Ольшанський В.П.,
Бурлака В.В.,
Сліпченко М.В.
Харьківський національний
технічний університет
сільського господарства
імені Петра Василенка,
м. Харків, Україна,
E-mail: teoriyaTMM@gmail.com.

ПРО КОЕФІЦІЄНТ ДИНАМІЧНОСТІ СИСТЕМИ З КУСКОВО-ЛІНІЙНОЮ СИЛОВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

УДК 534.1:539.3

Для спрощення аналізу міцності елементів конструкцій при дії імпульсних динамічних навантажень в інженерних розрахунках використовують коефіцієнт динамічності. Цей коефіцієнт не залежить ні від параметрів системи, ні від величини динамічного навантаження, і для лінійних систем він дорівнює двом. У нелінійних системах він приймає інші значення. Значення коефіцієнта динамічності залежить від жорсткості нелінійної системи і у випадку жорсткої силової характеристики він менше двох, а у випадку м'якої характеристики він більший двох. Метою статті є обчислення коефіцієнта динамічності системи з кусково-лінійною характеристикою пружності при дії миттєво прикладеною сталої сили.

У статті розглянуто визначення коефіцієнту динамічності для системи з кусково-лінійною характеристикою жорсткості. Встановлено, що від величини прикладеної сили можливі три випадки навантаження. Перший з них відповідає дії порівняно «малої» сили. У цьому випадку маємо лінійну систему, бо не деформується додаткова пружина жорсткості і коефіцієнт динамічності дорівнює двом. Другий варіант навантаження маємо для «середнього» значення сили. Для нього коефіцієнт динамічності менше двох, і при цьому він залежить від параметрів механічної системи та величини прикладеної сили, що і підтверджується наведеними розрахунками. В третьому випадку «порівняно великої сили» він також я і в другому випадку менше двох. Але, на відміну від лінійної системи він залежить від коефіцієнтів жорсткості пружин, величини зазору і величини прикладеної сили.

Доведено, що для кожного з варіантів навантаження системи з кусково-лінійною характеристикою пружності при деформуванні додаткової пружини коефіцієнт динамічності менше двох. Зі збільшенням миттєво прикладеного навантаження коефіцієнт динамічності зменшується і при деформуванні додаткової пружини він менше двох, що властиво нелінійним системам з жорсткою силовою характеристикою.

Ключові слова: *коефіцієнт динамічності, кусково-лінійна характеристика жорсткості, навантаження, статичне переміщення, динамічне переміщення.*

Актуальність. В інженерних розрахунках коефіцієнт динамічності використовують для спрощення аналізу міцності елементів конструкцій при дії імпульсних динамічних навантажень [1-3]. Відомо, що для лінійних систем цей коефіцієнт дорівнює двом. Він не залежить ні від параметрів системи, ні від величини динамічного навантаження.

Аналіз останніх публікацій. На відміну від ленійних систем інша ситуація спостерігається в динаміці нелінійних систем. В роботі [4] доведена теорема, за якою у випадку жорсткої силової характеристики коефіцієнт динамічності менше двох, а у випадку м'якої характеристики він більший двох. Умови теореми не виконуються для системи з кусково-лінійною пружною характеристикою, де має місце скачок жорсткості. Тому заслуговує уваги визначення коефіцієнта динамічності такої системи.

Мета статті. Метою статті є обчислення коефіцієнта динамічності системи з кусково-лінійною характеристикою пружності при дії миттєво прикладеною сталої сили.

Викладення основного матеріалу. Для розв'язання поставленої задачі використовуємо диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x}+c_1x+c_2\left(x-x_1\right)\cdot H\left(x-x_1\right)=P\cdot H\left(t\right), \qquad (1)$$

у якому m – маса системи, $x=x(t)$ її переміщення; c_1 і c_2 – коефіцієнти жорсткості відповідно основної та додаткової пружин; x_1 – величина зазору; P – величина миттєво прикладеної сили; $\mathrm{H}\left(x-x_1\right)$, $\mathrm{H}(t)$ – одиничні функції Хевісайда; t – час; крапка над x означає похідну по t.

Рівняння (1) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0)=0; \quad \dot{x}(0)=0. \qquad (2)$$

Розрахункова схема системи зображена на рис. 1.

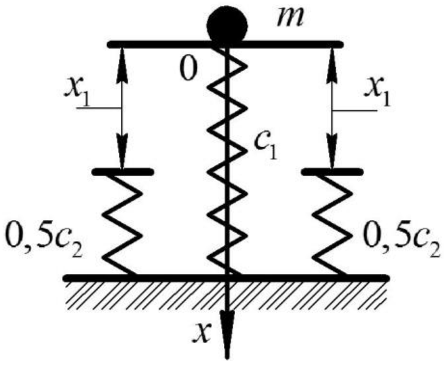

Рис. 1 – Розрахункова схема

В залежності від величини прикладеної сили будемо розрізняти три варіанти навантаження:

1. Перший з них відповідає дії порівняно «малої» сили, коли:

$$0<P\le 0,5c_1x_1.$$

У цьому випадку маємо лінійну систему, бо не деформується додаткова пружина жорсткості c_2. Для лінійної системи статичне переміщення $x_{\text{ст}}$ і максимальне динамічне переміщення $x_{\text{д}}$ легко знайти за формулами [5-7]:

$$x_{\text{ст}}=P/c_1; \; x_{\text{д}}=2P/c_1.$$

Тому коефіцієнт динамічності становить:

$$K_{\text{д}}=x_{\text{д}}/x_{\text{ст}}=2.$$

Він не залежить від P і c_1.

2. Другий варіант навантаження маємо для «середнього» значення сили, коли:

$$0,5c_1x_1<P\le c_1x_1. \qquad (3)$$

У цьому випадку при статичному прикладені сили P не вступає в роботу додаткова пружина, бо:

$$x_{\text{ст}}=\frac{P}{c_1}\le x_1.$$

Для обчислення максимального динамічного переміщення $x_{\text{д}}$, розв'язуючи рівняння (1), при початкових умовах (2), можна вивести формулу:

$$x_{\text{д}}=A+B, \qquad (4)$$

в якій $A = \sqrt{\left(\frac{c_1 x_1 - P}{c_1 + c_2}\right)^2 + \frac{m\upsilon_1^2}{c_1 + c_2}}$; $B = \frac{P + c_2 x_1}{c_1 + c_2}$; υ_1 – швидкість, з якою починається деформування додаткової пружини.

Якщо прийняти до уваги, що: $\upsilon_1 = \sqrt{\frac{x_1}{m}(2P) - c_1 x_1}$,

то:

$$A = \frac{1}{c_1 + c_2}\sqrt{\left(P + c_2 x_1\right)^2 - \left(c_1 + c_2\right)c_2 x_1^2}\,. \tag{5}$$

або:

$$A = \frac{1}{c_1 + c_2}\sqrt{P^2 - c_2 x_1\left(2P - c_1 x_1\right)}\,.$$

Тому коефіцієнт динамічності становить:

$$K_д = \frac{x_д}{x_{ст}} = \frac{1}{P\left(1 + c_2 / c_1\right)}\left[P + c_2 x_1 + \sqrt{P^2 + c_2 x_1\left(2P - c_1 x_1\right)}\right]. \tag{6}$$

Враховуючи, що згідно з (3) $2P - c_1 x_1 > 0$, із (6) одержуємо оцінку:

$$K_д < \frac{2P + c_2 x_1}{P\left(1 + c_2 / c_1\right)} < \frac{2P\left(1 + c_2 / c_1\right)}{P\left(1 + c_2 / c_1\right)} = 2\,.$$

Отже, в другому варіанті навантаження:

$$K_д < 2\,,$$

хоча він залежить від параметрів механічної системи та величини прикладеної сили.

Це підтверджують результати обчислень $K_д$ в табл. 1. вони одержані при $x_1 = 0,04\,м$; $c_1 = 15000\,Н/м$; $P = 400\,Н$ - в чисельнику і $P = 500\,Н$ - в знаменнику (значення P повинні задовольняти умові $0,5c_1 x_1 < P \le c_1 x_1$) і різних співвідношеннях c_2 / c_1.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів динамічності для «середнього» значення сили

c_2 / c_1	1,01	2	3	4	5
$K_д$	$\frac{1,911}{1,799}$	$\frac{1,860}{1,703}$	$\frac{1,826}{1,642}$	$\frac{1,8}{1,6}$	$\frac{1,780}{1,568}$

Третій варіант навантаження відповідає порівняно «великому» значенню сили. Для нього:

$$P > c_1 x_1\,.$$

Статичне переміщення, пов’язане з деформуванням додаткової пружини і його можна обчислити по формулі:

$$x_{ст} = x_1 + \frac{P - c_1 x_1}{c_1 + c_2} = \frac{P + c_2 x_1}{c_1 + c_2} = B\,.$$

Для обчислення $x_д$ залишається чинною формула (4), з урахуванням (5) набуває вигляд:

$$x_д = \frac{1}{c_1 + c_2}\left[P + c_2 x_1 + \sqrt{\left(P + c_2 x_1\right)^2 - \left(c_1 + c_2\right)c_2 x_1^2}\right].$$

Тому:

$$K_{\text{д}} = \frac{x_{\text{д}}}{x_{\text{ст}}} = 1 + \sqrt{1 - \frac{(c_1 + c_2) c_2 x_1^2}{(P + c_2 x_1)^2}} < 2 .$$

Отже і в третьому випадку $K_{\text{д}} < 2$. Але, на відміну від лінійної системи він залежить від коефіцієнтів жорсткості пружин, величини зазору і величини прикладеної сили. Із формули (7) випливає, що більшим значенням P відповідають менші значення $K_{\text{д}}$.

Результати обчислень $K_{\text{д}}$ наведено в табл. 2. Вони одержані при $x_1 = 0,04\,м$; $c_1 = 15000\,Н/м$; $P = 1000\,Н$ - в чисельнику і $P = 5000\,Н$ - в знаменнику (значення P повинні задовольняти умові $P > c_1 x_1$) і різних співвідношеннях c_2 / c_1.

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів динамічності для порівняно «великого» значення сили

c_2 / c_1	1,01	2	3	4	5
$K_{\text{д}}$	$\frac{1,847}{1,988}$	$\frac{1,744}{1,971}$	$\frac{1,670}{1,952}$	$\frac{1,614}{1,932}$	$\frac{1,570}{1,912}$

Висновки. Дослідження показало, що в системі з кусково-лінійною пружною характеристикою коефіцієнт динамічності не перевищує двох. Він залежить від величини миттєво прикладеної сили та від власних параметрів системи. Зі збільшенням миттєво прикладеного навантаження зменшується коефіцієнт динамічності і при деформуванні додаткової пружини він менше двох, що властиво нелінійним системам з жорсткою силовою характеристикою.

Література:

1. Филиппов А.П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А.П. Филиппов, Ю.С. Воробьев, Я.Г. Янютин. – Киев: Наукова думка, 1978. – 183 с.
2. Янютин Е.Г. Задачи импульсного дефомирования элементов конструкций / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарапата. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. Ольшанский В.П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міскдрук, 2012. – 320 с.
4. Ольшанський В.П. Про коефіцієнт динамічності нелінійного осцилятора / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Динаміка і міцність машин. – 2017. – № 40 (1262). – С. 63-66.
5. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Т.2: Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – Москва: Наука, 1985. – 496 с.
6. Кузьо І.В. Теоретична механіка / І.В. Кузьо. і др. – Харків: Фоліо, 2017. – 780 с.
7. Кучеренко С.І. Теоретична механіка. Курс лекцій. Підручник / С.І. Кучеренко, В.В. Бурлака, Л.М. Тіщенко. – Харків: Міськдрук, 2013. – 544 с.

Summary

Olshanskiy V.P., Burlaka V.V., Slipchenko M.V. About coefficient of dynamism of a system with a piecewice-linear stiffness characteristics

To simplify the analysis of the strength of structural elements under the influence of impulse dynamic loads, the dynamic factor is used in engineering calculations. This coefficient does not depend either on the parameters of the system or on the magnitude of the dynamic *load, and for linear systems it is equal to two. In nonlinear systems, it takes on different meanings. The value of the dynamic coefficient depends on the rigidity of the nonlinear system and in the case of a rigid power characteristic it is less than two, and in the case of a soft characteristic it is greater than two. The purpose of the paper is to calculate the dynamic coefficient of a system with a piecewise linear characteristic of elasticity under the action of an instantaneously applied constant force.*

In this paper we consider the definitions of the dynamical coefficient for a system with a piecewise linear stiffness characteristic. It is established that three load cases are possible from the magnitude of the applied force. The first of them corresponds to the action of a relatively "small" force. In this case we have a linear system, because the additional spring of rigidity is not deformed and the dynamic coefficient is equal to two. The second variant of the load is for the "average" force value. For it, the coefficient of dynamism is less than two, and in this case it depends on the parameters of the mechanical system and the magnitude of the applied force, which is confirmed by the calculations given. In the third case of a "comparatively large force," it is also, as in the second case, less than two. But, unlike the linear system, it depends on the coefficients of spring stiffness, the size of the gap and the magnitude of the applied force.

It is proved that for each of the load variants of a system with a piecewise linear elasticity characteristic with deformation of an additional spring, the dynamic coefficient is less than two. With the increase in the instantaneously applied load, the dynamic coefficient decreases and when the additional spring is deformed it is less than two, actually nonlinear systems with a rigid power characteristic.

Keywords: *coefficient of dynamism, piecewise linear stiffness characteristic, load, static displacement, dynamic displacement.*

References

1. Filippov A.P. Deformirovanie elementov konstruktsiy pod deystviem udarnyih i impulsnyih nagruzok / A.P. Filippov, Yu.S. Vorobev, Ya.G. Yanyutin. – Kiev: Naukova dumka, 1978. – 183 s.
2. Yanyutin E.G. Zadachi impulsnogo defomirovaniya elementov konstruktsiy / E.G. Yanyutin, I.V. Yanchevskiy, A.V. Voropay, A.S. Sharapata. – Harkov: HNADU, 2004. – 392 s.
3. Olshanskiy V.P. Kolebaniya sterzhney i plastin pri mehanicheskom udare / V.P. Olshanskiy, L.N. Tischenko, S.V. Olshanskiy. – Harkov: MIskdruk, 2012. – 320 s.
4. Olshanskiy V.P. Pro koyefitsient dinamichnosti neliniynogo ostsilyatora / V.P. Olshanskiy. S.V. Olshanskiy // Dinamika i mitsnist mashin. – 2017. – № 40 (1262). – S. 63-66.
5. Butenin N.V. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. T.2: Dinamika / N.V. Butenin. Ya.L. Lunts. D.R. Merkin. – Moskva: Nauka. 1985. – 496 s.
6. Kuzo I.V. Teoretichna mehanika / I.V. Kuzo i dr. – Harkiv: Folio, 2017. – 780 s.
7. Kucherenko S.I. Teoretichna mehanika. Kurs lektsiy. Pidruchnik / S.I. Kucherenko, V.V. Burlaka, L.M. Tischenko. – Harkiv: Miskdruk, 2013. – 544 s.