

УДК 681.511.48

М.М. Гонтар, Д.М. Нелюба

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава

## РОЗРОБКА КОНТРОЛЕРА ДЛЯ ОБЕРНЕНОГО МАЯТНИКА НА БАЗІ МЕТОДУ НАБЛИЖЕНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

У цій статті, беручи обернений маятник як приклад нелінійних систем, які неможливо точно лінеаризувати, ми викладаємо метод розробки контролера для системи, що базується на наближеній лінеаризації. У методі, ми намагаємось подолати ефект залишкових членів більш високого порядку при виборі нової координати для наближеної лінеаризації.

**Ключові слова:** нелінійне керування, наближена лінеаризація, обернений маятник, геометричний підхід.

### Вступ

У багатьох практичних випадках ми часто використовуємо лінійні компенсатори, побудовані на основі якобінської лінеаризації керованої установки. Однак, бажано взяти до уваги нелінійність системи при побудові контролера.

**Аналіз попередніх досліджень.** В останні роки в теорії нелінійного керування стрімко розвивається диференційно-геометричний метод. Зокрема метод точної або наближеної лінеаризації був широко застосований [1-5]. Однак більша частина попередніх досліджень головним чином зосередилася на теорії. Тому, щоб оцінити ефективність цих теоретичних результатів, ми потребуємо більшої кількості практичного досліджень й оцінки для нелінійної схеми контролю з допомогою експериментів, а не демонстрації моделюванням. Є небагато матеріалів, які оцінюють його ефективність через експерименти незважаючи на його важливість.

**Мета роботи.** Беручи перевернений маятник як приклад нелінійних систем, які неможливо точно лінеаризувати, ми розробляємо нелінійний контролер для системи, побудований на наближеній лінеаризації [3]. При розробці контролера, ми беремо до уваги елементи більш високого порядку, коли ми будемо нову координату для наближеної лінеаризації. Потім, ми оцінюємо його ефективність експериментами.

### Матеріал і результати дослідження

Будемо використовувати конструкцію роторно оберненого маятника [2] показану на рис. 1. Рука приводиться у рух двигуном і його кут повороту  $\phi$  вимірюється давачем у двигуні. Маятник вільно приєднаний до руки і може обертатися перпендикулярно навколо неї. Кут його повороту  $\theta$  вимірюється давачем. Динаміка системи описується рівняннями:

$$\ddot{\phi} \left( I_1 + I_2 \sin^2 \theta + m l_1^2 + m l_2^2 \sin^2 \theta \right) + 2\dot{\theta} \dot{\phi} \left( I_2 + m l_2^2 \right) \times \sin \theta \cos \theta - \ddot{\theta} m l_1 l_2 \cos \theta + \dot{\theta}^2 m l_1 l_2 \sin \theta = u - d_1 \dot{\phi}; \quad (1)$$

$$\ddot{\theta} \left( I_2 + m l_2^2 \right) - \ddot{\phi} m l_1 l_2 \cos \theta - \dot{\phi}^2 \left( I_2 + m l_2^2 \right) \times \sin \theta \cos \theta - m g l_2 \sin \theta = -d_2 \dot{\theta}, \quad (2)$$

де параметри моделі визначені так:

$u$  – момент двигуна, [Н];

$\phi$  – кут повороту руки, [рад];

$\theta$  – кут повороту маятника, [рад];

$m$  – маса маятника (0,135 [кг]);

$2l_1$  – довжина руки (1,05 [м]);

$2l_2$  – довжина маятника (0,485 [м]);

$I_1$  – момент інерції руки та двигуна (0,64 [кг м<sup>2</sup>]);

$I_2$  – момент інерції маятника (2,65 × 10<sup>-3</sup> [кг м<sup>2</sup>]);

$d_1$  – коефіцієнт тертя двигуна (1,32 [Н м с/рад]);

$d_2$  – коефіцієнт тертя шарніру маятника (1,00 × 10<sup>-5</sup>, [Н м с/рад])

$g$  – прискорення вільного падіння (9,81 [м/с<sup>2</sup>]).

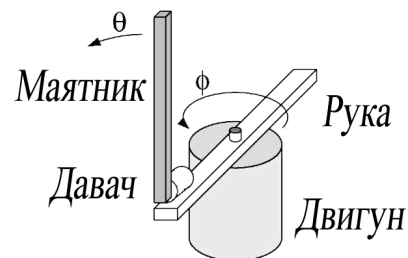


Рис. 1. Схема оберненого маятника

Нехай  $x = [\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}]^T$  буде станом і хай  $u$  буде входом, тоді попередні вирази можуть бути записані у такій формі:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3(x) \\ g_4(x) \end{bmatrix} u, \quad (3)$$

де  $f_i(x)$  і  $g_i(x)$  задані таким чином:

$$f_3(x) =$$

$$= \frac{k_2 \left( -d_1 x_3 - 2x_3 x_4 \sin x_2 \cos x_2 - k_3 x_4^2 \sin x_2 \right) + k_3 \left( -d_2 x_4 + k_2 x_3^2 \sin x_2 \cos x_2 + mgl_2 \sin x_2 \right) \cos x_2}{k_2 \left( k_1 + k_2 \sin^2 x_2 \right) - k_3^2 \cos^2 x_2}; \quad (4)$$

$$f_4(x) = \frac{\left( k_1 + k_2 \sin^2 x_2 \right) \left( -d_2 x_4 + k_2 x_3^2 \sin x_2 \cos x_2 + mgl_2 \sin x_2 \right) + k_3 \left( -d_1 x_3 - 2x_3 x_4 \sin x_2 \cos x_2 - k_3 x_4^2 \sin x_2 \right) \cos x_2}{k_2 \left( k_1 + k_2 \sin^2 x_2 \right) - k_3^2 \cos^2 x_2}; \quad (5)$$

$$g_3(x) := \frac{k_2}{k_2 \left( k_1 + k_2 \sin^2 x_2 \right) - k_3^2 \cos^2 x_2} \quad (6)$$

$$g_4(x) := \frac{k_3 \cos x_2}{k_2 \left( k_1 + k_2 \sin^2 x_2 \right) - k_3^2 \cos^2 x_2} \quad (7)$$

де  $k_1 = I_1 + ml_1^2$ ,  $k_2 = I_2 + ml_2^2$ ,  $k_3 = ml_1 l_2$ .

Першим кроком необхідно перевірити можливість наближеної лінеаризації для системи (3) р-го порядку. Для 1-ої умови (а) на рис. 2 показано рішення  $\theta, \dot{\theta}$  біля значення  $\dot{\phi} = 0, 200, 400$  [град/сек],

$$\det[g(x) \quad ad_f g(x) \quad ad_f^2 g(x) \quad ad_f^3 g(x)] = 0. \quad (8)$$

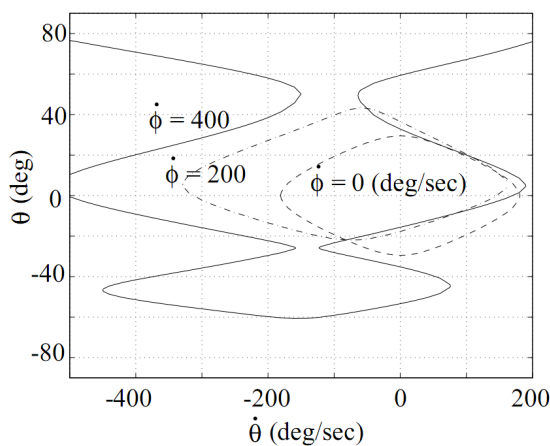


Рис. 2. Области, що задовольняють першій умові наближеної лінеаризації

З рисунка видно що існують сусідні контури а це означає виконання першої умови (а).

Для умови (б),

$$\det \left[ \begin{matrix} ad_f^i g(x) & ad_f^j g(x) & g(x) & ad_f g(x) & ad_f^2 g(x) \end{matrix} \right] = 0(x), \quad 0 \leq i, j \leq 2, i \neq j \quad (9)$$

показує що відрізок  $\text{span} \{g, ad_f g, ad_f^2 g\}$  має дотичну першого порядку, тобто система другого порядку може бути лінеаризована.

По-друге, знайдемо функцію  $\lambda_0(x)$  другого порядку, що задовольняє ЧДР (часткові диференціальні рівняння) так:

$$\lambda_0(x) = x_1 - 0.616x_2 + 3.11 \times 10^{-5} x_3 - 1.92 \times 10^{-5} x_4. \quad (10)$$

Більш детальні розрахунки можна знайти в [4].

По-третє, функція  $\lambda(x)$  для наближеної лінеаризації вищого порядку записується так:

$$\lambda(x) = \lambda_0(x) + T^3(x). \quad (11)$$

У попередньому виразі  $T^3(x)$  не включає елементів з  $x_1$  через спрощення, бо вектори  $f(x)$  і  $g(x)$  не містять змінну стану  $x_1$ .

Таким чином рівняння (3) можна наближено перетворити у канонічну форму Брюновського:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v. \quad (12)$$

Тепер перетворимо систему у лінеаризовану систему Якобіана:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A_1 \hat{x} + b_1 u =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & mgl_2 & 0 & -d_2 \end{bmatrix} \hat{x} + \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u}$$

Для неї існує лінійне перетворення координат:

$$\hat{x} = T_c \xi, \quad (14)$$

яке перетворює (13) у канонічну форму керованості

$$\frac{d\xi}{dt} = T_c^{-1} A_1 T_c \xi + T_c^{-1} b_1 \hat{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u}. \quad (15)$$

Якщо до (12) застосувати лінійний зворотній зв'язок, то отримаємо рівняння:

$$v = [-a_0 \quad -a_1 \quad -a_2 \quad -a_3] \xi + \hat{u}. \quad (16)$$

Тепер, використовуючи зворотній зв'язок (16) та перетворення координат (14) можна перетворити (12) у (13). Для цієї лінійної системи (13) розробимо

лінійний зворотній зв'язок за станом з регулятором НК (найменших квадратів) у якому

$$Q = \text{diag}\{120000, 10000, 1, 1\}, R = 1$$

і знайдемо зворотній зв'язок за станом

$$\hat{u} = K\hat{x}, \quad (17)$$

що мінімізує функцію вартості

$$J_{LQ} = \int_0^{\infty} (\hat{x}^T Q \hat{x} + \hat{u}^T R \hat{u}) dt \quad (18)$$

Повна схема системи керування показана на рис. 3, а коефіцієнти зворотного зв'язку дорівнюють:

$$K = [100, -491, 72.9, -63.9] \quad (19)$$

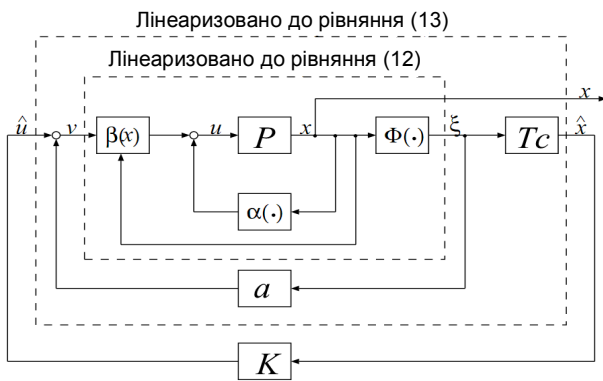


Рис. 3. Структура контролера

### Опис експерименту

Найважливішою частиною даної роботи є експериментальна оцінка, викладена далі. Період вибірки системи керування складає 1 мс і модулі лічильника та ЦАП оперують даними з розрядністю в 12 біт. Що стосується приводу, ми використовуємо серво двигун постійного струму (потужність 68 Вт) з відношенням редуктора 1/50. Роздільна здатність датчика для двигуна становить 50000 імпульсів/оберт і для самого маятника складає 24000 імпульсів/оберт. На рис. 4 зображена блок-схема системи керування.

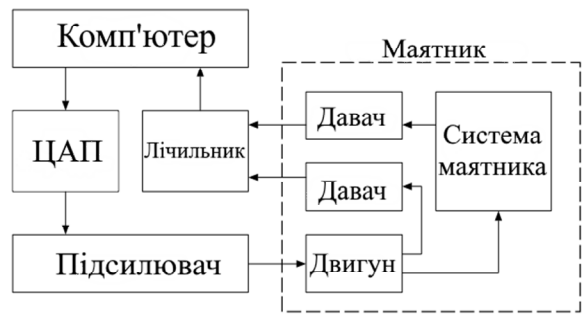


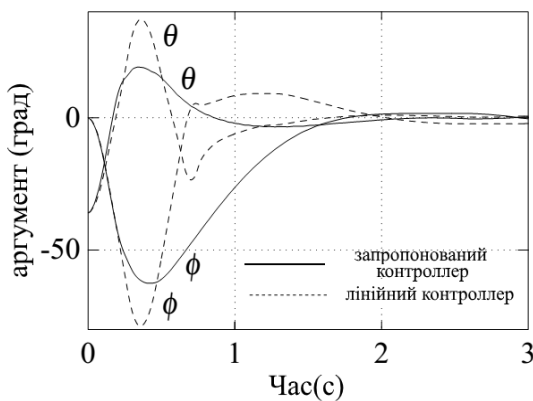
Рис. 4. Блок-схема експериментальної установки

### Результати експерименту

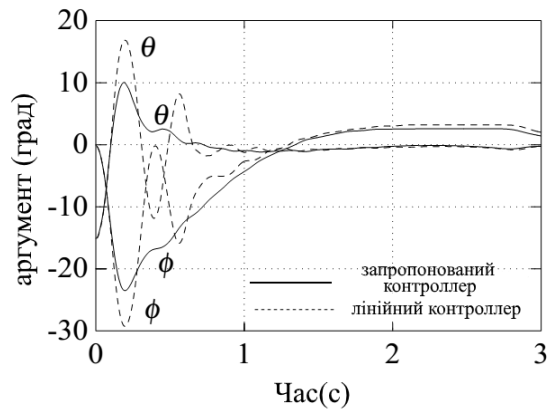
В експерименті ми використовуємо фільтр низьких частот для обробки сигналів з датчика швидкості, щоб уникнути височастотного шуму. По-перше, ми перевіряємо поведінку кута повороту маятника  $\theta(t)$  і положення руки  $\phi(t)$  за допомогою запропонованого контролера для різних початкових умов  $\theta(0) = \theta_0$ . При  $\theta_0$  менше 45 градусів, система залишається стійкою. Рис. 6, в показує перехідний процес системи при  $\theta_0$  рівному 45 градусів. По-друге, для порівняння, ми виконуємо ті ж експерименти з використанням лінійного регулятора  $u = K \cdot x$  без компенсації нелінійності і з тим же коефіцієнтом підсилення  $K$ . За таких умов система стає нестійкою, при  $\theta_0$  більше, ніж 35 градусів.

На рис. 5, а показані перехідні процеси  $\theta(t)$  і  $\phi(t)$ : суцільною лінією – запропонованого контролера і пунктирною лінією – лінійного контролера при  $\theta_0 = 35$  градусів. Необхідно підкреслити, що ці нелінійні і лінійні контролери ведуть себе однаково поблизу початку координат, так як якобіан лінеаризації нелінійного контролера еквівалентний лінійному контролеру  $u = K \cdot x$ .

Далі, щоб побачити робастність системи керування, ми проробили той же самий експеримент, додавши навантаження (0,083 кг) на верхній частині маятника.

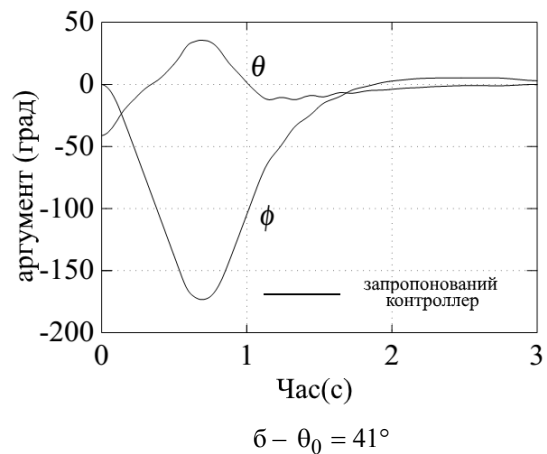
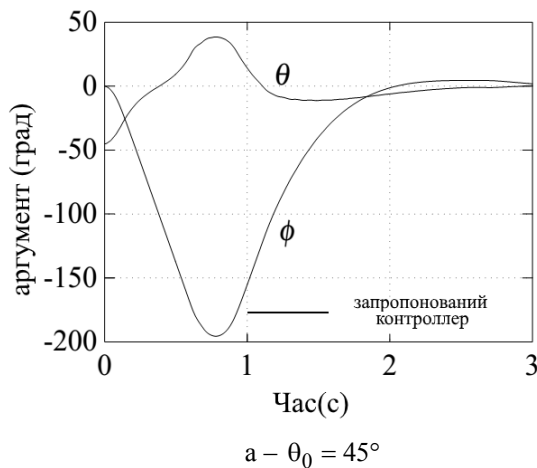


а –  $\theta_0 = 35^\circ$



б –  $\theta_0 = 15^\circ$

Рис. 5. Перехідні процеси  $\theta$  і  $\phi$

Рис. 6. Перехідні процеси  $\theta$  і  $\phi$ 

У цьому випадку наш контролер стабілізує систему, при  $\theta_0$  менше, ніж 41 градус, в той час як лінійний регулятор працює тільки тоді, коли  $\theta_0$  менше 15 градусів. На рис. 5, б показані перехідні процеси  $\theta(t)$  і  $\phi(t)$  суцільною лінією – запропонованого контролера і пунктирною лінією для лінійного контролера, при  $\theta_0 = 15$  градусів, а на рис. 6, г показані  $\theta(t)$  і  $\phi(t)$  для запропонованого контролера коли  $\theta_0 = 41$  градус.

Ці експериментальні результати показують ефективність запропонованого контролера.

### ВИСНОВКИ

Беручи перевернений маятник як приклад нелінійних систем, які не можуть бути точно лінеаризовані [6], було розроблено нелінійний контролер для системи оберненого маятника, на базі методу наближеної лінеаризації. Була розроблена система для придушення ефекту залишкових членів більш високого порядку при виборі координат зваженим методом найменших квадратів для задоволення умов наближеної лінеаризації першого порядку.

### Список літератури

1. A.J. Krener : *Approximate Linearization by State Feedback and Coordinate Change*, *Systems & Control Letters*, 5, 181/185 (1994).
2. K. Furuta and M. Yamakita : *Swing Up Control of Inverted Pendulum*, *IECON '01*, 2193/2198 (2001).
3. Андрієвский Б.Р., Фрадков А.Л. *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB*. СПб: Наука, 1999. — 467 с.
4. L. Guzzella and A. Isidori : *On approximate linearization of nonlinear control systems*, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 3-3, 261/276 (1993).
5. Евсюков В.Н. *Нелинейные системы автоматического управления: учебное пособие для студентов вузов / В.Н. Евсюков.* – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. 172 с.
6. Гонтар М.М. *Наближена лінеаризація нелінійної системи / М.М. Гонтар, Д.М. Нелюба // Проблеми інформатизації: тези 6 Міжнар. наук.-техн.і конф. Київ – Полтава – Орел – Білгород – Харків, 11-12 квітня 2016 р.* – К.: ДУТ, 2016.

Надійшла до редколегії 22.04.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Козелков, Державний університет телекомунікацій, Київ.

### РАЗРАБОТКА КОНТРОЛЛЕРА ДЛЯ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

М.Н. Гонтарь, Д.Н. Нелюба

В этой статье, беря обратный маятник как пример нелинейных систем, которые невозможно точно линеаризовать, мы рассмотрим метод разработки контроллера для системы на основе приближенной линеаризации. В методе мы пытаемся подавить эффект остаточных членов более высокого порядка при выборе новой координаты для приближенной линеаризации.

**Ключевые слова:** нелинейное управление, приближенная линеаризация, обратный маятник, геометрический подход.

### CONTROLLER DESIGN FOR AN INVERTED PENDULUM BASED ON APPROXIMATE LINEARIZATION

M.M. Hontar, D.M. Neliuba

In this paper, taking the inverted pendulum as an example of nonlinear systems which are not exactly linearizable, we give a controller design method for the system based on the approximate linearization. In the method, we try to suppress the effect of the higher order residual terms in choosing the new coordinate for the approximate linearization.

**Keywords:** nonlinear control, approximate linearization, inverted pendulum, geometric approach.