УДК 621.396
DOI: 10.31673/2409-7292.2019.016469

М.М. Проценко, М.Я. Павлунько, Д.П. Мороз, З.М. Бржевська

МЕТОДИКА ФІЛЬТРАЦІЇ ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ШВИДКОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Запропоновано методику фільтрації цифрових сигналів з використанням вейвлет- перетворення у базисі Хаара. Показано, що в даній методиці доцільно проводити фільтрацію сигналів з використанням алгоритмів швидкого вейвлет-перетворення.

Ключові слова: цифровий сигнал, швидке вейвлет-перетворення, фільтрація, методика, частота.

Постановка проблеми. На даний час набувають поширення алгоритми обробки складних сигналів [1-4] з використанням вейвлет-перетворення (ВП). Реалізація таких алгоритмів ВП у сучасних системах комп'ютерної математики (Matchad, Matlab, Mathematica) дозволяє використовувати їх для обробки складних сигналів, аналізу зображень, стиснення великих обсягів інформації тощо.

З проведеного аналізу літератури [1-9] випливає, що вейвлет-перетворення доцільно застосовувати для обробки сигналів складної форми, а розробка відповідних методик є актуальним напрямом наукових досліджень.

Огляд останніх досліджень і публікацій. На даний час набувають поширення алгоритми обробки сигналів [3–9] з використанням вейвлет-перетворення та його удосконаленого варіанта швидкого вейвлет-перетворення (ШВП). Можливість використання ВП для завдань обробки цифрових даних досліджується в таких публікаціях:

у [2] проведено аналіз алгоритмів одноканальної цифрової фільтрації сигналів;

у [3, 5, 7] розглянуто основи теорії та приклади використання ВП;

у [4] перевірено можливість застосування ВП для діагностики ударних механізмів;

у [9] розроблено методику стиснення цифрової інформації з використанням ВП.

Питання застосування ШВП, особливо для фільтрації цифрових сигналів, на сьогодні є недостатньо вивчені.

Формулювання завдання дослідження. З метою подальшого розвитку й застосування ВП для обробки цифрових сигналів складної форми у запропонованій роботі розроблено методику фільтрації цифрових сигналів з використанням ВП в базисі Хаара.

Виклад основного матеріалу дослідження. На етапі фільтрації модель запису цифрового сигналу може бути представлена у вигляді [2]:

$$y_k = s_k + n_k, \tag{1}$$

де s_k – дискретна форма представлення цифрового сигналу при існуючій методиці обробки;

n_k – суміш адитивних перешкод.

Задачею фільтрації являється усунення заважаючих компонент n_k.

У літературі [2] було показано, що фільтрації в часовій і частотній областях еквівалентні, вибір того чи іншого варіанта розрахунків визначається економічними міркуваннями. Найбільш економічними є реалізації фільтра на основі використання алгоритмів ШВП.

Серед існуючих у даний час алгоритмів проведення фільтрації з використанням ВП найбільшого поширення отримав алгоритм Донохо-Джонстона [1, 3, 5, 6]. Він простий у реалізації, економічний в обчислювальному відношенні, оскільки використовує лише швидкі алгоритми ВП і містить три кроки, що, будучи послідовно застосовані до вихідного сигналу, проводять фільтрацію сигналу.

Суть методики фільтрації цифрових сигналів з використанням ВП.

На першому етапі даної методики проводиться розкладання сигналу:

$$Y = My, \tag{2}$$

де M – оператор дискретного вейвлет-перетворення;

Y – вейвлет трансформанта при цьому складається с двох частин високочастотної – S_j (коефіцієнти апроксимації) та низькочастотної d_j (коефіцієнти деталізації).

На другому етапі до кожного з коефіцієнтів деталізації рівня застосовується процедура трешолдингу (зберігаються незмінними всі коефіцієнти рівня j (великі чи рівні порогу), а інші коефіцієнти, які не відповідають даній умові, обертають у нуль). Математично дану процедуру запишемо так:

$$\hat{d}_j = \begin{cases} d_{j,} \left| d_{j,} \right| \geq t \\ 0, \left| d_{j,} \right| < t \end{cases}, \tag{3}$$

де t – поріг для коефіцієнтів деталізації.

Поріг можна розрахувати за формулою [3]

$$t = \sigma \left(2 \log N \right)^{1/2}, \tag{4}$$

де σ – середньо-квадратичне відхилення рівня шуму;

N – кількість ненульових вейвлет-коефіцієнтів.

На третьому етапі проводиться зворотне вейвлет-перетворення (відновлюється сигнал).

Умовою найбільш високої ефективності обробки сигналів є вибір базису розкладу. Розглянемо побудову функцій, які утворюватимуть базис. Найпростіше лінійне співвідношення з числом коефіцієнтів $2M$ можна записати у вигляді [3]:

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \varphi\left(2x - k\right) \tag{5}$$

з двійковою зміною масштабу та цілочисловими зсувами k.

При дискретних значеннях параметрів стискання та зсуву отримуємо дискретні вейвлети. Ціле число M визначає кількість коефіцієнтів h_k та довжину області визначення вейвлета:

$$h_k = \sqrt{2} \int \varphi\left(x\right) \overline{\varphi}\left(2x - k\right) dx. \tag{6}$$

Умова нормування задається у вигляді [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x\right) dx = 1. \tag{7}$$

Функція $\varphi(x)$, яку отримуємо при розв’язанні рівняння (3), називається *скейлінг-функцією* або *масштабною*. Якщо вона відома, то можна побудувати базисний вейвлет (або „материнський вейвлет”) $\psi\left(x\right)$ за формулою:

$$\psi\left(x\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \varphi\left(2x - k\right), \tag{8}$$

де $g_k = \left(-1\right)^k h_{2M-k-1}$.

Один з прикладів отримаємо при $\varphi\left(x\right)$ з двома відмінними від нуля коефіцієнтами h_k, які дорівнюють $1/\sqrt{2}$, тобто отримуємо *скейлінг-функцію* Хаара $\varphi_H\left(x\right)$:

$$\varphi_H\left(x\right) = \varphi_H\left(2x\right) + \varphi_H\left(2x - 1\right). \tag{9}$$

Розв’язком цього функціонального рівняння є функція [3]

$$\varphi_H\left(x\right) = \Theta\left(x\right) \Theta\left(1 - x\right), \tag{10}$$

де $\Theta\left(x\right)$ – означає функцію Хевісайда, яка дорівнює 1 при додатних значеннях аргументу та 0 – при від’ємних. Граничні умови мають вигляд

$$\varphi_H\left(0\right) = 1 \quad \varphi_H\left(1\right) = 0. \tag{11}$$

Ці умови важливі для спрощення числових розрахунків вейвлет-коефіцієнтів, коли розглядаються два сусідніх інтервали.

"Материнський вейвлет" має вигляд

$$\psi_H(x) = \Theta(x)\Theta(1-2x) - \Theta(2x-1)\Theta(1-x) \tag{12}$$

з граничними умовами $\psi_H(0) = 1, \quad \psi_H(1/2) = -1, \quad \psi_H(1) = 0$.

Ця функція і є вейвлетом Хаара.

Масштабовані та зсунуті версії скейлінг-функції $\varphi_{j,k}$ та "материнського вейвлета" $\psi_{j,k}$ мають такий вигляд:

$$\varphi_{j,k} = 2^{j/2}\varphi\left(2^j x - k\right), \tag{13}$$

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi\left(2^j x - k\right). \tag{14}$$

Вони утворюють ортонормований базис. Вибір у вигляді масштабного помножувача 2^j з цілочисловим значенням j приводить до однозначної процедури розрахунків коефіцієнтів вейвлет-перетворення.

Як і будь-який вейвлет, вейвлет Хаара є знакозмінною функцією [9], тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0. \tag{15}$$

В табл. 1 представлені основні типи базисних вейвлет функцій. При цьому необхідно проводити вибір таких базисів, які мають відносно нескладну технічну та алгоритмічну реалізацію.

Таблиця 1

Типи базисних вейвлет функцій

Вейвлети	Аналітична запис $\psi(t)$	Спектральна щільність $\psi(\omega)$
	Дійсні безперервні базиси	
Гаусові: - першого порядку або WAVE-вейвлет	$-t \cdot exp\left(-t^2/2\right)$	$(i\omega)\sqrt{2\pi}\, exp\left(-\omega^2/2\right)$
- другого порядку або MHAT – вейвлет (мексиканський капелюх)	$\left(1-t^2\right)exp\left(-t^2/2\right)$	$(i\omega)^2\sqrt{2\pi}\, exp\left(-\omega^2/2\right)$
- n – го порядку	$(-1)\dfrac{d^n}{dt^n}\left[exp\left(-t^2/2\right)\right]$	$(-1)^n(i\omega)\sqrt{2\pi} \times exp\left(-\omega^2/2\right)$
DOG – difference of gaussians	$e^{-t^2/2} - 0{,}5 \cdot e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2}\left(e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2}\right)$
LP_Littlewood & Paley	$(\pi t)^{-1}(sin 2\pi t - sin \pi t)$	$\begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \pi \le \lvert t\rvert \le 2\pi \\ 0, в \ \ інших \ \ випадках \end{cases}$
	Дійсні дискретні	
HAAR-вейвлет (такій як Db-1, Bior-1)	$\ge \begin{cases} 1, \ \ 0 \le \lvert t\rvert \le 1/2, \\ -1, \ \ 1/2 \le \lvert t\rvert \le 1, \\ 0, \ \ t<0, \ \ t>0. \end{cases}$	$i \cdot e^{i\omega/2} \cdot \dfrac{sin^2 \omega/4}{\omega/4}$

Комплексні		
Морле (Morlet)	$e^{i\omega_0 t} \cdot e^{-t^2/2}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$
Пауля (Paul)	$\tilde{A}(n+1)\dfrac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$	$\sigma(\omega)\sqrt{2\pi} \cdot (\omega)^n \cdot e^{-\omega}$

На основі аналізу табл.1 можна зробити слідуючи висновки: в якості базисних функцій для алгоритмів цифрової обробки сейсмічних сигналів необхідно застосовувати дискретні базисні функції. Перевагами базису Хаара є те, що для нього розроблені швидкі алгоритми виконання дискретного вейвлет-перетворення, можливість реалізації розроблених алгоритмів на ПЕОМ, що особливо важливо в задачах цифрової обробки сейсмічних сигналів.

Розглянемо можливість використання вейвлета Хаара для проведення фільтрації сейсмічних сигналів.

На рис. 1 показана обвідна дискретного сейсмічного сигналу зареєстрованого цифровою сейсмічною станцією *IRIS* (кількість дискрет сигналу – k=5000). Параметри аналогово цифрового перетворювача цієї станції такі:

частота дискретизації сигналу – $\Delta f д=40$ Гц;

динамічний діапазон – $D=96$ дБ.

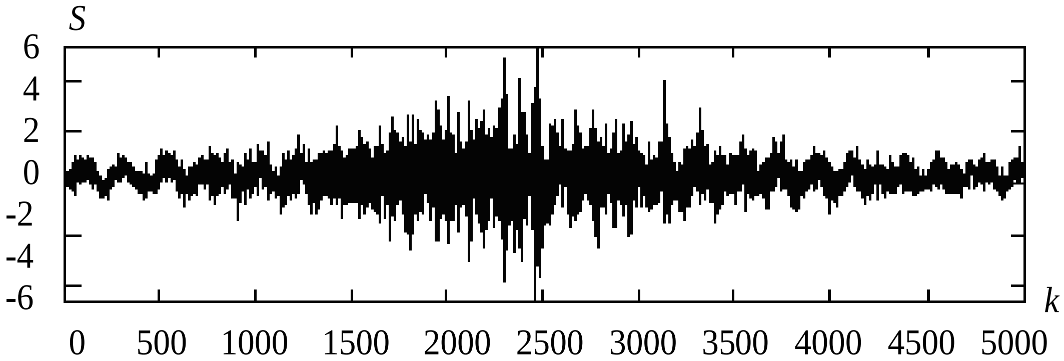

Рис. 1. Обвідна дискретного сейсмічного сигналу

Далі застосуємо дворівневе розкладання сейсмічного сигналу у базисі Хаара за схемою рис. 2.

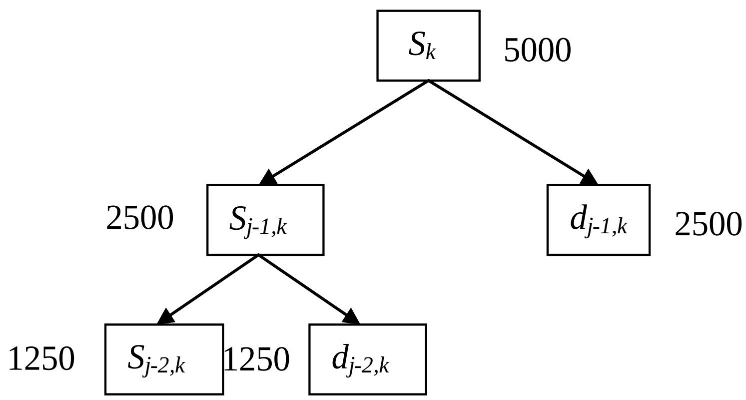

Рис. 2. Схема розкладання сигналу

Далі до коефіцієнтів $d_{j\text{-}2,k}, d_{j\text{-}1,k}$ розраховується поріг (див. формулу 2) та застосовується процедура трешолдингу.

На останньому етапі виконаємо зворотнє перетворення за схемою рис. 3, у відновлені вихідного сигналу будуть братимуть участь тільки коефіцієнти розкладання $S_{j\text{-}2,k}, d_{j\text{-}2,k}, d_{j\text{-}1,k}$
.

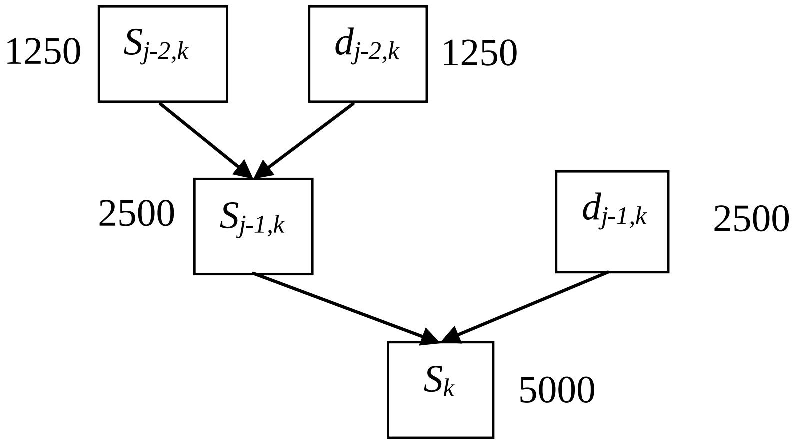

Рис. 3. Схема зворотного перетворення

Сигнал після фільтрації зображений на рис 4. Відношення сигнал/перешкода для першого сигналу має значення $g = 15.8$, а для відновленого (після фільтрації) – $g = 27.3$. Тобто відношення сигнал перешкода покращилось у 1,72 рази.

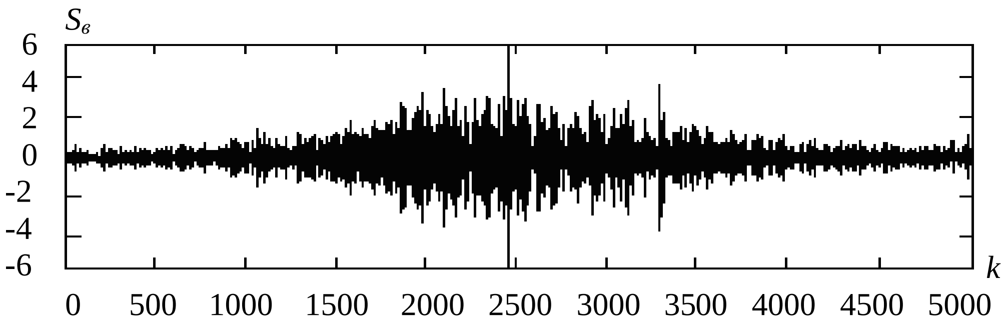

Рис. 4. Обвідна дискретного сейсмічного сигналу після фільтрації

Висновки. З проведених досліджень випливає, що ВП у базисі Хаара можна застосовувати для фільтрації сейсмічних сигналів. У подальших дослідженнях необхідно проаналізувати можливість застосування різних базисних функцій для реалізації фільтрації та їх вплив на якість фільтрації, а також вплив глибини рівня розкладання сигналу на покращення відношення сигнал/перешкода.

Список літератури:

1. Введение в вейвлет-преобразование: учебное пособие. / А. Н. Яковлєв. – Новосибирск : НГТУ- 2003. - 104 с.

2. Коваленко М. В. Алгоритми одноканальної цифрової фільтрації сейсмічних сигналів / М. В. Коваленко, М. М. Проценко // Вісник ЖІТІ. - 2002. №23. -С.137-142.

3. Яковлев А. Н. Основы вейвлет-преобразования сигналов: учебное пособие. / А. Н .Яковлев – М. : САЙНС. – ПРЕСС, 2003. - 80 с.

4. Застосування вейвлет-перетворення функції вібросигналу в технічній діагностиці механізмів з ударними навантаженнями / І. Г. Грабар, В. Ф. Запольский, В. К. Захаров [та ін.] // Вісник ЖІТІ. - 2002. - №23. - С. 16-21.

5. Дремин И.М. Вейвлеты и их использование / И. М. Дремин, О. В.Иванов, В. А. Нечитайло // УФН №5. - 2001. - С. 465-501.

6. Астафьева Н.В. Вейвлет-анализ: основи теории и примеры применения // УФН №11. - 1996. - С. 1145-1170.

7. Grossman A. SIAM J. / A. Grossman., J. Morlet. // Math.Anal. 15 723. - 1984.

8. Д'яконов В., Обработка сигналов и зображений: / специальный справочник / В. Д'яконов, І. Авраменкова,– С-пб.: Питер, 2002. - 608 с.

9. Методика стиснення цифрової інформації за допомогою вейвлет-перетворення. / М. В. Коваленко, М. М. Проценко // Зб. наук. пр. – Житомир: ЖВІРЕ. - 2003.-Вип.6. – С. 11-17.

10. Кобелев В.Ю. Выбор оптимальных вейвлетов для обрабоки сигналов и изображений / В. Ю. Кобелев, А. В.Ласточкин // Труды 2-й международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее приминения».- М.,1999 – Т.2. – С. 514 – 518.

11. Левкович-Маслюк Л.И. Дайджест вейвлет-анализа в двух формулах и 22 рисунках / Л. И. Левкович-Маслюк // КомпьюТерра - 2008. - №8, – 236 с.

12. Проценко М.М. Вейвлет - перетворення та його застосування для стиснення сейсмічних сигналів. SNTK 2003 / М. М. Проценко // Збірник тез. – Макарів – 1, 2003. – С. 26–27.