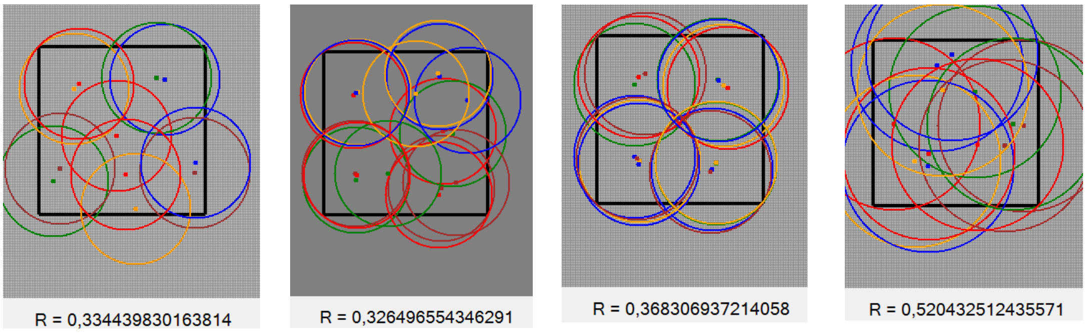
Заметим также, что результаты многочисленных вычислительных экспериментов по приближенному решению задачи (4) об оптимальном многократном c-шаровом покрытии свидетельствуют о наличии свойства многоэкстремальности целевой функции задачи. Из различных начальных приближений набора центров можно прийти к различным локальным решениям задачи (4).

Таблица 1

Минимальный радиус однократного покрытия единичного квадрата, полученный с помощью алгоритма 2 и алгоритма, приведенного в [3]

N	$R(\tau_*)$ (алгоритм 2)	$R(\tau_*)$ (алгоритм из [3])	N	$R(\tau_*)$ (алгоритм 2)	$R(\tau_*)$ (алгоритм из [3])
2	0,5545	0,5599	9	0,2500	0,2339
3	0,5022	0,5033	10	0,2328	0,2186
4	0,3541	0,3536	11	0,2236	0,2125
5	0,3233	0,3266	12	0,2191	0,2068
6	0,3162	0,3001	13	0,2166	0,1956
7	0,2926	0,2596	14	0,2070	0,1859
8	0,265	0,2596	15	0,1892	0,1807

На рис. 2 представлены результаты решения непрерывных задач k-кратного покрытия единичного квадрата с помощью алгоритма 2 при заданном количестве центров.



N=11, k=2 N=16, k=3 N=12, k=3 N=12, k=4

Рисунок 2 - Оптимальное k-кратное покрытие единичного квадрата при заданном количестве N центров: метрика – евклидова

Сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов по 2-, 3-, 4-х-кратному покрытию единичного квадрата позволил выявить достоинства и недостатки разработанного алгоритма. Это, прежде всего, – зависимость результатов вычислений (величины минимального радиуса шарового покрытия) от исходных данных и параметров алгоритма – начального приближения координат центров, величины шага пространственной сетки, величины шага численного дифференцирования при вычислении компонент обобщенного градиента. Серия вычислительных экспериментов показывает, что для получения радиуса покрытия, близкого к оптимальному радиусу, величину шага численного дифференцирования Δ в первом варианте алгоритма нужно согласовывать с шагом дискретизации области, с количеством центров и кратностью покрытия. Для устранения этого недостатка предлагается вариант алгоритма с элементами теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств, а именно, при вычислении компонент обобщенного градиента целевой функции задачи (4) использовать k-кратную диаграмму Вороного, построенную с помощью методов ОРМ, по аналогии с алгоритмом решения задач оптимального однократного покрытия, приведенного в [7]. Результаты решения некоторых задач оптимального многократного покрытия свидетельствуют также о том, что при определенных значениях N и k оптимальное расположение центров таково, что несколько центров могут быть расположены очень близко друг к другу, что на практике не всегда реализуемо. Поэтому в дальнейшем математическая модель задачи об оптимальном многократном шаровом покрытии должна быть уточнена путем расширения целевой функции задачи некоторым регуляризирующим слагаемым, отвечающим за невозможность «слипания» центров.

Заключение

Таким образом, в работе представлены математические модели и методы решения непрерывных задач многократного покрытия, разработанные с использованием элементов теории непрерывных задач ОРМ. Разработанный приближенный алгоритм решения задачи о минимальном k–кратном c-шаровом покрытии основан на дискретизации покрываемой области и применении для решения задачи недифференцируемой оптимизации (3) r-алгоритма Шора. При этом для приближенного вычисления компонент обобщенного градиента целевой функции задачи (3) можно применять или конечно-разностные производные (схемы), или k-кратные диаграммы Вороного, построенные с помощью методов оптимального разбиения множеств.

Конструктивный алгоритм решения непрерывной задачи об оптимальном покрытии множеств из E_n, разработанный на основе теории оптимального разбиения множеств, обладает следующими свойствами: его реализация не зависит от геометрических особенностей покрываемого множества и размерности пространства E_n и выбора квазиметрики; на каждом шаге его итерационного процесса улучшается положение одновременно всех центров $\tau_1,...,\tau_N$; имеет простую программную реализацию; легко обобщается на случай наличия ограничений на расположение центров (например, в случае недопустимости слияния размещения двух и более центров в одной точке).

ЛИТЕРАТУРА

1. Галиев Ш. И. Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами / Ш. И. Галиев, М. А. Карпова. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, 4. – С. 757–769.

2. Кісельова О.М. Про моделювання неперервних задач багатократного кулькового покриття множини / О. М. Кісельова, Л. І. Лозовська // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2013 – С.174 – 180.

3. Антошкин А.А. Математическая модель задачи покрытия выпуклой многоугольной области кругами с учетом погрешностей исходных данных / А. А. Антошкин, Т. Е. Романова // Пробл. Машиностроения. – 2002. – 5, №1. – С.55 – 60

4. Астраков С.Н. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов / С. Н. Астраков, А. И. Ерзин // Вычислительные технологии, 2012. – Т. 17, № 1. – С. 26 – 34.

5. Астраков С.Н. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами / С. Н. Астраков, А. И. Ерзин, В. В. Залюбовский // Дискретный анализ и исследование операций, 2009. – Т. 16, № 3. – С. 3 – 19.

6. Tarnai T. Covering a square by equal circles / T. Tarnai, Zs. Gaspar // Elem. Math. 1995. – V. 50. – P. 167–170.

7. Киселева Е.М. Исследование алгоритма решения одного класса непрерывных задач разбиения / Е. М. Киселева, Н. З. Шор // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – №1. – С. 84 – 96.

8. Киселева Е.М. Решение непрерывных задач оптимального покрытия шарами с использованием теории оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Л. И. Лозовская, Е. В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 98–117

9. Галиев Ш.И. Направления убывания для минимаксиминных задач / Ш. И. Галиев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 3. – С. 323–343.

10. Farahani R. Z. Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer – Verlag. / R.Z. Farahani , M. Hekmatfar (eds.). – Berlin, Heidelberg. – 2009. – 530 p.

11. Шор Н. З. Использование модификации r – алгоритма для нахождения минимума полиномиальных функций / Н. З. Шор, П. И. Стецюк // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28–49.

12. Брусов В. С. Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости / В. С. Брусов, С. А. Пиявский // Журн. Вычисл. математики и мат. физики. – 1971. – 11, № 2. – С. 304–312.

 ISSN 1562-9945