Визначено параметри аксіально симетричного гаусового хвильового пучка при його поширенні в шаруватому кубично нелінійному середовищі з плоскими межами. Сформульовано граничні умови для пучка на межі розділу двох нелінійних середовищ.

УДК 538.56

А. С. Сисоєв, канд. фіз.-мат. наук
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова

ПОШИРЕННЯ ГАУСОВОГО ХВИЛЬОВОГО ПУЧКА У ШАРУВАТОМУ НЕЛІНІЙНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З ПЛОСКИМИ МЕЖАМИ РОЗДІЛУ

Вступ. Відомо диференціальне рівняння, що описує поведінку безрозмірного радіусу аксіально симетричного хвильового пучка в однорідному кубично нелінійному середовищі. Для вирішення задачі розповсюдження хвильового пучка в шаруватому нелінійному середовищі з плоскими межами необхідно сформулювати граничні умови на межі розділу для безрозмірного радіусу пучка.

Основна частина. При поширенні аксіально симетричного гаусового хвильового пучка в шаруватому лінійному середовищі з плоскими межами розділу між шарами поле пучка в j - ому шарі описується формулою

$$E_j = E_o \sqrt{\frac{V_j'}{A_j}}\, e^{-\frac{k_o n_j r_j^2}{2A_j} + i\frac{k_o n_j r_j^2}{2R_j} - i\, u_j + i\, k_o n_j z_j}, \qquad (1)$$

де $k_o = \frac{\omega}{c}$, $j = 1,2,3,...$ - номер шару, n_j - показник заломлення j - го шару. Усі шари послідовно пронумеровані, індекс j = 1 привласнений шару, де розташована горловина пучка. Межам розділу привласнюється номер середовища, з якої падає на неї хвильовий пучок. Межі розділу паралельні один одному і пучок поширюється перпендикулярно межам.

Параметр A_j визначає радіус ρ_j плями поля пучка

$$A_j = \frac{k_o n_j \rho_j^2}{2} \qquad (2)$$

Параметр R_j є радіусом кривизни хвильової поверхні пучка; z_j і r_j - координати циліндричної системи координат, вісь z_j якої збігається з віссю пучка в j - ому шарі і початок якої лежить на вхідній поверхні шару.

Параметри пучка A_j і R_j містяться в узагальненому параметрі $V_j = V_j' + iV_j''$, який отримав назву варіанса хвильового пучка [1],

$$V_j^{-1} = A_j^{-1} - iR_j^{-1} \qquad (3)$$

Параметр $u_j = arctg\, V_j'' / V_j'$, що входить у формулу (1), визначає фазу варіанса V_j . Варіанси хвильових пучків у двох сусідніх шарах лінійного середовища пов'язані співвідношенням,

$$V_{j+1}\left(z_{j+1}\right)=V_j\left(l_j\right)\cdot B_j + iz_{j+1}, \tag{4}$$

де
$$B_j = \frac{n_{j+1}}{n_j}, \tag{5}$$

l_j - геометричний шлях, пройдений пучком в j - ому шарі. Величина B_j, що визначається формулою (5), може бути названа оператором перетворення для варіанса хвильового пучка на межі розділу двох лінійних середовищ.

З формули (4) випливає

$$V_j' = n_j A_0 \tag{6}$$

$$V_j'' = \sum_{m=1}^{j-1} \frac{n_j}{n_m} l_m + z_j \tag{7}$$

де $A_0 = {k_0 n_1 \rho_0^2}/{2}$, ρ_0 – радіус плями поля в горловині. З формули (3) з урахуванням (6), (7) для параметра A_j отримуємо

$$A_j = n_j A_0 f_{лj}^2 \tag{8}$$

де
$$f_{лj}^2 = 1 + \left(\frac{V_j''}{V_j'}\right)^2 = 1 + \left(\sum_{m=1}^{j-1} \frac{l_m}{V_m'} + \frac{z_j}{V_j'}\right)^2 \tag{9}$$

З формул (2), (9) видно, що величина $f_{лj}$ є безрозмірним радиусом пучка в j - ому шарі, який визначає розмірний радіус плями поля пучка за формулою

$$\rho_j = \rho_0 f_{лj} \tag{10}$$

Безрозмірний радіус пучка пов'язаний з радіусом кривини хвильової поверхні простим диференціальним співвідношенням

$$R_j^{-1} = \frac{1}{f_j} \frac{df_j}{dz_j}$$

У горловині пучка виконується умова

$$f_1(0) = 1, \quad \left.\frac{df_1}{dz_1}\right|_{z_1=0} = \frac{1}{R_1(0)} = 0$$

Функція $f_{лj}$ для аксіально симетричних пучків у однорідному лінійному середовищі є рішенням диференціального рівняння

$$\frac{d^2 f_{лj}}{dz_j^2} = \frac{1}{D_j^2 f_{лj}^3} \tag{11}$$

де D_j -дифракційна довжина пучка, що дорівнює довжині зони френелевської дифракції. Прямою підстановою легко переконатися, що функція (9) задовільняє рівнянню (11) при $D_j = V_j'$. Таким чином, при поширенні хвильового пучка в шаруватому лінійному середовищі роль дифракційної довжини в кожному шарі грає дійсна частина варіанса пучка. При цьому у формулі (1)

$$\left(\frac{V_j'}{A_j}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{f_{лj}}$$

На межі розділу за законом заломлення варіанса, визначеним формулою (4), функція $f_{лj}$ задовольняє умовам

$$f_{л,j+1}(0) = f_{л,j}(l_j) \tag{13}$$

$$f'_{л,j+1}(0)n_{j+1} = f'_{л,j}(l_j)n_j \tag{14}$$

У кубично нелінійної середовищі з діелектричною проникністю

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 |E_0|^2$$

безрозмірна ширина $f_{нл}$ осесиметричного пучка знаходиться з диференціального рівняння [2]

$$\frac{d^2 f_{нл}}{dz^2} = \frac{1}{f_{нл}^3}\left(\frac{1}{D_{нл}^2} - \frac{sign\varepsilon_2}{G_{нл}^2}\right) \tag{15}$$

де $D_{нл} = n_0 A_0$ - дифракційна довжина пучка в лінійному середовищі з показником заломлення $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$. Параметр $G_{нл}$ характеризує силу нелінійної рефракції і визначається формулою

$$G_{нл} = \rho_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2|\varepsilon_2| E_0^2}}$$

Рішення рівняння (15) має вигляд

$$f_{нл}^2 = 1 + \frac{z^2}{D_{нл}^2}\sigma^2 \tag{16}$$

де $$\sigma = \left(1 - (sign\,\varepsilon_2)\frac{D_{нл}^2}{G_{нл}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Для шаруватого нелінійного середовища з плоскими межами розділу в j - середовищі функція $f_{нл,j}$ має вигляд

$$f^2_{нл,j} = 1 + (\sum_{m=1}^{j-1} l_m c_m + z_j c_j)^2 \tag{17}$$

де $c_j = \sigma_j / D_{нлj}$, $D_{нл,j} = n_{0,j} A_0$. При $\varepsilon_{2,j} = 0$ і $n_{0,j} = n_j$ (лінійна шарувата система) формула (17) переходить у формулу (9), а для однорідного нелінійного середовища ($\varepsilon_{0,j} = \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2,j} = \varepsilon_2$, $z_j = z$) - у формулу (16).

Параметр $A_{нлj}$ хвильового пучка в нелінійній середовищі визначається формулою

$$A_{нлj} = n_{0j} A_0 f^2_{нлj} \tag{18}$$

Варіанси пучків в шарах мають вигляд

$$V'_{нлj} = \frac{D_{нлj}\left[1 + (\sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j)^2\right]}{1 + \sigma_j^2 (\sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j)^2} \tag{19}$$

$$V''_{нлj} = \frac{D_{нлj}\sigma_j (\sum_{m-1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j)\left[1 + (\sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j)^2\right]}{1 + \sigma_j^2 (\sum_{m=1}^{j-1} c_m l_m + c_j z_j)^2} \tag{20}$$

Для лінійних середовищ ($\varepsilon_{2j} = 0, \varepsilon_{0j} = \varepsilon_j$) формули (19), (20) переходять у відповідні формули (6), (7).

Межеві умови для функції $f_{нл}$ мають вигляд

$$f_{нлj+1}(0) = f_{нлj}(l_j) \tag{21}$$

$$f'_{нлj+1}(0) / c_{j+1} = f'_{нлj}(l_j) / c_j \tag{22}$$

Для лінійних середовищ ($\varepsilon_{2j} = 0, \varepsilon_{0j} = \varepsilon_j$) межеві умови (21), (22) переходять у отримані вище умови (13), (14). Таким чином для функції $f_{нлj}$, що визначає безрозмірну ширину пучка в нелінійніму середовищі, відомо диференціальне рівняння (15) і межеві умови (21), (22).

Параметри хвильового пучка A_j і R_j по обидві сторони межі розділу можна пов'язати з допомогою операторів перетворення

$$A_{j+1}(0) = A_j(l_j) a_j \tag{23}$$

$$R_{j+1}(0) = R_j(l_j) r_j \tag{24}$$

Для лінійних середовищ оператори перетворення для A_j і R_j однакові

$$a_{лj} = r_{лj} = B_j = \frac{D_{лj+1}}{D_{лj}} \tag{25}$$

Для нелінійних середовищ оператори $a_{нлj}$ і $r_{нлj}$ різні

$$r_{нлj} = a_{нлj} \frac{\sigma_j}{\sigma_{j+1}}, \quad a_{нлj} = \frac{D_{нлj+1}}{D_{нлj}} \tag{26}$$

Для лінійних середовищ параметр $\sigma_j = 1$ і формула (26) переходить у формулу (25). Амплітуда пучка, який пройшов шар середовища, визначається амплітудою падаючого, помноженої на коефіцієнт проходження Френеля, які формально справедливі і в нелінійному випадку. Отримані результати залишаються справедливими і для випадку утворення колапсу в одному з шарів, і для комбінованого середовища, що складається з лінійних і нелінійних шарів.

Висновки. Розглянута вище задача із шаруватим нелінійним діелектриком є гарною моделлю для вирішення задачі поширення хвильового пучка в неоднорідному в напрямку поширення пучка нелінійному діелектрику, шляхом моделювання неоднорідного нелінійного діелектрика шаруватим нелінійним діелектриком.

Література

1. Дешан Ж., Маст П. Сб. «Квазиоптика», из-во «Мир», М., 1966, с.189.
2. Виноградова М.Б., Руденко О, В., Сухоруков А.П. Теория волн. Из-во «Наука», М., 1979, с. 290.
3. Каплан А.Є. ЖЕТФ, т.72, В.5, 1977, с.1710-1726.
4. Слепян Г.Я. Радиотехника та электроника, т.29, в.4, 1984.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАУССОВОГО ВОЛНОВОГО ПУЧКА В СЛОИСТОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ПЛОСКИМИ ГРАНИЦАМИ.

А. С. Сысоев

Определены параметры аксиально симметричного гауссового волнового пучка при его распространении в слоистой кубично нелинейной среде с плоскими границами. Сформулированы граничные условия для пучка на границе раздела двух нелинейных сред.

THE DISTRIBUTION OF THE GAUSS WAVE BEAM IN MULTI-LAYER CUBICAL UNLINEAR ENVIRONMENT WITH FLAT BORDERS.

A. S. Sysojev

The parameters of axis symmetric Gauss wave beam at its distribution in multi-layer cubical unlinear environment with flat borders have been defined. For well-known differential equation, defining unlimited radius beam in unlinear environment, the bordering conditions for the beam on the borderline of two unlinear environment have been formed.