

И.В. Добров, Н.Я. Гаркави, Е.Ф. Фёдоров,
В.В. Карпенко, И.В. Клименко, О.Н. Литвиненко
**К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ
МОДЕЛЕЙ-АССОЦИАЦИЙ**

Анотація. На моделях-асоціаціях досліджуються ефекти, пов'язані з наявністю в системі сухого тертя. Знайдено траєкторію тіла, що рухається по похилій площині з початковою швидкістю, спрямованою поперек площини. Задача узагальнена на замет задніх коліс автомобіля в кривій при юзі. Показано, що в двохмасовій коливальній системі із сухим тертям можуть бути зафіксовані три «власні» частоти. Пояснено, чому при «скиданні з клинів» рухомого складу деякими датчиками можуть фіксуватися «зайві» резонансні частоти.

Постановка проблемы в общем виде

В своё время В.Л. Кирпичёв настоятельно рекомендовал пользоваться моделями, которые не представляют «точную картину физического явления», но «наводят на мысли и предположения о возможных явлениях» [1, с.369]. В данной статье показано, что, несмотря на наличие огромного количества лицензированных специализированных программных комплексов, для объяснения результатов, полученных в натурном эксперименте, иногда и сейчас целесообразно использовать эти предлагавшиеся В.Л. Кирпичёвым модели-ассоциации [2, с.42]).

Выделение части общей проблемы

Ниже приводятся объяснения эффектов, связанных с наличием трения скольжения. Как известно [3, с.26], сила трения покоя направлена против действующей на тело силы, а сила трения движения направлена против скорости тела:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = \begin{cases} -k \cdot Q \cdot (\vec{F}/|F|) & \Leftarrow (|v|=0) \wedge (|F| > k \cdot Q), \\ -\vec{F} & \Leftarrow (|v|=0) \wedge (|F| \leq k \cdot Q), \\ -k \cdot Q \cdot (\vec{v}/|v|) & \Leftarrow |v| \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где Q — сила нормального давления, \vec{v} и $|v|$ — скорость тела (векторная величина) и модуль скорости (скаляр), \vec{F} и $|F|$ — движущая сила (векторная величина) и модуль движущей силы (скаляр), k — коэффициент трения.

Постановка задачи 1

Пусть тело массой m находится в покое на наклонной плоскости (рис.1), угол наклона которой α . Тогда скатывающая сила, направленная вниз по наклонной плоскости, $F_{\text{ск}} = m \cdot g \cdot \sin \alpha$, наибольшая возможная сила трения $\max F_{\text{тр}} = k \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$, $k > \text{tg} \alpha$, фактическая сила трения $F_{\text{тр}} = m \cdot g \cdot \sin \alpha$ направлена против скатывающей силы. При этом вниз по наклонной плоскости скорость $v_x=0$ и перемещение $x=0$, а поперёк наклонной плоскости скорость $v_y=0$ и перемещение $y=0$.

Сообщим телу щелчком поперечную относительно наклонной плоскости скорость $v_y=v_0$ (количество движения $m \cdot v_0$). Определим траекторию тела.

Решение задачи 1

Сила трения теперь и в дальнейшем (пока тело движется) направлена против скорости (рис.2). Модуль скорости $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, часть силы трения, действующая вниз вдоль наклонной плоскости, $F_{\text{тр}x} = -k \cdot m \cdot g \cdot (v_x/|v|) \cdot \cos \alpha$, часть силы трения, действующая в поперечном направлении, $F_{\text{тр}y} = -k \cdot m \cdot g \cdot (v_y/|v|) \cdot \cos \alpha$, ускорение тела вниз вдоль наклонной плоскости $a_x = (m \cdot g \cdot \sin \alpha + F_{\text{тр}x})/m$, поперечное ускорение тела $a_y = F_{\text{тр}y}/m$. Уравнения движения тела по наклонной плоскости

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x, \\
\dot{y} &= v_y, \\
\dot{v}_x &= \begin{cases} g \cdot \sin \alpha - k \cdot g \cdot \left(v_x / \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) \cdot \cos \alpha & \Leftarrow v_x^2 + v_y^2 \neq 0, \\ 0 & \Leftarrow v_x^2 + v_y^2 = 0, \end{cases} \\
\dot{v}_y &= \begin{cases} -k \cdot g \cdot \left(v_y / \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \right) \cdot \cos \alpha & \Leftarrow v_x^2 + v_y^2 \neq 0, \\ 0 & \Leftarrow v_x^2 + v_y^2 = 0 \end{cases}
\end{aligned} \quad (2)$$

при начальных условиях $x(0)=0$, $y(0)=0$, $v_x(0)=0$, $v_y(0)=v_0$. Траектория движения тела до полной остановки приведена на рис.3. График силы трения в течение всего времени движения тела приведен на рис.4. Зависимость от времени скоростей v_x и v_y приведена на рис.5. Что интересно (рис.4): сила трения в процессе движения постоянно меняет направление, при этом от времени $t < 0$ до времени $t = 0$ и от времени $t < t_{\text{кон}}$ до времени $t = t_{\text{кон}}$ скачком меняет величину ($t_{\text{кон}}$ — момент окончания движения).

Обобщение результатов задачи 1

Приведенное решение объясняет тот факт, что занос задних колёс при повороте автомашины наиболее вероятен, если колёса «идут юзом». Вращающееся без проскальзывания колесо имеет неподвижное относительно «земли» пятно контакта. В этом пятне сила трения препятствует поперечному движению колеса. При юзе в самом начале поперечного движения сопротивления поперечному движению нет, а затем при малой скорости поперечного движения и достаточно большой скорости проскальзывания сила трения мало препятствует заносу. Именно поэтому, чтобы прекратить занос, необходимо отпустить тормоза (а чтобы остаться на дороге, необходимо вывернуть руль в противоположную первоначальному направлению сторону).

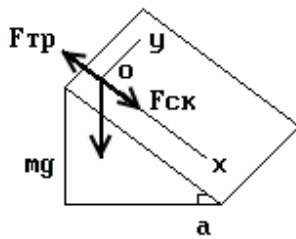


Рисунок 1 - Тело в состоянии покоя на наклонной плоскости.

$$|F_{тр}| = |F_{ск}| = m \cdot g \cdot \sin \alpha, \\ a \equiv \alpha.$$

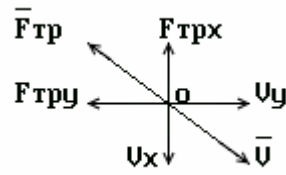


Рисунок 2 - Сила трения движения. Координаты x и y связаны с движущимся телом.

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \\ |F_{тр}| = k \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

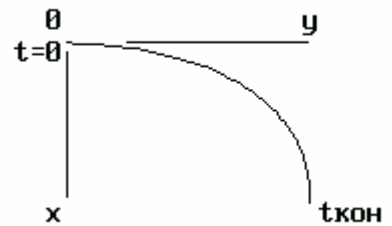


Рисунок 3 - Траектория тела.

Координаты x и y связаны с неподвижной точкой на наклонной плоскости.

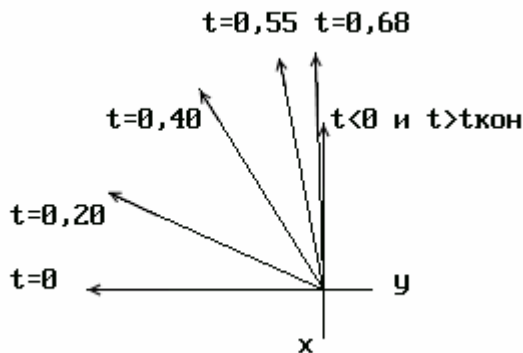


Рисунок 4 - Годограф силы трения.

$t_{кон} = 0,82$ сек. Координаты x и y связаны с движущимся телом. При $0 \leq t < t_{кон}$

$$|F_{тр}| = k \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha, \text{ при } (t < 0) \wedge (t \geq t_{кон}) \\ |F_{тр}| = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

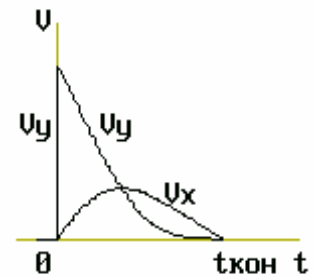


Рисунок 5 - Зависимость от времени скоростей v_x и v_y .

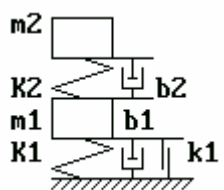
Постановка задачи 2

Согласно требованиям нормативной литературы [4, с.3; 5, с.3] в испытаниях тягового подвижного состава, называемых «сбрасыванием с клиньев», определяются собственные частоты и декременты основных форм колебаний (подпрыгивания, галопирования и боковой качки). Испытуемый экипаж при «сбрасывании с клиньев» заезжает на подложенные под его колеса клинья и, сбросив тягу, «соскакивает» с них на рельсы. Преобразование Фурье от переходных функций, зафиксированных датчиками, предлагается считать передаточными функциями испытуемой механической системы [6, с.20; 7, с.43] (что безусловно верно только для линейной системы, в то время, как под-

вижной состав в первой ступени подвешивания обычно содержит фрикционные гасители колебаний).

Решение задачи 2

Ниже на простейшем примере показано, что описанным выше способом в двухмассовой системе, содержащей фрикционный гаситель, (рис.6) некоторыми датчиками могут быть зафиксированы три «собственные» частоты. Частота f_3 на рис.7 — это собственная частота второй парциальной системы, с которой колеблется масса m_2 после заклинивания фрикционного гасителя в первой парциальной системе (отметим, что некоторые датчики системы фиксируют ещё и низкую частоту f_4 (рис.8), соответствующую времени колебаний фрикционного гасителя до заклинивания и связанную с величиной возбуждения).



$$F_d = \beta_1 \dot{x}_1 + \beta_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1 x_1 + K_2 (x_1 - x_2) - F(t),$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = \begin{cases} -F_d - kQ \text{sign}(\dot{x}_1) & \Leftarrow \dot{x} \neq 0, \\ -(F_d - kQ \text{sign}(F_d)) & \Leftarrow (\dot{x} = 0) \wedge (|F_d| > kQ), \\ 0 & \Leftarrow (\dot{x} = 0) \wedge (|F_d| \leq kQ), \end{cases}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = \beta_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_2 (x_2 - x_1).$$

Рисунок 6 - Двухмассовая система

$m1$ и $m2$ — массы m_1 и m_2 ; $b1$ и $b2$ — вязкости β_1 и β_2 ; $K1$ и $K2$ — жёсткости K_1 и K_2 ; $k1$ — коэффициент трения k ; $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — перемещения масс m_1 и m_2 относительно «земли»; $F(t)$ — силовое возбуждение, приложенное к m_1 .

Обобщение результатов задачи 2

Несмотря на наличие нелинейности, результаты обработки «сбрасывания с клиньев», справедливые только для линейных систем, дают достаточно информации о резонансных частотах и демпфировании в механической конструкции. Отметим, что частоты f_1 и f_2 (рис.7) при случайном возбуждении являются резонансными для «больших» колебаний (с незаклиненным фрикционным гасителем и соответственно с достаточно большими амплитудами), а частота f_3 является резонансной для «малых» колебаний с заклиненным фрикционным гасителем.

Выводы

Результаты математического моделирования на моделях-ассоциациях дают достаточно информации для понимания эффектов, зафиксированных в натуральных испытаниях.

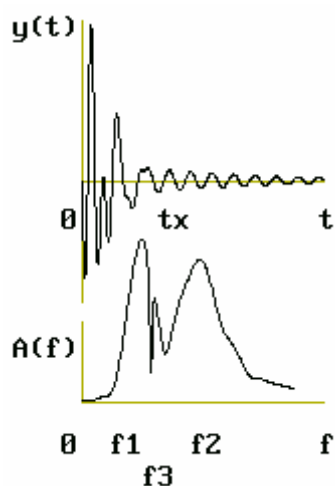


Рисунок 7 - «Переходная» функция $y(t)=(x_2(t)-x_1(t))$ и АЧХ $A(f)$ процесса $y(t)$.
 f — частота, t_x — момент заклинивания
фрикционного гасителя

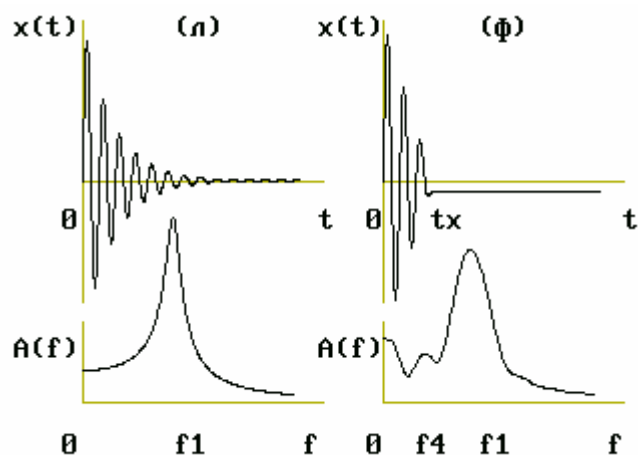


Рисунок 8 - Сравнение «переходных» функций и АЧХ одномассовых систем: линейной системы (л) и системы с фрикционным гасителем (ф).

Величина f_4 связана с величиной начальной скорости массы m . $A(0)$ связана с величиной $x(t_x)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесъды о механикѣ В.Л. Кирпичёва. [Текст] – С.-Петербургъ: Изданіе К.Л. Риккера, 1907. – 371 с.
2. Гаркави Н.Я. К вопросу о формализации физического моделирования поведения механических конструкций на подобных моделях. [Текст] /Гаркави Н.Я., Литвиненко О.Н., Добров И.В. // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця: ВДАУ, 2005. - №4(42). - С.39-44.
3. Добров И.В. Вероятностный подход к математическому моделированию физических процессов. [Текст] /Добров И.В., Гаркави Н.Я., Гаркави О.Н. // Вибрации в технике и технологиях. Всеукраинский научно-технический журнал. – Винница: ВГАУ, 2002. - №5(26). - С.25-27.
4. СТ ССФЖТ ЦТ 15-98. Стандарт системы сертификации на федеральном железнодорожном транспорте. Тяговый подвижной состав. Типовая методика динамико-прочностных испытаний локомотивов.

[Текст] - М.: МПС России. Введен в действие 15.02.99 г. указанием МПС России №Г-165у. - 26 с.

5. СТ ССФЖТ ЦТ 16-98. Стандарт системы сертификации на федеральном железнодорожном транспорте. Тяговый подвижной состав. Типовая методика динамико-прочностных испытаний электропоездов и дизель-поездов. [Текст] - М.: МПС России. Введен в действие 17.11.99 г. указанием МПС России №А-2641у. - 25 с.
6. Блохин Е.П. Прогнозирование наиболее опасных режимов ходовых испытаний подвижного состава. [Текст] /Блохин Е.П., Коротенко М.Л., Мямлин С.В. и др. // Вестник машиностроения. – М.: «Издательство “Машиностроение”», США: «Аллертон Пресс», 2003. - №7. - С.20-23.
7. Приходько В.И. Использование преобразования Фурье при обработке результатов натурных испытаний подвижного состава. [Текст] /Приходько В.И., Мямлин С.В., Фёдоров Е.Ф., Гаркави Н.Я. // XVI международная конференция. Математика. Экономика. Образование. V международный симпозиум. Ряды Фурье и их приложения. Тезисы докладов. - Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. - С.43-44.