УДК 681.5

Р.В. Захарченко

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛООБМІНУ ЧЕРЕЗ ЕЛЕМЕНТАРНИЙ ШАР ЗЕРНА

У статті розглянуто можливість опису процесу сушіння зерна у шахтній прямоточній зерносушарці як об'єкта з розподіленими параметрами у декартовій системі координат.

Ключові слова: *об'єкти з розпjділеними параметрами, тепловий потік, конвективний теплообмін, нескінченно тонкий шар, рівняння теплового баланса.*

Вступ

Методика отримання, дослідження та перетворення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами показала громіздкість отримуваних залежностей, а також значну складність їх застосування. В зв'язку з чим, математичні моделі об'єктів з просторовим розподілення параметрів використовувались досить рідко. їх старалися замінити моделями із зосередженими параметрами, що, звичайно, зменшувало точність математичних моделей і нерідко приводило до неадекватності отримуваних моделей об'єктам моделювання.

Моделювання таких об'єктів на ЕЦОМ в значній мірі зменшує складність врахування просторового розподілення параметрів, що робить можливим використання моделей з розподіленими параметрами в інженерних розрахунках. На програму ЕОМ доцільно покласти обчислення коефіцієнтів і розв'язування отримуваних моделей. З такої цифрової моделі, якщо у тому є необхідність, можна виводити коефіцієнти моделі та результати розрахунків у тому вигляді, який потрібний дослідникам.

Моделювання об'єктів з розподіленими параметрами пов'язано з вибором певних просторових координат, в яких найбільш зручно представити розподілення параметрів у просторі. Використання такої системи координат визначає підхід до моделювання об'єктів, а також структуру моделі.

Сушіння зерна у шахтній прямоточній зерносушарці можна описати об'єктом з розподіленими параметрами у декартовій системі координат.

Опис процесу теплообміну

Припустити, що шар зерна у сушарці є однорідний теплопровідний шар товщиною δ, з коефіцієнтом теплопровідності λ температура якого змінюється лише по товщині вздовж просторової координати x, та в часі t. Тобто ми маємо одномірний нестаціонарний тепловий потік, що визначається температурою $\theta(x,t)$. Такий шар омивається середовищами, які мають з одного боку температуру $\theta_0(t)$, а з другого – $\theta_1(t)$. Теплообмін шару зерна з середовищами, що її омивають, – конвективний, у зв'язку з чим, як граничні уміови процесу теплопередачі ми можемо представити граничні умови 3-го роду:

$$-\lambda \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \alpha_0 \left[\theta_0(t) - \theta(x,t)\Big|_{x=0}\right]; \quad (1)$$

$$-\lambda \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\delta} = \alpha_1 \left[\theta(x,t)\Big|_{x=\delta} - \theta_1(t)\right], \quad (2)$$

де α_0 та α_1 – коефіцієнти тепловіддачі відповідно від одного середовища до шару зерна та від шару до іншого середовища, що його омиває.

Виділимо всередині шару, що розглядається, на відстані x від однієї поверхні нескінченно тонкий шар товщиною dx, розташований перпендикулярно тепловому потоку з однаковою температурою $\theta(x,t)$. Цей шар можна розглядати як акумулюючу ємкість. Ця акумулююча єікість буде нескінченно тонкою, товщиною dx. Складемо рівняння теплового баланса у динаміці для цієї акумулюючої ємкості:

$$Q_x - Q_{x+dx} = Q_a \quad (3)$$

де Q_x – тепловий потік вздовж координати X, що входить в цю акумулюючу ємкість шару,

$$Q_x = -\lambda \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} F \quad (4)$$

де F – площа теплообмінного шару з температурою $\theta(x,t)$;

Q_{x+dx} - тепловий потік, що виходить із нескінченно малої акумулюючої ємкості, тобто із виділеного шару,

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \quad (5)$$

де $\frac{\partial Q_x}{\partial x}$ – градієнт зміни теплового потоку Q_x вздовж координати x.

Визначимо його, підставляючи значення Q_x із (4):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} F\right) = -\lambda \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} F, \quad (6)$$

Q_a – теплота, що акумулюється в аккумулюючій ємкості під час зміни її температури,

$$Q_a = F dx \rho c \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t}, \quad (7)$$

де ρ та c – відповідно щільність та теплоємкість шару зерна.

Підставимо складові (5), (6) та (7) в рівняння динаміки (3):

$$Q_x - \left[Q_x + \left(-\lambda \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} F dx\right)\right] = F dx \rho c \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t}, \quad (8)$$

яке після скорочень буде мати вигляд:

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}, \quad (9)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності,

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}. \quad (10)$$

Рівняння (9) разом з граничними умовами (1) та (2) буде динамічною моделлю процесу теплопередачі через шар зерна. Щоб цей процес був повністю заданим, потрібно ще початкове значення температури $\theta(x,t)$,

$$\theta(x,t)\big|_{t=0} = \theta^0(x). \quad (11)$$

Отриману динамічну модель процесу теплопередачі перетворимо в алгоритм для розв'язання на ЕЦОМ.

Для цього рівняння динаміки (9) акумулюючої ємкості, граничні (1), (2) та початкові (11) умови приведемо до дискретної форми.

Перетворення почнемо із незалежних змінних, яких у розглянутій динамічній моделі є дві – x та t. Виразимо їх у вигляді дискретних функцій:

$$x = sh, \quad (12)$$

де s – номер поточного кроку, s = 0,1,2,...; h – крок дискретизації вздовж координати x;

$$t = \nu\tau, \quad (13)$$

де ν – номер поточного кроку, y= 0,1,2,...; τ – крок дискретизації вздовж координати t.

Враховуючи товщину стінки δ крок дискретизації h можна виразити:

$$h = \frac{\delta}{n}, \quad (14)$$

де n – число шарів, на які можна розбити шар зерна по товщині.

Тепер розглянемо приведення до дискретної форми залежних змінних $\theta(x,t)$, $\theta_0(t)$, $\theta_1(t)$ та похідних вихідної функції $\theta(x,t)$.

Неперервну функцію $\theta(x,t)$ з врахуванням (13) та (14) можна представити у вигляді дискретної:

$$\theta(x,t)\big|_{\substack{x=sh\\ t=\nu\tau}} = \theta_{s,\nu}. \quad (15)$$

Перетворимо до дискретного вигляду похідні вихідної функції див. (9) та (1):

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \cong \frac{\theta_{s,\nu+1} - \theta_{s,\nu}}{\tau}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} \cong \frac{\theta_{s-1,\nu} - 2\theta_{s,\nu} + \theta_{s+1,\nu}}{h^2}. \quad (17)$$

Підставимо вирази (16) та (17) у рівняння (9):

$$\frac{\theta_{s,\nu+1} - \theta_{s,\nu}}{\tau} = a \frac{\theta_{s-1,\nu} - 2\theta_{s,\nu} + \theta_{s+1,\nu}}{h^2}. \quad (18)$$

Розв'яжемо рівняння (18) відносно $\theta_{s,\nu+1}$:

$$\theta_{s,\nu+1} = q_1 \theta_{s,\nu} + q(\theta_{s-1,\nu} + \theta_{s+1,\nu}); \quad (19)$$
$$1 \le s \le n-1,$$

де

$$q = \frac{a\tau}{h^2} \quad (20)$$

$$q_1 = 1 - q. \quad (21)$$

Найвища точність апроксимації диференціального рівняння (9) різницевим рівнянням (19) має місце, коли $q \ge 1/6$ [6].

Стійкість розв'язування рівняння (19) досягається коли $q \le 1/2$.

Перетворимо до дискретної форми вхідні змінні:

$$\theta_0(t)\big|_{t=\nu\tau} = \theta_\nu^0;$$

$$\theta_1(t)\big|_{t=\nu\tau} = \theta_\nu^1.$$

З врахуванням цього, а також (15) та (16) перетворимо до дискретної форми рівняння граничних та початкових умов:

$$-\lambda \frac{\theta_{s+1,\nu} - \theta_{s,\nu}}{h}\bigg|_{s=0} = \alpha_0 \left(\theta_\nu^0 - \theta_{s,\nu}\big|_{s=0}\right),$$

звідки

$$\theta_{0,\nu} = C_1 \theta_{1,\nu} + C_2 \theta_\nu^0, \quad (22)$$

де

$$C_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha_0 h};\ C_2 = 1 - C_1;\ \theta_\nu^0 = \theta_0(t). \quad (23)$$

Гранична умова (2) в дискретній формі буде мати вигляд:

$$-\lambda \frac{\theta_{n,\nu} - \theta_{n-1,\nu}}{h} = \alpha_1 (\theta_{n,\nu} - \theta_\nu^1), \quad (24)$$

звідки

$$\theta_{n,v} = b_1\theta_{n-1,v} + b_2\theta_v^1 \qquad (25)$$

де

$$b_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha_1 h};\ b_2 = 1 - b_1;\ \theta_v^1 \cong \theta_1(t) \qquad (26)$$

Початкова умова (11) у дискретній формі буде мати вигляд:

$$\theta^0(x) = \theta(x,t)\Big|_{t=0} = \theta_{s,v}\Big|_{v=0} = \theta_{s,0} \qquad (27)$$

Рівняння (19), (22), (25) та (27) будуть алгоритмом дискретного моделювання динаміки теплового потоку через плоску стінку. Для програмування розв'язування цієї моделі на ЕЦОМ доцільно утворити цикл, в якому будуть використані рівняння алгоритму. Розрахунок коефіцієнтів цієї дискретної моделі (10), (20), (21), (23), (26) потрібно виконати до згаданого циклу.

Розрахунок часових характеристик об'єктів з розподіленими параметрами, як і розв'язування інших диференціальних рівнянь проводиться шляхом створення у циклу.

Для створення циклу розрахунку зміни температури $\theta_{s,v}$ у динаміці необхідно мати значення температури в розрахунковий момент часу $\theta_{s,v+1}$ та на попередньому кроці $\theta_{s,v}$ для цього використовуються масиви температур $\theta_{s,v+1}$ та $\theta_{s,v}$, тобто зміну температури по товщині шару зерна.

Висновок

Процеси конвективного теплообміну при сушінні зерна у шахтній зерносушарці описуються системою з розподіленими параметрами у декартовій системі координат. Отримані рівняння динаміки для зручності застосування переведено до дискретної форми.

Список літератури

1. *Ажогин В.В., Згуровский М. З. Машинное проектирование оптимальных систем управления пространственно-распределенными динамическими объектами. - Киев: Висшая школа, 1985. - 170с.*
2. *Батунер Л. М. Позин М. Е. Математические методы в химической технике. - Л.: Госхимиздат, 1960. - 636с.*
3. *Девятов В. Н. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. - Новосибирск: Издво СО АН СССР, 1964. - 232с.*
4. *Девятов Б.Н., Демиденко Н.Ф., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. - Красноярск: Книжное издво, 1976. - 310с.*
5. *Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. - М.: Наука, 1978. - 462с.*
6. *Ладиев Р. Я., Остапенко Ю.А., Кубрак А.И., Кваско М. З. Математическое описание объектов с распределенными параметрами.Ч.З. - Киев: КПИ, 1974. - 149 с.*
7. *Маковский В.А. Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами. - М.: Металлургия, 1971. - 384 с.*
8. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. - М.: Наука, 1984. -285 с.*
9. *Серов Е. П., Корольков В. П. Динамика процессов в тепло- и массообменных аппаратах. - М.: Энергия, 1967*
10. *Аверина Т. В., Кубрак Н. А. Динаміка елементів систем. - К.: УЗМН, 1998. - 224с.*
11. *И. Шевяков А. А., Яковлева Р. В. Инженерные методы расчёта динамики теплообменных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1968. – 320 с.*

Надійшла до редколегії 31.05.2016

Рецензент: д-р техн. наук, доц. О.В. Шульга, Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА ЧЕРЕЗ ЕЛЕМЕНТАРНЫЙ СЛОЙ ЗЕРНА

Р.В. Захарченко

В статье рассмотрена возможность описания процесса сушки зерна в шахтной прямоточной зерносушилке как объекта с распределенными параметрами в декартовой системе координат.

Ключевые слова: *объекты с распределенными параметрами, тепловой поток, конвективный теплообмен, бесконечно тонкий слой, уравнение теплового баланса.*

MODELING OF HEAT TRANSFER THROUGH THE ELEMENTARY LAYER OF GRAIN

R.V. Zaharchenko

The article considers the possibility of describing the process of drying the grain in the dryer as an object with distributed parameters in the cartesian coordinate system.

Keywords: *objects with distributed parameters, heat flux, convective heat transfer, infinitely thin layer, heat balance equation.*