УДК 519.654:621.391.82

М.М. Гонтар, А.М. Сільвестров, Д.М. Нелюба

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава

АНАЛІЗ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПРИ ЗАШУМЛЕНОСТІ СИГНАЛІВ

Беручи метод найменших квадратів (МНК) як базовий при обробці зашумлених сигналів розглядаємо вплив співвідношення сигнал-шум на зміщення оцінок реальних даних. Також було розглянуто узагальнений метод найменших квадратів (УМНК) для зважених (відфільтрованих) даних. Показано, що для кожних конкретних випадків існує оптимальне значення згладжуючого ефекту фільтра, за якого норма зміщення буде мінімальною. Отримано, що чим далі рознесені спектри сигналу і перешкоди, тим краще оцінки квазіоптимального УМНК.

Ключові слова: *метод найменших квадратів, зміщення оцінок, згладжуючий фільтр.*

Вступ

Природа перешкод полягає в випадковій зміні параметрів каналу передачі [1]. При передачі сигнал піддається спотворенням внаслідок того, що коефіцієнт передачі каналу не є постійним числом; властивості каналу описуються частотними або часовими характеристиками, що визначають так звані лінійні спотворення. Крім того, канал може вносити і нелінійні спотворення, обумовлені нелінійністю тих чи інших ланок каналу.

Як лінійні, так і нелінійні спотворення обумовлені відомими характеристиками каналу, а тому, принаймні, можуть бути усунені шляхом належної корекції. Тому спотворення слід чітко відокремити від дії перешкоди випадкового характеру, яка заздалегідь не може бути відома.

Якщо ж коефіцієнт передачі каналу зазнає випадкової зміни, то вплив цих змін слід вже розглядати як дію випадкової перешкоди, яка і є мультиплікованою перешкодою.

Постановка задачі

Практична постановка задачі містить в собі суттєву долю невизначеності статистичних властивостей перешкод у вимірах як вхідних X, так і вихідних Y даних про об'єкт, що досліджується, модель якого може бути представлено як

$$Y^* = X \cdot \beta^* + \varepsilon^*, \tag{1}$$

де Y^*, X^*, ε^* – точні значення змінних виходу, входу і розузгодження, за умови, що оцінку β^* для цих значень отримано за методом найменших квадратів [3]:

$$\beta^* = (X^{*T}X^*)^{-1}X^{*T}\cdot Y^* = C^* Y^*,\ (X^{*T}X^*)^{-1}X^{*T} = C^*. \tag{2}$$

Тобто, за умови:

$$\beta^* = \arg(\min \varepsilon^{*T}\cdot \varepsilon^*). \tag{3}$$

На практиці МНК-оцінку (2) отримують по збуреним завадами N_x і N_y даним:

$$X = X^* + N_x,\ Y = Y^* + N_y, \tag{4}$$

де $X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1)\ldots & x_i(1)\ldots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(1)\ldots & x_i(2)\ldots & x_n(2) \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ x_1(м) & x_2(м)\ldots & x_i(м)\ldots & x_n(м) \end{bmatrix}$,

$Y^T = [y(1)\ y(2)\ldots\ y(м)]$,

$x_i(j) = x_i^*(j) + N_{x_i}(j)$,

$y_i(j) = = y_i^*(j) + N_y(j),\ j = \overline{1, M}.$

Тоді МНК-оцінка (2) $\hat\beta$ вектора β^* знаходиться з умови (3), але вже для реальних даних (4) у звичайній

$$\hat\beta = (X^TX)X^TY = C\cdot Y,\ C = (X^TX)X^T, \tag{5}$$

або у рекурентній

$$\hat\beta(j+1) = \hat\beta(j) + P(j+1)X(j)\left[Y(j) - X^T(j)\cdot\hat\beta(j)\right],$$

$$P(j+1) = P(j) - P(j)X(j)\,[X^T(j)P(j)X(j)+1]^{-1}\cdot X^T(j)\cdot P(j), \tag{6}$$

формах з початковими умовами $P(0)$, $\hat\beta(0)$.

Якщо останні невідомі, то приймають, що $\hat\beta(0) = 0,\ P(0) = \sigma_{\beta(0)}{}^2\cdot I,\ \sigma_{\beta(0)}{}^2 = \to \infty$.

Основний матеріал

Покладемо для спрощення аналізу, що перешкоди N_x і N_y – «білі шуми» Гауса, відповідно авто- і взаємо-некореговані. Визначимо зсув $\Delta\hat\beta$ оцінки (5) відносно точної оцінки (2):

$$
\begin{aligned}
\Delta\hat{\beta} &= M\left\{\hat{\beta}\right\} - \beta^* = M\left\{\left[C^* + \delta C(N)\right]\cdot\left[Y^* + \varepsilon^* + N_y\right]\right\} - \\
&- \beta^* = M\left\{\left[C^* + \delta C(N)\right]\cdot Y^*\right\} - \beta^* = M\left\{C^* + \delta C(N)\right\}\times \\
&\times Y^* - \beta^* \cong \left[X^{*T} X^* + M\left\{N_X^T N_X\right\}\right]^{-1}\cdot X^{*T} Y^* - \\
&- \beta^* = \left[X^{*T} X^* + \mathrm{diag}\sigma_i^2\cdot M\cdot I\right]^{-1}\cdot X^{*T}\cdot Y^* - \beta^*.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Позначимо

$$X^{*T} X^* = A^*,\ M\left\{N_X^T N_X\right\} = \delta A,\ X^{*T}Y^* = B^*.$$

Тоді (2) і (7) дорівнюють відповідно:

$$A^*\beta^* = B^*,$$

$$\left[A^* + \delta A\right]\hat{\beta} = B^*.$$

Звідси

$$\delta A\cdot\hat{\beta} = -A^*(\hat{\beta} - \beta^*) = -A^*\Delta\hat{\beta},$$

тобто $\delta A(\beta^* + \Delta\hat{\beta}) = -A^*\cdot\Delta\hat{\beta}$, або

$$\Delta\hat{\beta} = -(A^* + \delta A)^{-1}\cdot\delta A\cdot\beta^*. \tag{8}$$

Оцінка $\hat{\beta}$ за умов навіть некорельованих «білих шумів» N_X і N_Y, буде занижена відносно істинної β^* на величину (8). Остання, за умови, що норма $\|\delta A\| \to 0$, прямує до нуля, а $\hat{\beta}$ до β^*; за умови, що норма $\|\delta A\| \to \infty$, прямує до $-\beta^*$, а $\hat{\beta}$ – до нуля.

Коваріація оцінки (5) за приведених вище умов, та приймаючи, що норма $\|N_X^T\cdot\varepsilon\|$ набагато менше, ніж $\|X^{*T}\cdot\varepsilon\|$ або $\|N_X^T\cdot Y^*\|$, наближено дорівнює:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}\left[\hat{\beta}\right] &\cong M\left\{\left[C_1\cdot\varepsilon + C_2 N_X\right]\cdot\left[C_1\cdot\varepsilon + C_2 N_X\right]^T\right\} = \\
&= C_1\cdot M\left\{\varepsilon\cdot\varepsilon^T\right\}\cdot C_1^T + C_2\cdot M\left\{N_X N_X^T\right\}\cdot C_2^T,
\end{aligned} \tag{9}
$$

де $\varepsilon = \varepsilon^* + N_Y$,

$$C_1 = \left[X^{*T} X^* + M\left\{N_X N_X^T\right\}\right]^{-1}\cdot X^{*T},$$

$$C_2 = \left[X^{*T} X^* + M\left\{N_X N_X^T\right\}\right]^{-1}\cdot Y^{*T}.$$

Перша складова виразу (9) зі зростанням рівня N_X зменшується, в другій C_2 зменшується, а $M\{N_X N_X^T\}$ збільшується, але C_2 входить в вираз (9) у квадраті, тоді як $M\{N_X N_X^T\}$ – лінійно. Тому для «білого шуму», коли $M\{N_X N_X^T\} = \sigma_{N_X}^2\cdot M\cdot I$, зі зростанням σ_{N_X} коваріація оцінки $\hat{\beta}$ буде зменшуватись.

Таким чином МНК має властивість до регуляризації системи нормальних рівнянь, подібно до Тихонівської [1].

Остання полягає в мінімізації звичайного квадратичного функціоналу $\boldsymbol{I} = \varepsilon^T\varepsilon$ з регуляризуючою добавкою $\alpha\hat{\beta}^T\hat{\beta}$, де α – параметр регуляризації:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{I} &= \varepsilon^T\varepsilon = (Y - X^*\hat{\beta})^T(Y - X^*\hat{\beta}) + \alpha\hat{\beta}^T\beta, \\
\frac{\partial\boldsymbol{I}}{\partial\hat{\beta}} &= 0 = 2\left(X^{*T} X^*\hat{\beta} - X^{*T} Y + \alpha\hat{\beta}\right), \\
\hat{\beta} &= \left(X^{*T} X^* + \alpha\cdot I\right)^{-1}\cdot X^{*T}\cdot Y.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Співставивши (7) і (10) бачимо, що в МНК параметр Тихонова дорівнює $\mathrm{diag}\sigma_i^2\cdot M$.

Графічну залежність нормованих величин $\|\hat{\beta}\|/\|\beta^*\|$ та $\|\mathrm{cov}\hat{\beta}\|/\|\mathrm{cov}\beta^*\|$ (крива а), та $\|\Delta\hat{\beta}\|/\|\beta^*\|$ (крива б) наведено на рис. 1.

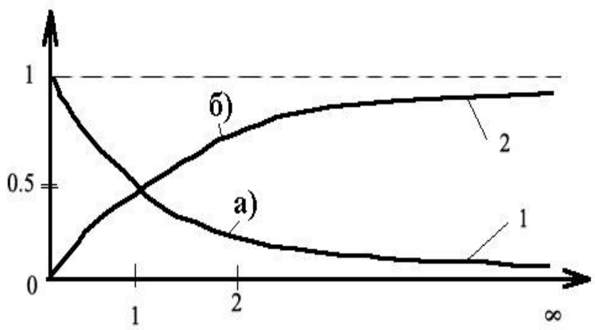

Рис. 1. Залежність зсуву і коваріації МНК-оцінки від співвідношення «шум-сигнал» в X

Узагальнений МНК та його практична реалізація. В цьому методі відшукуються МНК-оцінки за зваженими (відфільтрованими) даними:

$$\hat{X} = U^{-1}X, \qquad \hat{Y} = U^{-1}Y.$$

Це еквівалентно мінімізації функціоналу

$$\mathbf{I} = 0{,}5\sum_{j=1}^{M}\left\|y(j) - x(j)\cdot\hat{\beta}\right\|^2\cdot Q^{-1}, \tag{11}$$

де Q – матриця ваги кожного j-го виміру:

$$Q = (\mathrm{cov}\,\hat{\beta})\cdot U^T.$$

Тоді зважена вагою Q^{-1} оцінка узагальненого МНК (УМНК), отримана за умови мінімуму (11), дорівнює:

$$\hat{\beta} = (X^T Q^{-1} X)^{-1}\cdot X^T Q^{-1} Y. \tag{12}$$

Коваріація оцінки (12):

$$\mathrm{cov}\,\hat{\beta} = $$

$$=(X^T Q^{-1} X)^{-1} X^T Q^{-1} M\{N_y N_y^T\} Q^{-1} X\,(X^T Q^{-1} X)^{-1}. \tag{13}$$

Оцінки (12) мають мінімальну дисперсію за умови, якщо $Q = M\{N_y\cdot N_y^T\}$.

Тоді

$$\mathrm{cov}\,\hat{\beta} = [X^T\cdot M\{N_y N_y^T\}\cdot X]^{-1}. \tag{14}$$

Для некорельованого «білого шуму» в вимірах

$$Y\ Q = \sigma_y^2(j)\cdot I.$$

Тоді рекурентна формула УМНК співпадає зі зваженим МНК:

$$\hat{\beta}(j+1)=\beta(j)+P(j+1)\cdot X(j)\times$$
$$\times\frac{1}{\sigma_y^2(j)}\cdot\left[y(j)-X^T(j)\cdot\beta(j)\right],$$
$$P(j+1)=P(j)-X(j)\times \tag{15}$$
$$\times\left[X^T(j)\cdot P(j)\cdot X(j)+\sigma_y^2(j)\right]^{-1}\cdot X^T(j)\cdot P(j).$$

Неточність визначення чи апріорного завдання матриці Q^{-1} призводить до суттєвої втрати оптимальності оцінок (12) чи (15).

Алгоритм не є робастним [5]: статистично незначна неадекватність матриці Q коваріації перешкод N_y, викликана, наприклад, окремими збоями в даних, які утворюють в законі розподілення перешкод N_y так звані «тяжкі хвости» [2], під час оцінювання вектора $\hat{\beta}$ за алгоритмом (12), може привести до суттєвої похибки. Тому в практичній реалізації більш зручним і надійним буде квазіоптимальний УМНК:

– на першому етапі відбувається квазіоптимальне оцінювання сигналів X, Y шляхом згладжування лінійними фільтрами їх зашумлених вибірок X(j), Y(j), $j=\overline{1,\mathbf{M}}$;

– на другому – МНК-оцінювання вектора $\hat{\beta}$ по отриманим на першому етапі оцінкам $\hat{X}$ і $\hat{Y}$ точних значень X*, Y* сигналів.

Для такого підходу перешкоди $N_{x_s}, i=\overline{1,n}, N_y$ можуть бути взаємно корельованими [4]. Окрім того, так як модель (1) лінійна, то, за умови фільтрації всіх змінних $X_i(t)$, y(t) одним фільтром, невідповідність згладжених значень $\hat{X}^*$ і $\hat{Y}^*$ істинним X*, Y* не приводить до зміщення оцінки $\hat{\beta}$ відносно β^*.

Дійсно знак рівняння в (1) не порушується, якщо на його ліву і праву частину подіяти лінійним оператором фільтра $W_ф$:

$$W_ф=\{Y^*\}=$$
$$W_ф\{X^*\beta^*+\varepsilon^*\}=W_ф\{X^*\}\cdot\beta^*+W_ф\{\varepsilon^*\}. \tag{16}$$

Математичне сподівання оцінки $\hat{\beta}$:

$$M\{\hat{\beta}\}=\left[\hat{X}^{*T}\hat{X}^*+M\left\{N_xN_x^T\right\}\right]^{-1}\cdot\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*. \tag{17}$$

Якщо для спрощення прийняти що

$$M\left\{N_xN_x^T\right\}=\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{\hat{N}_s}\right\}\cdot I,$$

а також покласти, що власні числа матриці

$$\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-1}\cdot\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{\hat{N}_i}\right\}$$

менше одиниці, то вираз

$$\left[I+\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-1}\cdot\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{\hat{N}_i}\right\}\right]^{-1}.$$

можна представити рядом.

Тоді

$$\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)\cdot\hat{\beta}=$$
$$=\left[I+\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-1}\cdot\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{\hat{N}_i}\right\}\right]^{-1}\cdot\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*\cong$$
$$\cong\left[I-\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-1}\cdot\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{\hat{N}_i}\right\}\right]\cdot\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*.$$

Звідси

$$\hat{\beta}\cong\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-1}\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*-$$
$$-\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-2}\cdot\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{\hat{N}_i}\right\}\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*.$$

Враховуючи, що

$$\hat{\beta}\cong\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-1}\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*=$$
$$=\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-2}\hat{X}^{*T}\hat{Y}^*,$$

отримаємо вираз для зсуву:

$$\Delta\hat{\beta}=\hat{\beta}-\beta=$$
$$=-\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{\hat{N}_i}\right\}\cdot\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-1}\cdot\hat{\beta}^*. \tag{18}$$

Так як норма $\Delta\beta$ не більше добутку норм складових правої частини (18), то маємо нерівність:

$$\left\|\Delta\hat{\beta}\right\|/\left\|\hat{\beta}^*\right\|\le$$
$$\le\left\|\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{\hat{N}_i}\right\}\right\|\cdot\left\|\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right\|^{-1}. \tag{19}$$

Чим сильніше фільтрація X, Y оператором $W_ф$ фільтра, тим менше норма матриці збурень $\sigma^2_{\hat{N}_i}$, тобто фільтр послабляє перешкоди, не порушуючи рівняння (16).

Але згладжування фільтром складових $X_i(t)$ вектор-функції X(t) завужує їх частотні спектри і, як наслідок, зменшує їх лінійну незалежність.

Зменшується число обумовленості матриці

$$\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)$$

і, як наслідок, збільшується норма зворотної матриці

$$\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^*\right)^{-1}.$$

Якісну картину залежності нормованих величин:

$\left\|\Delta\hat{\beta}\right\| / \left\|\hat{\beta}\right\|$ (крива а),

$\left\|\mathrm{diag}\sigma^2_{\hat{N}_i}\right\| / \left\|\mathrm{diag}\sigma^2_{N_i}\right\|$ (крива б),

$\left\|\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^{*}\right)^{-1}\right\| / \left\|\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^{*}\right)^{-1}\right\|$ (крива в),

в функції інерційності τ фільтра $W_ф$, для фіксованого співвідношення «шум-сигнал» зображено на рис. 2.

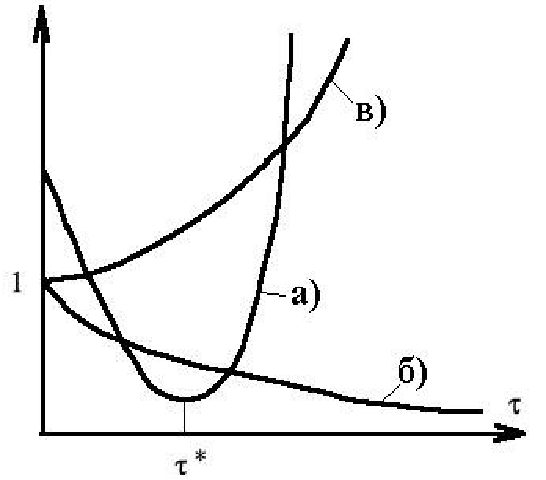

Рис. 2. Залежність нормованого зсуву (а), коваріації та перешкод (б) та інформаційної матриці $\left(\hat{X}^{*T}\hat{X}^{*}\right)^{-1}$ від параметра τ інерційності фільтра

Висновок

Як витікає з графіка, для кожних конкретних випадків існує оптимальне значення згладжуючого ефекту фільтра $W_ф$, за якого норма зміщення (19) буде мінімальною.

Коваріація оцінки $\hat{\beta}$ за методом узагальненого метода найменших квадратів при допущенні взаємо некорельованості перешкод, подібна до метода найменших квадратів (9), але матриці M{εεT}, M{NXNXT} вже не діагональні.

Чим далі рознесені спектри сигналу і перешкоди, тим краще оцінки квазіоптимального узагальненого метода найменших квадратів.

Список літератури

1. Калашников В.В. Сложные системы и методы их анализа. – М.: Знание, 1980. – 64 с.

2. Сільвестров А.М. Розв’язання задачі ідентифікації з допомогою сигнального і параметричного підходів / А. М. Сільвестров, М. М. Гонтар, Д. М. Нелюба // Тези 68-ї наук. конф. професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів університету, (Полтава, 19 квіт. – 13 трав. 2016 р.) – Полтава: ПолтНТУ, 2016. – Т. 1. - С. 11-13.

3. Зайцев Г. Ф. Теорія автоматичного управління / Г.Ф. Зайцев, В.К. Стеклов, О.І. Бріцький. – К.: Техніка, 2002. – 688 с.

4. Гонтар М.М. Нестійкі нестаціонарні системи як об’єкти керування та їх ідентифікація / М.М. Гонтар, Д.М. Нелюба // Електронні та мехатронні системи: теорія, інновації, практика : матеріали II Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф., 17-18 листопада 2016 р., Полтава / Полт. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка [та ін.] – Полтава, 2016. – С. 71-73.

5. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание / Лайонс Р. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2007. – 656 с.

Надійшла до редколегії 22.02.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Козелков, Державний університет телекомунікацій, Київ.

АНАЛИЗ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ ЗАШУМЛЕННОСТИ СИГНАЛОВ

М.Н. Гонтарь, А.Н. Сильвестров, Д.Н. Нелюба

Принимая метод наименьших квадратов (МНК) в качестве базового при обработке зашумленных сигналов рассматриваем влияние соотношение сигнал-шум на смещение оценок реальных данных. Также были рассмотрены обобщенный метод наименьших квадратов (УМНК) для взвешенных (отфильтрованных) данных. Показано, что для каждых конкретных случаев существует оптимальное значение сглаживающего эффекта фильтра, при котором норма смещение будет минимальной. Получено, что чем дальше разнесены спектры сигнала и помех, тем лучше оценки квазиоптимального УМНК.

Ключевые слова: *метод наименьших квадратов, смещение оценок, сглаживающий фильтр.*

ANALYSIS OF LEAST MEAN SQUARES METHOD FOR NOISED SIGNALS

M.M. Hontar, A.M. Silvestrov, D.M. Neliuba

In this paper, taking the least mean squares (LMS) method as a base when processing noised signals considering influence the signal-to-noise bias in estimates of real data. It was also considered a general least mean squares (GLMS) for weighted (filtered) data. It is shown that in each case there is a filter smoothing effect optimal value in which the displacement rate is minimal. It was found that the farther spaced signal and noise spectra, the better the evaluation of quasioptimal GLMS.

Keywords: *least mean squares method, bias estimates, smoothing filter.*