

И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко  
**КОГНИТИВНО-ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
КРИВЫХ ЭРМИТА-КУНСА 5-ГО ПОРЯДКА**

*Аннотация.* Рассматриваются кривые Кунса 5-го порядка, обеспечивающие непрерывность функции, а также первой и второй производной ( $C^2$ -гладкость). Обычно для построения полинома Кунса составляют и решают систему линейных алгебраических уравнений с матрицей  $6 \times 6$ . В статье предложен нематричный метод конструирования кривых Кунса, который сводится к интегрированию простого дифференциального уравнения 2-го порядка. Получены полиномы Кунса на двух канонических интервалах:  $[0,1]$  и  $[-1,1]$ . Когнитивно-графический анализ обнаруживает тесные связи полиномов Кунса 5-го порядка с полиномами 2-го порядка Бернулли и Лежандра, определяющими координаты расчетных узлов квадратуры Гаусса повышенной точности (модифицированная формула трапеций).  
*Ключевые слова:* интерполяционные функции Кунса, конечный элемент, когнитивно-графический анализ.

**Введение.** В теории полиномиальной интерполяции наибольшее распространение получили две версии: интерполирование с простыми узлами (по Лагранжу) и интерполирование с кратными узлами (по Эрмиту). Интерполяционные полиномы Кунса – частный случай интерполяции по Эрмиту.

С 1967 г. кривые Кунса успешно применяются в САПР кузова легкового автомобиля. Полиномы 3-го порядка обеспечивают  $C^1$ -гладкость, когда непрерывна сама функция и ее касательные. Впоследствии с учетом требований аэродинамики потребовалась  $C^2$ -гладкость, обеспечивающая еще и непрерывность кривизны. Для этого уже необходимы полиномы Кунса 5-го порядка. Традиционный подход предусматривает составление и решение СЛАУ с матрицей  $6 \times 6$ . Представляет интерес разработка других (нематричных) методов конструирования кривых Кунса.

**Анализ предшествующих публикаций.** О кривых Кунса и их роли в САПР автомобиля можно почитать в [1]. Там же приведены выражения для полиномов Кунса 3-го и 5-го порядков. Вероятностно-геометрический метод конструирования полиномов Кунса 3-го порядка описан в [2].

*Цель статьи* – построение кривых Кунса 5-го порядка путем когнитивно-графического анализа их особенностей, что освобождает от необходимости составлять и решать СЛАУ. Подобный анализ порождает новые знания о кривых Кунса, в частности, их связи с функциями распределения вероятностей и квадратурными формулами Гаусса. Фактически, для кривых Кунса 5-го порядка мы решаем обратную задачу на кривизну, для кривых третьего порядка – это обратная задача на касательную.

**Основная часть.** Ниже получены полиномы Кунса 5-го порядка на конечных носителях  $[0,1]$  и  $[-1,1]$ . Сначала рассмотрим интервал  $[0,1]$  и сформулируем интерполяционную гипотезу Эрмита-Кунса.

Наша задача – построить базис Кунса, т.е. симметричную пару кривых, каждая из которых ассоциируется с конкретным узлом на конце интервала. Главная особенность модели Эрмита – использование кратных узлов. Полный полином 5-го порядка содержит 6 параметров, поэтому кратность узла равна 3. Предполагается, что в каждом узле известно не только значение функции (как в модели Лагранжа), но и значения первой и второй производных.

Сохраняя обозначения [1], запишем интерполяционный полином в виде:

$$G_i = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 + \alpha_6 x^5, \quad i = 0,1, \quad (1)$$

где  $i$  – номер полинома.

Граничные условия:

$$G_i(x) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad G'_i(x_k) = 0, \quad G''_i(x_k) = 0, \quad k = 0,1, \quad (2)$$

где  $k$  – номер узла.

Граничные условия (2) сводят задачу к определению коэффициентов  $\alpha_j$  ( $j = \overline{1,6}$ ). Опуская процедуру составления и решения СЛАУ с матрицей  $6 \times 6$ , запишем искомые полиномы

$$G_0 = 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5, \quad (3)$$

$$G_1 = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5.$$

Графики кривых Кунса показаны на рис. 1.

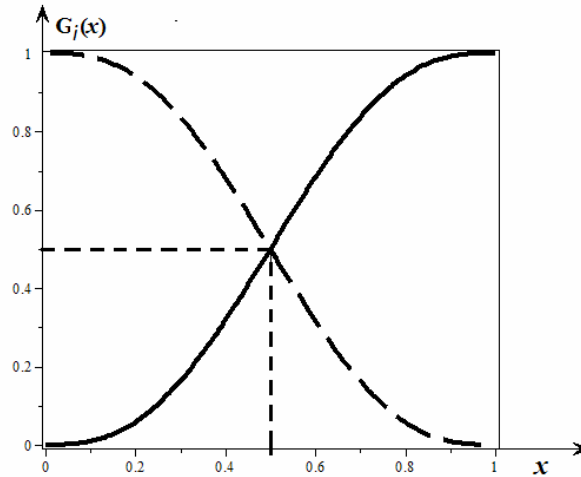


Рисунок 1 - Кривые Кунса (сплошная кривая -  $G_1(x)$ ,  
пунктирная -  $G_0(x)$ )

Стоит отметить, что на  $[0,1]$  можно указать, по крайней мере, три пары симметричных полиномов (1-го, 3-го и 5-го порядков), обладающих одинаковыми свойствами. Иначе говоря, в этой иерархии каждая пара полиномов наследует типичные свойства предыдущих пар. Легко убедиться, что здесь мы имеем дело с противоположными событиями:

$$A = \{\text{попадание случайной точки в } (0, x)\},$$

$$\bar{A} = \{\text{попадание случайной точки в } (x, 1)\}.$$

Полиномы с номером 1 обладают типичными свойствами функции распределения вероятностей. Они определяют вероятность  $p(A)$ . Полиномы с номером 0 определяют  $p(\bar{A})$ . Поэтому сумма каждой пары полиномов дает единицу. Например,  $G_0(x) + G_1(x) = 1$ .

Укажем на еще одно важное свойство:

$$\int_0^1 G_1'(x) dx = 1. \quad (4)$$

Наследственность проявляется в том, что эти свойства присущи полиномам 3-го порядка:

$$F_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad F_1(x) = -2x^3 + 3x^2, \quad (5)$$

а также полиномам 1-го порядка:

$$L_0(x) = 1 - x, \quad L_1(x) = x. \quad (6)$$

В теории вероятностей равенство (4) называют условием нормировки, где  $G_1'(x)$  - плотность распределения вероятностей.

Чтобы восстановить полиномы  $G_i(x)$ , достаточно схематически изобразить графики  $G_i'(x)$  и  $G_i''(x)$  (рис. 2).

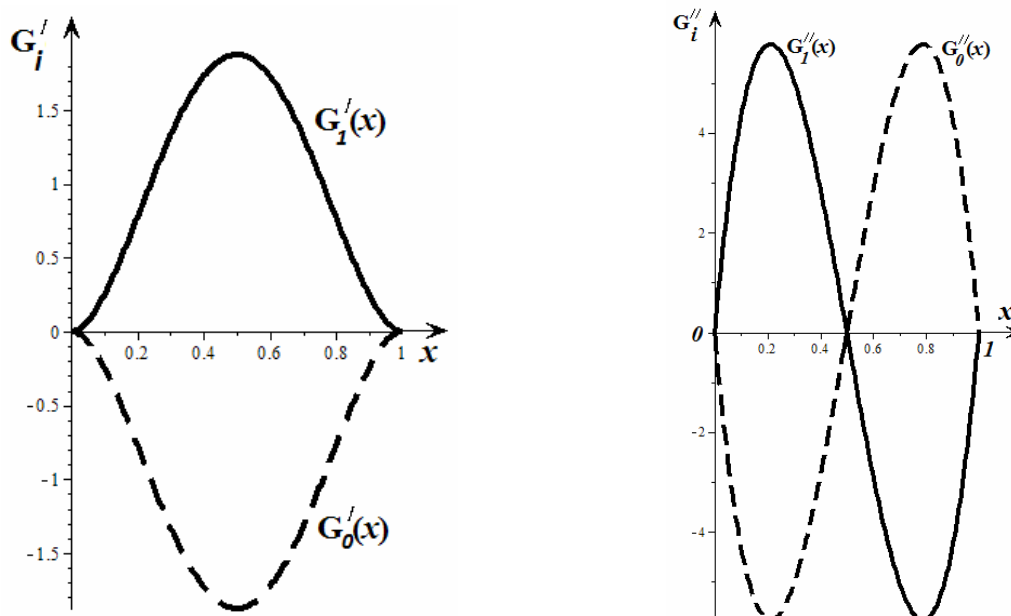


Рисунок 2 - Графики производных  $G_i'(x)$  и  $G_i''(x)$

Напомним, что  $G_i'(x)$  описывает закон изменения тангенса угла наклона касательной к кривой  $G_i(x)$ , а  $G_i''(x)$  отражает характер изменения кривизны кривой  $G_i(x)$ .

Процедура восстановления  $G_i(x)$  заключается в последовательном интегрировании производных, начиная с  $G_i''(x)$ . Например, полином 3-го порядка  $G_1''(x)$  легко представить в виде произведения трех линейных функций

$$G_1''(x) = \mu x(1-x)(1+x), \quad (7)$$

где  $\mu$  - параметр, подлежащий определению.

Дифференциальное уравнение (7) интегрируется дважды с учетом граничных условий (2), а нормирующий множитель определяется из условия (4).

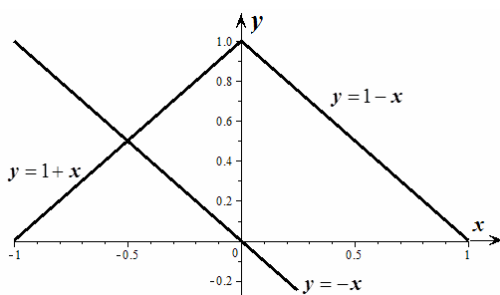
Таким образом, на отрезке  $[0,1]$  полиномы Кунса 5-го порядка имеют вид:

$$G_1 = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5, \quad G_0 = 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5. \quad (8)$$

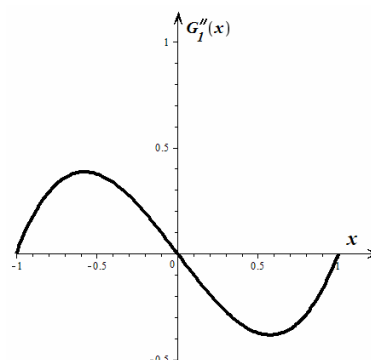
Интересно, что экстремумы  $G_i''(x)$  в точности соответствуют нулям полинома Бернулли второго порядка  $G_i'''(x)=0$ , т.е. совпадают с узлами высокоточной квадратуры Гаусса-Бернулли. Напомним, что эти узлы лежат в точках:  $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ .

Процесс восстановления функции  $G_1(x)$  на отрезке  $[-1,1]$  показан на рис. 3 и практически не нуждается в пояснениях.

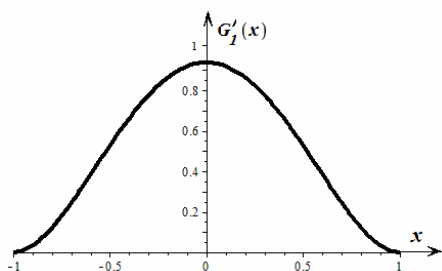
Шаг 1



Шаг 2



Шаг 3



Шаг 4

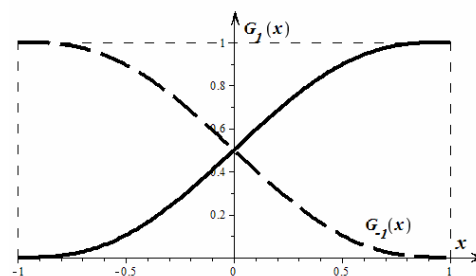


Рисунок 3 - Геометрия процесса восстановления  $G_1(x)$

На 1-м шаге выбраны три прямые, обеспечивающие нули в точках пересечения  $G_1''(x)$  с осью  $Ox$ . Это абсциссы точек перегиба графика  $G_1(x)$  (см. граничные условия). На 2-м шаге путем перемножения линейных функций получаем полином 3-го порядка:

$$G_1''(x) = \mu x(x^2 - 1).$$

На 3-м шаге путем интегрирования  $G_1''(x)$  получаем

$$G_1'(x) = \frac{15}{16}(x^2 - 1)^2.$$

Наконец, 4-й шаг (интегрирование  $G_1'(x)$ ) дает

$$G_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{15}{16}x - \frac{5}{8}x^3 + \frac{3}{16}x^5.$$

Тогда

$$G_{-1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{15}{16}x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{3}{16}x^5.$$

Легко догадаться, что в этом случае экстремум функции соответствует нулям полинома Лежандра 2-го порядка, т.е. совпадает с узлами квадратуры Гаусса-Лежандра. Как известно, эти узлы лежат в точках  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Выводы.** В задачах интерполяции по Эрмиту узлы интерполяции хранят содержательную геометрическую информацию об интерполяционном полиноме. Когнитивно-графический подход к построению полинома позволяет отказаться от традиционной процедуры составления и решения СЛАУ, заменив ее интегрированием простого дифференциального уравнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жермен-Лакур П. Математика и САПР. /П. Жермен-Лакур, П.Л. Жорж, Ф. Пистр, П. Безье. – Кн. 2. – М.: Мир, 1989. – 264 с.
2. Хомченко А.Н. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность /А.Н. Хомченко, Н.А. Козуб // Проблеми інформаційних технологій. – Вип. 5. – Херсон: ХНТУ, 2009. – С. 145-148.