УДК 621.396.96.095.4:528.8.04-047.27

В.К. Волосюк[1], В.В. Павликов[1], Е.Н. Тимощук[2]

[1] *Национальный аэрокосмический университет имтени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*
[2] *Киевская государственная академия водного транспорта имени гетмана Петра Конашевича-Сагайдачного, Украина*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ

Предложен ряд понятий и определений для описания сверхширокополосных антенных систем и принимаемых сигналов. Такими понятиями являются функция пространственно-временной чувствительности, спектральная плотность автокорреляционной функции (спектральная плотность пространственной функции чувствительности) амплитудно-фазового распределения, спектральная плотность функции пространственной когерентности сигнала, определение диаграммы направленности сверхширокополосной антенной системы и др. Введенные понятия и их коррекции необходимы для математической формализации алгоритмов пространственно-временной обработки сверхширокополосных полей. Рассмотрены также частные случаи выполнения условия пространственно-временной узкополосности.

Ключевые слова: *V_F-преобразования, сверхширокополосные поля, пространственно-временная обработка сигналов.*

Введение

Решение задач пространственно-временной обработки сверхширокополосных полей в сравнении с аналогичной обработкой узкополосных сигналов требует определенной коррекции основных понятий и определений, касающихся их спектрально-волновых и спектрально-корреляционных преобразований в пространственно-распределенных антенных системах. В работах [1, 2] рассмотрен ряд новых V -преобразований (V_F , V_Φ , V_L), применимых для обработки сверхширокополосных полей и не требующих выполнения условий пространственно-временной узкополосности (ПВУ) [3], или квазимонохроматического приближения (КМП) [4, 5]. Полученные преобразования позволяют уточнить и скорректировать ряд понятий и определений, используемых в теории пространственно-временной обработки сигналов, а также ввести новые понятия для математической формализации описания сверхширокополосных полей и их обработки в антенных системах.

Целью работы является обоснование коррекции и введения новых понятий и определений для математической формализации пространственно-временной обработки полей в сверхширокополосных антеннах и антенных решетках (АР).

1. Апертурные характеристики антенн по напряженности полей

Амплитудно-фазовое распределение (АФР) чувствительности элементов $d\vec{r}'$ в окрестностях координат различных точек $\vec{r}'$ некоторой сплошной апертуры на каждой конкретной частоте f целесообразно представить таким выражением

$$\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)=\dot{I}_b\left(f,\vec{r}'\right)\exp\left(-j2\pi f\frac{\vec{\vartheta}_0\vec{r}'}{c}\right). \qquad (1)$$

Экспоненциальный множитель в этом выражении является коэффициентом передачи идеализированных задерживающих устройств в каждой из точек $\vec{r}'\in D'$ на времена задержек $\vec{\vartheta}_0\vec{r}'c^{-1}$. Он обеспечивает фокусировку антенной системы на направление $\vec{\vartheta}_0$. Практически подключить линию задержки к каждой точке апертуры невозможно. Но, например, в параболических антеннах этот множитель возникает естественным образом при смещении в фокальной плоскости облучателя. $\dot{I}_b\left(f,\vec{r}'\right)$ – некоторое базовое АФР, в простейшем случае, имеющее постоянное значение равное единице в области раскрыва антенны. В более сложных случаях с целью оптимизации формы диаграммы направленности АФР корректируют весовыми окнами Хемминга, Хана, Кайзера, Кравченко и др.

Для антенных решеток с неподвижными элементарными антеннами и одинаковыми базовыми АФР элементарных антенн её полное АФР $\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)$ можно представить выражением

$$\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)=\sum_{i=1}^{N}\dot{I}_b\left(f,\vec{r}'-\vec{r}_i'\right)\exp\left(-j2\pi f\frac{\vec{\vartheta}_0\vec{r}_i'}{c}\right). \qquad (2)$$

Здесь задержки поля осуществляются после его приема на выходах каждой из элементарных антенн. После синфазного сложения задержанных сигналов происходит фокусировка антенны на заданное направление $\vec{\vartheta}_0$. Если необходимо сфокусировать всю АР, включая все элементарные антенны, на направление $\vec{\vartheta}_0$, то моделью соответствующей АФР может служить такое ее математическое представление

$$\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)=\exp\left(-j2\pi f\frac{\vec{\vartheta}_0\vec{r}'}{c}\right)\left[\sum_{i=1}^{N}\dot{I}_b\left(f,\vec{r}'-\vec{r}_i'\right)\right]. \quad (3)$$

Для технической реализации такой АФР необходимо в простейших случаях либо сместить все облучатели в фокальных плоскостях элементарных антенн, либо повернуть все антенны на заданные углы, соответствующие вектору $\vec{\vartheta}_0$, и при этом осуществить на выходах каждой антенны соответствующие задержки.

Диаграмма направленности (ДН) сверхширокополосной антенной системы и её АФР на каждой конкретной частоте f связаны парой взаимно обратимых преобразований Фурье

$$\begin{aligned}\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}\right)&=F_{\vec{r}'}^{-1}\left\{\dot{I}\left(f,\vec{r}'\right)\right\}=\\&=\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{I}\left(f,\vec{r}'\right)\exp\left(j2\pi f\vec{\vartheta}\frac{\vec{r}'}{c}\right)d\vec{r}',\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\dot{I}\left(f,\vec{r}'\right)&=F_{\vec{\vartheta}}\left\{\left(fc^{-1}\right)^2\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}\right)\right\}=\\&=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\left(\frac{f}{c}\right)^2\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}\right)\exp\left(-j2\pi f\,\vec{\vartheta}\frac{\vec{r}'}{c}\right)d\vec{\vartheta},\end{aligned} \quad (5)$$

где $F_{\vec{r}'}^{-1}\{\cdot\}$ − оператор обратного преобразования Фурье по переменной $\vec{r}$, $F_{\vec{\vartheta}}\{\cdot\}$ – оператор прямого преобразования Фурье по переменной $\vec{\vartheta}$.

Если в элементы апертуры введены устройства задержек с коэффициентами передачи $\exp\left(-j2\pi f\vec{\vartheta}_0\vec{r}'c^{-1}\right)$, обеспечивающие фокусировку антенной системы на направление $\vec{\vartheta}_0$, то

$$\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)=F_{\vec{r}'}^{-1}\left\{\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\}, \quad (6)$$

$$\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)=F_{\vec{\vartheta}}\left\{\left(f\,c^{-1}\right)^2\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right\}. \quad (7)$$

Важным понятием, характерным в большинстве случаев для широкополосных и сверхширокополосных систем, является пространственно-временная импульсная характеристика (ПВИХА) апертуры антенной системы. По аналогии с импульсной характеристикой линейного четырехполюсника, являющейся обратным преобразованием Фурье его коэффициента передачи

$$h(t)=F^{-1}\left\{\dot{K}(j2\pi f)\right\}, \quad (8)$$

ПВИХА определяется в виде обратного преобразования Фурье АФР по переменным t и f

$$\begin{aligned}h_A\left(t,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)&=F^{-1}\left\{\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\}=\\&=\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\exp\left(j2\pi f\,t\right)df,\\ \dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)&=F\left\{h_A\left(t,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\}=\\&=\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}h_A\left(t,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\exp\left(j2\pi f\,t\right)dt.\end{aligned} \quad (9)$$

Взаимосвязь ПВИХА с ДН находим, подставив в первую формулу (9) выражение (7). В результате получим

$$\begin{aligned}h_A\left(t,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)&=F^{-1}\left\{\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\}=\\&=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\left(\frac{f}{c}\right)^2\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\exp\left(j2\pi f\left(t-\vec{\vartheta}\frac{\vec{r}'}{c}\right)\right)dfd\vec{\vartheta},\end{aligned} \quad (10)$$

или $$h_A\left(t,-\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)=V_F^{-1}\left\{\left(\frac{f}{c}\right)^2\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right\}. \quad (11)$$

Это преобразование обратимо

$$V_F\left\{h_A\left(t,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\}=\dot{F}\left(f,-\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right), \quad (12)$$

$$V_F\left\{h_A\left(t,-\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\}=\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right). \quad (13)$$

2. Корреляционные и энергетические апертурные характеристики СШП антенн

Следующей характеристикой СШП антенных систем является спектральная плотность пространственной автокорреляционной функции (СППАФ) АФР

$$\begin{aligned}\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)&=\\&=\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\dot{I}^*\left(f,\vec{r}'-\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)d\vec{r}'.\end{aligned} \quad (14)$$

По аналогии с пространственной функцией чувствительности, используемой преимущественно для описания узкополосных антенных систем в радиоастрономии [4, 5], эту функцию, как функцию частоты f, также можно назвать спектральной плотностью пространственной функции чувствительности (СППФЧ) АФР.

Запишем ДН по мощности $\left|\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_1\right)\right|^2$:

$$\begin{aligned}\left|\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2&=\left|\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\exp\left(j2\pi f\vec{\vartheta}\frac{\vec{r}'}{c}\right)d\vec{r}'\right|^2=\\&=\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{I}\left(f,\vec{r}_1',\vec{\vartheta}_0\right)\dot{I}^*\left(f,\vec{r}_2',\vec{\vartheta}_0\right)\times\\&\times\exp\left(j2\pi f\vec{\vartheta}\frac{\vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{r}_1'd\vec{r}_2'=\left|\vec{\rho}'=\vec{r}_1'-\vec{r}_2'\right|=\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{D'(\vec{\rho}',-\infty)}^{\infty} \dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\exp\left(j2\pi f\,\vec{\vartheta}\frac{\vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{\rho}' = \qquad (15)$$
$$= F_{\vec{\rho}'}^{-1}\left\{\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\},$$

где $F_{\vec{\rho}'}^{-1}\{\cdot\}$ – оператор пространственного преобразования Фурье.

Обратно

$$\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right) =$$
$$= \int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\left(\frac{f}{c}\right)^2\left|\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2\exp\left\{-j2\pi f\,\vec{\vartheta}\frac{\vec{\rho}'}{c}\right\}d\vec{\vartheta} = \qquad (16)$$
$$= \left(\frac{f}{c}\right)^2 F_{\vec{\vartheta}}\left\{\left|\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2\right\}.$$

Таким образом, СППАФ (СППФЧ) АФР на каждой частоте f во временном спектре СШП сигнала является пространственным спектром ДН антенной системы по мощности. Применим к СППАФ АФР обычное обратное преобразование Фурье по временным частотам

$$F_f^{-1}\left\{\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\} =$$
$$= \int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\dot{R}_{APD}\left(f,\Delta\vec{r}',\vec{\vartheta}_1\right)\exp\left(j2\pi ft\right)df = \qquad (17)$$
$$= F_f^{-1}\left\{\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\dot{I}^*\left(f,\vec{r}'-\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)d\vec{r}'\right\}.$$

Учитывая выражения (9) для ПВИХА, находим

$$F_f^{-1}\left\{\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\dot{I}^*\left(f,\vec{r}'-\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\} =$$
$$= h_A\left(t,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\otimes h_A\left(-t,\vec{r}'-\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right) =$$
$$= \int\limits_{-\infty(T)}^{\infty} h_A\left(t,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)h_A\left(t-\tau,\vec{r}'-\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)dt = \qquad (18)$$
$$= R_{h_A}\left(\tau,\vec{r}',\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right),$$

где $R_{h_A}\left(\tau,\vec{r}',\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$ – автокорреляционная функция ПВИХА.

Тогда

$$F_f^{-1}\left\{\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\} =$$
$$= \int\limits_{-\infty(D')}^{\infty} R_{h_A}\left(\tau,\vec{r}',\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)d\vec{r}' = . \qquad (19)$$
$$= R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right).$$

Здесь, в отличие от СППАФ (СППФЧ) АФР $\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$, функцию $R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$ назовем функцией пространственно-временной чувствительности антенной системы (ФПВЧ).

Обратно

$$F_t\left\{R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\} =$$
$$= \int\limits_{-\infty(T)}^{\infty} R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\exp\left(-j2\pi f\tau\right)d\tau = \qquad (20)$$
$$= \dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right).$$

Функции $\left|\dot{F}\left(f\ ,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2$ и $R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$ связаны V_F - преобразованиями

$$V_F\left[R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right] =$$
$$\int\limits_{-\infty(D',\vec{\rho}')}^{\infty}\int\limits_{(-\infty)T}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\dot{R}_{APD}\left(f_1,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_1\right)\exp\left(j2\pi f_1\tau\right)df_1\right\}\times$$
$$\times\exp\left[-j2\pi f\left(\tau+\frac{\vec{\vartheta}\,\Delta\vec{r}'}{c}\right)\right]d\tau d\vec{\rho}' =$$
$$= \int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\int\limits_{-\infty(D',\vec{\rho}')}^{\infty}\int\limits_{-\infty(D')}^{\infty}\dot{I}\left(f_1,\vec{r}_1',\vec{\vartheta}_1\right)\dot{I}^*\left(f_1,\vec{r}_1'-\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_1\right)\times$$
$$\times\exp\left(-j2\pi f\frac{\vec{\vartheta}\vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{r}_1'd\vec{\rho}'\times$$
$$\times\int\limits_{(-\infty)T}^{\infty}\exp\left[j2\pi\left(f_1-f\right)\tau\right]d\tau df = \left|\dot{F}\left(f,-\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_1\right)\right|^2.$$

Таким образом,

$$\left|\dot{F}\left(f\ ,-\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2 = V_F\left\{R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\},$$
$$R_{APD}\left(\tau,-\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right) = \qquad (21)$$
$$= V_F^{-1}\left\{\left(\frac{f}{c}\right)^2\left|\dot{F}\left(f\ ,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2\right\}.$$

Преобразования (21)связывают зеркальные образы соответствующих функций при значениях переменных $-\vec{\rho}'$ и $-\vec{\vartheta}$.

Обобщая ранее введенные связи, запишем

$$\left|\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2 = F_{\vec{\rho}'}^{-1}\left\{\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\},$$
$$\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right) = \left(\frac{f}{c}\right)^2 F_{\vec{\vartheta}}\left\{\left|\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2\right\}, \qquad (22)$$

$$F_t\left\{R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\} = \dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right),$$
$$F_f^{-1}\left\{\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)\right\} = R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right), \qquad (23)$$

где $F_t\{\cdot\}$, $F_f^{-1}\{\cdot\}$ – операторы обычных время-частотных преобразований Фурье, а $F_{\vec{\vartheta}}\{\cdot\}, F_{\vec{\rho}'}^{-1}$ – пространственных.

3. Спектральная и угловая плотности функций когерентности

Определим понятие спектральной плотности комплексной функции пространственной когерентности (СПКФПК) принимаемого излучения.

Описание узкополосных систем апертурного синтеза не требовало введения такого понятия, т.к. эта функция представлялась естественным образом на центральной частоте настройки узкополосной системы. В широкополосном и сверхширокополосном вариантах имеет место континуальный набор частот в соответствующей полосе, требующий более углубленного описания этой функции в зависимости от частоты f. В работах [1, 2] была определена связь пространственно-временной корреляционной функции $R(\vec{\rho}',\tau)=\langle s(\vec{r}',t)s(\vec{r}'\pm\vec{\rho}',t\pm\tau)\rangle$ ($\langle\cdot\rangle$ – знак статистического усреднения) принимаемых сигналов $s(\vec{r}',t)$ в области раскрыва антенны $\vec{r}'=(x',y')\in D'$ и двухсторонней по переменной f ($f\in(-\infty,\infty)$) спектральной яркости $B(\vec{\vartheta},f)$ протяженного источника радиотеплового излучения парой взаимно обратимых V_F - и V_F^{-1}-преобразований

$$R(\vec{\rho}',\tau)=V_F^{-1}\left\{B\left(\vec{\vartheta},f\right)\right\}= \\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B\left(f,\vec{\vartheta}\right)\exp\left\{j2\pi f\left(\tau+\frac{\vec{\vartheta}\vec{\rho}'}{c}\right)\right\}df\,d\vec{\vartheta}. \qquad (24)$$

Спектральная яркость $B\left(f,\vec{\vartheta}\right)$ определяется формулой

$$\left\langle\dot{A}(\vec{\vartheta}_1,f_1)\dot{A}^*(\vec{\vartheta}_2,f_2)\right\rangle= \\ =B\left(\vec{\vartheta}_1,f_1\right)\delta\left(\vec{\vartheta}_1-\vec{\vartheta}_2\right)\delta\left(f_1-f_2\right), \qquad (25)$$

где $\dot{A}(\vec{\vartheta},f)=V_F\left\{s(\vec{r}',t)\right\}$ – спектрально-угловая плотность комплексной амплитуды излучения [1, 2].

Выражение (24) можно записать так

$$R(\vec{\rho}',\tau)=\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\dot{R}_B\left(f,\vec{\rho}'\right)\exp\left(j2\pi f\,\tau\right)df= \\ =F^{-1}\left\{\dot{R}_B\left(f,\vec{\rho}'\right)\right\},$$

где функция

$$\dot{R}_B\left(f,\vec{\rho}'\right)=F_{\vec{\vartheta}}^{-1}\left[B\left(f,\vec{\vartheta}\right)\right]=F\left[R\left(\tau,\vec{\rho}'\right)\right]= \\ =\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}B\left(f,\vec{\vartheta}\right)\exp\left(j2\pi f\frac{\vec{\vartheta}\ \vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{\vartheta} \qquad (26)$$

является (в соответствии с теорией преобразований Фурье) спектральной плотностью комплексной амплитуды преобразуемой функции $R(\vec{\rho}',\tau)$ по переменной времени τ, которую целесообразно определить как СПКФПК.

При $\tau=0$ и $\rho'=0$ получим среднюю мощность излучения

$$R(0,0)=P_{average}\left[W/m^2\right]= \\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}B\left(f,\vec{\vartheta}\right)df\,d\vec{\vartheta}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}I\left(\vec{\vartheta}\right)d\vec{\vartheta}, \qquad (27)$$

отнесенную к единичной площади элемента раскрыва $d\vec{r}'$ с координатами $\vec{r}'$.

Здесь $I\left(\vec{\vartheta}\right)$ – угловая плотность средней мощности излучения (интегральной яркости, интенсивности), $\dim I\left(\vec{\vartheta}\right)=\frac{W}{sr\cdot m^2}$.

Также в работах [1, 2] была установлена связь комплексной пространственно-временной корреляционной функции (функции когерентности) $\dot{\Gamma}(\tau,\vec{\rho}')=\left\langle\dot{s}(\vec{r}',t)\dot{s}^*(\vec{r}'\pm\vec{\rho}',t\pm\tau)\right\rangle$ аналитических случайных процессов $\dot{s}\left(\vec{r}',t\right)=s\left(\vec{r}',t\right)+js_{\perp}\left(\vec{r}',t\right)$ с удвоенной односторонней спектрально-угловой плотностью комплексной амплитуды $2\dot{A}(\vec{\vartheta},f)$, $f\in(0,\infty)$, и односторонней спектральной яркости излучения $4B\left(f,\vec{\vartheta}\right)$ парой взаимно обратимых V_F -преобразований

$$\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}',\tau\right)=V_F^{-1}\left\{4B\left(\vec{\vartheta},f\right)\right\}= \\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}4B\left(\vec{\vartheta},f\right)\exp\left\{j2\pi f\left(\tau+c^{-1}\vec{\vartheta}\vec{\rho}'\right)\right\}dfd\vec{\vartheta}, \qquad (28) \\ f^{-2}c^2\,4B\left(\vec{\vartheta},f\right)=V_F\left\{\dot{\Gamma}\left(\vec{\rho}',\tau\right)\right\}.$$

Для характеристики узкополосных сигналов целесообразно ввести определение угловой плотности комплексной функции временной когерентности (УПКФВК) и связать её с угловой плотностью интенсивности (УПИ) излучения. При выполнении условия ПВУ (КМП) во втором слагаемом показателя экспоненты вместо текущей частоты можно поставить значение центральной частоты $f\approx f_0$

$$\dot{\Gamma}\left(\tau,\vec{\rho}'\right)=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}4B\left(f,\vec{\vartheta}\right)\exp\left(j2\pi f\,\tau\right)df\right\}\times \\ \times\exp\left(j2\pi f_0\frac{\vec{\vartheta}\vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{\vartheta}= \qquad (29) \\ =\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\dot{\Gamma}\left(\tau,\vec{\vartheta}\right)\exp\left(j2\pi f_0\frac{\vec{\vartheta}\vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{\vartheta}.$$

При $\vec{\rho}'=0$ на выходе элемента элементе $d\vec{r}'$ с координатами $d\vec{r}'$

$$\dot{\Gamma}\left(\tau,0\right)=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\dot{\Gamma}\left(\tau,\vec{\vartheta}\right)d\vec{\vartheta}. \qquad (30)$$

В этом случае можно определить величину $\dot{\Gamma}\left(\tau,\vec{\vartheta}\right)d\vec{\vartheta}$ по переменной τ как комплексную функцию временной когерентности излучения, наблюдаемого в интервале углов $d\vec{\vartheta}$ в направлении $\vec{\vartheta}$, а $\dot{\Gamma}\left(\tau,\vec{\vartheta}\right)$ – как её угловую плотность.

При $\tau = 0$

$$\dot{\Gamma}(0,\vec{\rho}') = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Gamma}\left(0,\vec{\vartheta}\right)\exp\left(j2\pi f_0 \frac{\vec{\vartheta}\vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{\vartheta} = \int_{-\infty}^{\infty} I\left(\vec{\vartheta}\right)\exp\left(j2\pi f_0 \frac{\vec{\vartheta}\vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{\vartheta}, \qquad (31)$$

получаем связь пространственным двумерным преобразованием Фурье УПИ

$$I\left(\vec{\vartheta}\right) = \dot{\Gamma}\left(0,\vartheta\ \right) = \int_{-\infty}^{\infty} 4B\left(f\ ,\vartheta\ \right)df \qquad (32)$$

с пространственной комплексной функцией когерентности $\dot{\Gamma}(0,\vec{\rho}')$ стохастического сигнала $s\left(t,\vec{r}'\right)$.

Применяя обратное преобразование, находим:

$$I\left(\vec{\vartheta}\right) = \left(f_0/c\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Gamma}(0,\vec{\rho}')\exp\left(-j2\pi f_0 \frac{\vec{\vartheta}\vec{\rho}'}{c}\right)d\vec{\rho}'. \qquad (32)$$

Эти формулы совпадают с формулами теоремы Ван Циттерта-Цернике при выполнении условий КМП (ПВУ).

4. ДН СШП антенны по мощности

Одними из основных задач апертурного синтеза в радиоастрономии и дистанционном зондировании является построение радиояркостных изображений (РЯИ) излучающих объектов в виде функций пространственных координат спектральных $B\left(f,\vec{\vartheta}\right)$ или УПИ $I\left(\vec{\vartheta}\right)$ яркостей. Такие РЯИ являются энергетическими изображениями источников излучения, пропорциональные средним мощностям принимаемых сигналов, или их дисперсиям, если рассматривать эти сигналы в виде случайных процессов [3 – 5]. Результаты теоретических расчетов с учетом практически имеющихся факторов, влияющих на качество изображений, или результаты практических измерений, будем называть оценками РЯИ $\hat{B}\left(f,\vec{\vartheta}\right)$, $\hat{I}\left(\vec{\vartheta}\right)$, где "$\hat{}$" – знак оценки.

В оценках РЯИ как результатах обработки принятых сигналов, необходимо учитывать реальные конечные полосы частот приемных устройств, заданные их коэффициентами передачи $\dot{K}(j2\pi f)$, конечность размеров апертур D', вид АФР $\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)$, наличие помех и др.

Принимаемый стохастический сигнал (без учета помех) после фокусировки антенной системы на направление $\vec{\vartheta}_0$ (с помощью АФР $\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)$ и интегрирования по апертуре D'), являющегося в свою очередь результатом интегрирования спектрально-угловой плотности комплексной амплитуды излучения $\dot{A}(\vec{\vartheta},f)$ по всем частотам f и направлениям $\vec{\vartheta}$, можно записать в виде

$$s\left(t,\vec{\vartheta}_0\right) = \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\int_{-\infty(F)}^{\infty}\int_{-\infty(D')}^{\infty} \dot{K}(j2\pi f)\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\dot{A}\left(f,\vec{\vartheta}\right)\times \exp\left\{j2\pi f\left(t+\frac{\vec{\vartheta}\,\vec{r}'}{c}\right)\right\}d\vec{r}'df\,d\vec{\vartheta} = \int_{-\infty(F)}^{\infty}\int_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\begin{pmatrix}\dot{K}(j2\pi f)\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\\ \dot{A}\left(f,\vec{\vartheta}\right)\exp\left\{j2\pi f\,t\right\}\end{pmatrix}df\,d\vec{\vartheta}, \qquad (33)$$

где

$$\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right) = \int_{-\infty(D')}^{\infty} \dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\exp\left(j2\pi f\frac{\vec{\vartheta}\,\vec{r}'}{c}\right)d\vec{r}'. \qquad (34)$$

Полагаем, что заданное АФР обеспечивающее фокусировку антенной системы на направление $\vec{\vartheta}_0$, ограничено размерами раскрыва $\vec{r}' \in D'$ и при необходимости скорректировано весовой функцией (окном) $O\left(\vec{r}'\right)$ (Хемминга, Кайзера, Кравченко и др.),

$$\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right) = O\left(\vec{r}'\right)\exp\left(j2\pi f\frac{\vec{\vartheta}_0\,\vec{r}'}{c}\right),\quad \vec{r}' \in D'. \qquad (35)$$

Тогда, очевидно, что оценка РЯИ $\hat{I}\left(\vec{\vartheta}_0\right)$ – это дисперсия сигнала $\sigma_s^2\left(\vec{\vartheta}_0\right)$, представленная как функция координат различных элементов исследуемого протяженного объекта, в данном случае, как функция угловых координат $\vec{\vartheta}_0$ этих элементов. Дисперсию, как это принято в теории случайных процессов, будем отождествлять с их средней мощностью $P_{average}\left(\vec{\vartheta}_0\right)$, совпадающую в прикладных задачах радиоэлектроники со средней мощностью, выделяемой при протекании тока на сопротивлении единичной величины

$$\hat{I}\left(\vec{\vartheta}_0\right) = \sigma_s^2\left(\vec{\vartheta}_0\right) = P_{average}\left(\vec{\vartheta}_0\right) = \left\langle s^2\left(t,\vec{\vartheta}_0\right)\right\rangle, \qquad (36)$$

или с учетом (34)

$$\hat{I}\left(\vec{\vartheta}_0\right) = \int_{-\infty(F)}^{\infty}\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|^2\int_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\left|\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2\times B\left(f,\vec{\vartheta}\right)d\vec{\vartheta}df = \int_{-\infty(F)}^{\infty}\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|^2 G\left(f,\vec{\vartheta}_0\right)df. \qquad (37)$$

Здесь $G\left(f,\vec{\vartheta}_0\right)$ – энергетический спектр случайного сигнала, соответствующего элементу РЯИ в окрестности направления $\vec{\vartheta}_0$

$$G\left(f,\vec{\vartheta}_0\right) = B_A\left(f,\vec{\vartheta}_0\right) = \int_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\left|\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)\right|^2 B\left(f,\vec{\vartheta}\right)d\vec{\vartheta} = \hat{B}\left(f,\vec{\vartheta}_0\right), \qquad (38)$$

который является антенной спектральной яркостью $B_A(f,\vec{\vartheta}_0)$, т.е. спектральной яркостью $B(f,\vec{\vartheta})$, сглаженной ДН по мощности $\left|\dot{F}(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)\right|^2$. Эту функцию, учитывающую влияние ДН, рассматривать как оценку спектральной яркости $\hat{B}(f,\vec{\vartheta}_0)$, а функцию $\hat{I}(\vec{\vartheta}_0)$, учитывающую и влияние ДН и влияние АЧХ $\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|$, как оценку интегральной яркости УПИ. Разрешающая способность полученных РЯИ зависит от формы ДН и вида АЧХ .

Во многих практических случаях можно считать, что энергетический спектр $G(f,\vec{\vartheta}_0)$, являясь усредненным спектром спектральной плотности мощности, постоянен в пределах АЧХ $\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|$. Тогда

$$\hat{I}(\vec{\vartheta}_0)= \\ =\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|^2 G(f,\vec{\vartheta}_0)df=G(f_0,\vec{\vartheta}_0)2\Delta F, \quad (39)$$

$$2\Delta F=\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|^2 df,$$

где f_0 – некоторая центральная частота в полосе частот $2\Delta F$,

$$G(f_0,\vec{\vartheta}_0)=B_A(f_0,\vec{\vartheta}_0)=\frac{P_{average}(\vec{\vartheta}_0)}{2\Delta F},$$

$$\dim G(f_0,\vec{\vartheta}_0)=\dim B_A(f_0,\vec{\vartheta}_0)=W/Hz.$$

Полагая постоянной в пределах АЧХ $\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|$ спектральную яркость $B(f,\vec{\vartheta})\approx B(f_0,\vec{\vartheta})$, оценку $\hat{I}(\vec{\vartheta}_0)$ можно также представить в виде

$$\hat{I}(\vec{\vartheta}_0)\approx \\ \approx\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|^2\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\left|\dot{F}(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)\right|^2 B(f,\vec{\vartheta})d\vec{\vartheta}df= \\ =\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}B(f_0,\vec{\vartheta})\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|^2\left|\dot{F}(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)\right|^2 dfd\vec{\vartheta}= \quad (40) \\ =\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}B(f_0,\vec{\vartheta})\Phi(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)d\vec{\vartheta},$$

где

$$\Phi(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)=\int\limits_{-\infty(F)}^{\infty}\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|^2\left|\dot{F}(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)\right|^2 df \ - \quad (41)$$

диаграмма направленности по мощности СШП антенной системы, сфокусированной на всех частотах в пределах АЧХ $\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|$ на направление $\vec{\vartheta}_0$.

В ряде случаев диаграмму направленности $\left|\dot{F}(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_1)\right|^2$ будем представлять так

$$\left|\dot{F}(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)\right|^2=A_{eff}(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)= \\ =\frac{c^2}{4\pi f^2}G_y(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)=A_{eff\,max}G_n(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0), \quad (42)$$

где A_{eff} – эффективная площадь антенны, $G_n(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_1)$ – нормированная (безразмерная) ДН, $G_y(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)=G_1G_2(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)$ – коэффициент усиления антенны, $G_2(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)$ – коэффициент направленного действия, G_1 – коэффициент полезного действия антенны, $c/f=\lambda$.

Тогда,

$$B_A(f,\vec{\vartheta}_0)=\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}\left|\dot{F}(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_1)\right|^2 B(f,\vec{\vartheta})d\vec{\vartheta}= \\ =A_{eff\,max}\int\limits_{-\infty(\Theta)}^{\infty}B(f,\vec{\vartheta})G_n(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)d\vec{\vartheta}. \quad (43)$$

Здесь целесообразно привести размерности основных физических величин. Пусть спектральная яркость $B(f,\vec{\vartheta})$ постоянна в пределах ДН в окрестности направления $\vec{\vartheta}_0$. Тогда

$$B_A(f,\vec{\vartheta}_0)=B(f,\vec{\vartheta}_0)A_{eff\,max}\Delta\Omega, \quad (44)$$

$$\dim B_A(f,\vec{\vartheta}_0)= \\ =\dim B(f,\vec{\vartheta}_0)\dim A_{eff\,max}\dim\Delta\Omega,$$

где

$$\dim\Delta\Omega=\dim\int\limits_{\theta}G_n(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)d\vec{\vartheta}=sr, \\ \dim A_{eff\,max}=m^2. \quad (45)$$

Если яркость $B(f,\vec{\vartheta})$ постоянна и в пределах ДН и в пределах $\left|\dot{K}(j2\pi f)\right|^2$, то

$$B(f_0,\vec{\vartheta}_0)=\frac{B_A(f_0,\vec{\vartheta}_0)}{\Delta\Omega\,A_{eff\,max}}= \\ =\frac{P_{average}(\vec{\vartheta}_0)}{2\Delta F\Delta\Omega\,A_{eff\,max}}\left[\frac{W}{Hz\cdot sr\cdot m^2}\right]/ \quad (46)$$

Эта размерность спектральной яркости соответствует общепринятой по ее определению. Заметим, что важным введенным здесь понятием является ДН СШП антенной системы, которую приближенно можно рассчитать по формуле

$$\Phi(\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)\approx\sum_{i=1}^{N}\left|\dot{K}(j2\pi f_i)\right|^2\left|\dot{F}(f_i,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0)\right|^2. \quad (47)$$

Выводы

Для СШП антенных систем введено понятие пространственно-временной импульсной характеристики (ПВИХА) апертуры

$$h_A\left(t,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)=F^{-1}\left[\dot{I}\left(f,\vec{r}',\vec{\vartheta}_0\right)\right]$$

и ее связи с ДН $\dot{F}\left(f,\vec{\vartheta}-\vec{\vartheta}_0\right)$.

Также введено понятие спектральной плотности пространственной автокорреляционной функции (СППАФ) АФР (или, что то же самое, спектральной плотности пространственной функции чувствительности (СППФЧ) АФР) $\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$ и показано, что она является пространственным спектром ДН антенной системы по мощности, зависящим от временной частоты.

На основе этих понятий дано определение функции пространственно-временной чувствительности антенной системы (ФПВЧ) $R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$ и ее связи со СППАФ АФР и ДН.

Определена связь функций $\dot{R}_{APD}\left(f,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$ и $R_{APD}\left(\tau,\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$ с автокорреляционной функцией ПВИХА $R_{h_A}\left(\tau,\vec{r}',\vec{\rho}',\vec{\vartheta}_0\right)$.

Применительно к обработке случайных СШП пространственно-временных процессов введено понятие спектральной плотности комплексной функции пространственной когерентности (СПКФПК) $\dot{R}_B\left(f,\vec{\rho}'\right)$ поля и ее связи со спектральной яркостью излучения $B\left(\vec{\vartheta},f\right)$ протяженного источника и пространственно-временной корреляционной функцией поля $R(\vec{\rho}',\tau)$ в области его регистрации антенной системой. Для узкополосных процессов определено понятие угловой плотности комплексной функции временной когерентности $\dot{\Gamma}\left(\tau,\vec{\vartheta}\right)$ и ее связи с УПИ $I\left(\vec{\vartheta}\right)$.

Обосновано определение ДН СШП по мощности в виде интеграла по частотам от ДН как функции частоты с весовым умножением на коэффициент передачи антенного тракта.

Список литературы

1. *Волосюк В.К. Преобразование полей и их корреляционных функций в спектральные характеристики протяженных источников широкополосного излучения / В.К. Волосюк // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1993. – Т. 36, № 6. – С. 27-30.*
2. *Волосюк В.К. Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации / В.К. Волосюк, В.Ф. Кравченко ; под ред. В. Ф. Кравченко. – М. : Физматлит, 2008. – 704 с.*
3. *Фалькович С.Е. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / С.Е. Фалькович, В.И. Пономарев, Ю.В. Шкварко. − М.: Радио и связь, 1989. – 344 с.*
4. *Томпсон Р. Интерферометрия и синтез в радиоастрономии / Р. Томпсон, Дж. Моран, Дж. Свенсон. − М.: Мир, 1989. – 668 с.*
5. *Построение изображений в астрономии по функциям когерентности / Под ред- К. ван Схонвелда. − М.: Мир, 1982. – 320 с.*

Надійшла до редколегії 10.02.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Баришев, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків.

МАТЕМАТИЧНА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ОСНОВНИХ ТЕРМІНІВ І ВИЗНАЧЕНЬ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЇ ОБРОБКИ НАДШИРОКОСМУГОВИХ СИГНАЛІВ

В.К. Волосюк, В.В. Павліков, О.М. Тимощук

Запропоновано ряд термінів і визначень для опису надширокосмугових антенних систем і сигналів. Такими поняттями є функція просторово-часової чутливості, спектральна щільність автокореляційної функції (спектральна щільність просторової функції чутливості) амплітудно-фазового розподілення, спектральна щільність функції просторової когерентності сигналу, визначення діаграми спрямованості надширокосмугового антеною системи та ін. Введені поняття і їх корекції необхідні для математичної формалізації алгоритмів просторово-мчасової обробки надширокосмугових полів. Розглянуто також окремі випадки виконання умови просторово-часової вузькосмуговості.

Ключові слова: *V_F-перетворення, надширокосмугові поля, просторово-часова обробка сигналів.*

MATHEMATICAL FORMALIZATION OF THE KEY TERMS AND DEFINITIONS FOR PROBLEMS SOLVING OF SPATIO-TEMPORAL ULTRAWIDEBAND SIGNALS PROCESSING

V.K. Volosyuk, V.V. Pavlikov, O.M. Tymoshchuk

Same concepts and definitions to describe the ultra-wideband antenna systems and received signals are given. There are the function of the spatio-temporal sensitivity, the spectral density of the autocorrelation function (spectral density function of the spatial sensitivity) of amplitude-phase distribution, the spatial coherence of the spectral density function of the signal, the determination of the antenna pattern of ultra-wideband antenna system, etc. These concepts and their corrections are needed to the formalization of mathematical algorithms for spatio-temporal processing of ultrawideband fields. Some special cases for the condition of quazimonochromatic approximation are considered.

Key words: *V_F-transformation, ultra-wideband fields, space-temporal signal processing.*