Показано, що дифракційне поле при дифракції гауссового пучка на густій гратці із синусоїдальною пропускною здатністю являє собою три гауссових хвильових пучки. Напрямок поширення дифракційних пучків визначається тією ж формулою, що й для плоских хвиль. Дифракційна ефективність голограми залишається такою же як і для плоских хвиль.

УДК 628.979

А. С. Сисоєв,
канд. фіз.-мат. наук.
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова

ДИФРАКЦІЯ ГАУССОВОГО ПУЧКА НА ТОНКІЙ ГОЛОГРАФІЧНІЙ ГРАТЦІ

Введення. У випадку, якщо предметна й опорна хвилі є плоскими, амплітудне пропущення тонкої голограми визначається формулою

$$\tau(x) = \tau_o + 2\tau_1 \cos 2\pi \frac{x}{a} \tag{1}$$

При цьому голограма являє собою дифракційну гратку з періодом a, відмінною рисою якої є та обставина, що її пропускна здатність в напрямку, перпендикулярному до штрихів, змінюється по косинусоїдальному закону. Визначемо структуру розсіяного поля при падінні на таку гратку гауссового хвильового пучка.

Основна частина. Нехай на голограму, що перебуває в площині $z = 0$,з амплітудним пропусканням, описуваним формулою (1), уздовж осі oz падає гауссовий хвильовий пучок, горловина якого відстоїть на відстані l від голограми, а розподіл поля в горловині описується функцією

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{kx^2}{2A_0}\right) \tag{2}$$

де параметр $A_0 = {k\rho_0^2}/{2}$ визначає радіус плями поля ρ_0 в горловині, $k = {2\pi}/{\lambda}$. Розподіл поля хвильового пучка в площині голографічної гратки описується формулою

$$\psi_l(x) = \sqrt{{A_0}/{V_l}} \exp\left(-\frac{kx^2}{2V_l}\right) \tag{3}$$

де
$$V_l = A_0 + il \tag{4}$$

Увівши фазу комплексного параметра V_l за формулою

$$u_l = arctg \frac{l}{A_0} \tag{5}$$

формулу (3) можна перетворити до виду

$$\psi_l(x) = \sqrt[4]{\frac{A_0}{A_l}} \exp\left(-\frac{kx^2}{2A_l} + i\frac{kx^2}{2R_l} - i\frac{1}{2}u_l\right) \qquad (6)$$

де R_l - радіус кривизни хвильової поверхні пучка, визначаємий за формулою

$$R_l = l\left(1 + \frac{A_0^2}{l^2}\right) \qquad (9)$$

A_l - значення параметра A на відстані l від горловини. Він визначає радіус плями поля ρ_l в даному перетині пучка

$$A_l = \frac{k\rho_l^2}{2} = A_0\left(1 + \frac{l^2}{A_0^2}\right) \qquad (10)$$

Функцію розподілу поля гауссового хвильового пучка в площині дифракційної гратки розкладемо в інтеграл Фур'є

$$\psi_l(x) = \frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\exp(ik\xi x)d\xi \qquad (11)$$

де

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi A_0}{V_l}} \exp\left(-\frac{kV_l\xi^2}{2}\right) \qquad (12)$$

Пройшовше крізь гратку поле можна записати у вигляді

$$\psi(x,z) = \frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)A(\alpha,\xi)\exp ik\left[(\alpha+\xi)x + \sqrt{1-(\alpha+\xi)^2}\,z\right]d\xi \qquad (13)$$

Рішення (13) задовольняє хвильовому рівнянню. Передатна функція $A(\alpha,\xi)$ в наближенні Фраунгофера $[1]$ має вигляд

$$A(\alpha,\xi) = \int_{-Na/2}^{Na/2} \tau(x')\exp[ik(\alpha+\xi)x']dx' \qquad (14)$$

де $\alpha = x/z$ - кут, під яким з початку координат видно точку спостереження, N - кількість щілин у дифракційній гратці. Інтеграл (14) обчислюється в явному вигляді і має вигляд

$$A(\alpha,\xi) = \sum_{m=-1}^{m=1} A_m(\alpha,\xi) \qquad (15)$$

де
$$A_m(\alpha,\xi)=\tau_m\frac{\sin\left[k(\alpha+\xi)+m\frac{2\pi}{a}\right]a\frac{N}{2}}{\left[k(\alpha+\xi)+m\frac{2\pi}{a}\right]a\frac{N}{2}} \tag{16}$$

Функція $F(\xi)$ має для гауссового пучка гострий локальний максимум при $\xi=0$, внаслідок чого підінтегральну функцію $A(\alpha,\xi)$ можливо винести з під знака інтеграла при $\xi=0$. Тоді поле, що пройшло крізь гратку, запишеться у вигляді

$$\psi(x,z)=A(\alpha)G(\alpha,x,z) \tag{17}$$

Де
$$A(\alpha)=A(\alpha,\xi)\big|_{\xi=0}$$

$$G(\alpha,x,z)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)\exp ik\left[(\alpha+\xi)x+\sqrt{1-(\alpha+\xi)^2}\,z\right]d\xi \tag{18}$$

Таким чином, дія синусоїдальної гратки істотно відрізняється від дії щілинної гратки. У той час як щілинна гратка має $2n+1$ пелюстків діаграми спрямованості (просторових гармонік), де n - ціла частина відносини a/λ, дифракційна картина для синусоїдальної гратки має тільки три пелюстки, максимуми яких спостерігаються під кутами θ_m

$$\sin\theta_m=\alpha_m=m\frac{\lambda}{a} \tag{19}$$

Форма пелюстків визначається в основному функцією $G(\alpha,x,z)$, а функція $A(\alpha)$ визначає напрямок на максимум. Тому у формулах (17), (18) параметр α можна покласти рівним α_m, у результаті чого дифракційне поле запишеться у вигляді

$$\psi(x,z)=\sum_{m=-1}^{1}A_m(\alpha_m)\psi_m(x,z) \tag{20}$$

де
$$\psi_m(x,z)=\frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)\exp ik\left[(\alpha_m+\xi)x+\sqrt{1-(\alpha_m+\xi)^2}\,zd\xi\right] \tag{21}$$

$$A_m(\alpha_m)=\tau_m$$

Розкладаючи $\sqrt{1-(\alpha_m+\xi)^2}$ в ряд по ξ з точністю до квадратичних членів, для випадку, коли на плямі пучка укладається багато періодів гратки (що завжди виконується), інтеграл (21) можливо обчислити в явному вигляді. У результаті одержуємо

$$\psi_m(x_m,z_m)=\sqrt{\frac{A_o(1-\alpha_m^2)}{V_m}}\exp\left[-\frac{kx_m^2}{2V_m}+ik(l+z_m)\right] \tag{22}$$

де
$$V_m = V_l(1-\alpha_m^2) + i\frac{z}{\sqrt{1-\alpha_m^2}} \tag{23}$$

і введена променева система координат

$$x_m = \sqrt{1-\alpha_m^2}x - \alpha_m z, \qquad z_m = \alpha_m x + \sqrt{1-\alpha_m^2}z \tag{24}$$

З урахуванням формули (4), формула (23) перепишеться у вигляді

$$V_m = A_0(1-\alpha_m^2) + iB_m \tag{25}$$

де
$$B_m = l(1-\alpha_m^2) + \frac{z}{\sqrt{1-\alpha_m^2}} \tag{26}$$

Уводячи фазу комплексного параметра V_m за формулою

$$u_m = arctg\frac{B_m}{A_0(1-\alpha_m^2)} \tag{27}$$

формулу (22) можна перетворити до вигляду

$$\psi_m(x_m, z_m) = \sqrt[4]{\frac{A_0}{A_m}}\exp\left[-\frac{kx_m^2}{2A_m} + i\frac{kx_m^2}{2R_m} + ik(l+z_m) - ik\frac{u_m}{2}\right] \tag{28}$$

де
$$A_m = A_0(1-\alpha_m^2)\left[1 + \frac{B_m^2}{A_o^2(1-\alpha_m^2)}\right] \tag{29}$$

$$R_m = B_m\left[1 + \frac{A_0^2(1-\alpha_m^2)}{B_m^2}\right] \tag{30}$$

Таким чином, дифракційне поле при дифракції гауссового пучка на густій гратці із синусоїдальною пропускною здатністю уявляє собою три гауссових хвильових пучки

$$\psi(x,z) = \sum_{m=-1}^{1}\tau_m\psi_m(x_m, z_m) \tag{31}$$

Напрямок поширення дифракційних пучків визначається формулою (19),тобто тією же формулою, що й для плоских хвиль.

Якість голографічного зображення характеризується декількома параметрами. Одним з найважливіших є дифракційна ефективність голограми η, що визначає відношення інтенсивності дифрагованої хвилі з $m=1$ до інтенсивності падаючої хвилі.

У нашім випадку дифракційна ефективність

$$\eta = |\tau_1|^2 \tag{32}$$

тобто залишається такою же як і для плоских хвиль

Висновки:

Дифракційне поле при дифракції гауссового пучка на густій гратці із синусоїдальною пропускною здатністю являє собою три гауссових хвильових пучки. Напрямок поширення дифракційних пучків визначається тією ж формулою, що й для плоских хвиль. Дифракційна ефективність голограми залишається такою ж як і для плоских хвиль.

Література

1. Маркузе Д. Оптические волнововоды. «Мир», М.,1974.
2. Миллер М. Голография. «Машиностроение», Ленинград, 1979.

ДИФРАКЦИЯ ГАУССОВОГО ПУЧКА НА ТОНКОЙ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

А.С.Сысоев

Показано, что дифракционное поле при дифракции гауссового пучка на густой решетке с синусоидальной пропускной способностью представляет собой три гауссовых волновых пучка. Направления распространения дифракционных пучков определяются той же формулой, что и для плоских волн. Дифракционная эффективность голограммы остается такой же как и для плоских волн.

DIFRACTION OF THE GAUSSIAN BEAM ON THIN GOLOGRAFIC GRATING

A.S.Sysojev

It is shown that the diffraction field during the diffraction of the Gaussian beam on the dense lattice with sinusoidal bandwidth represents itself as three Gaussian wave beam. Directions of the diffracted beams propagation are determined by the same formula as for plane waves. The diffraction efficiency of the hologram is the same as for plane waves.