УДК 681.382

Исмаилов Т.А.¹, Евдулов О.В.¹, Хазамова М.А.¹, Магомадов Р.А.-М.²

¹ФГБОУ ВПО «Дагестанский государственный технический университет», пр. имама Шамиля, 70, Махачкала, 367015, Россия; ²ФГБОУ ВПО «Грозненский государственный нефтяной технический университет», пл. Орджоникидзе, 100, Грозный, 364051, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА РУКУ ЧЕЛОВЕКА

В работе рассмотрена математическая модель термоэлектрической системы для теплового воздействия на руку человека. Модель реализована на базе численного решения системы дифференциальных уравнений теплопроводности для тел сложной конфигурации. Приведены двумерные и одномерные графики изменения температуры в различных зонах объекта воздействия.

Ключевые слова: рука человека, физиотерапия, тепловое воздействие, температурное поле, тепловая модель, математическая модель.

The paper is concerned with a mathematical model of a thermoelectric system for thermal effect on human hand. The model is based on the numerical solution of a system of differential thermal conductivity equations for irregular-shaped bodies. Two-dimensional and one-dimensional plots of temperature variation in different zones of affected object are presented.

Key words: human hand, physiotherapy, thermal effect, temperature field, thermal model, mathematical model.

Введение

Методы локального теплового воздействия широко используются в медицинской практике при лечении и профилактике для стимуляции физиологических процессов. Тепловое воздействие оказывает значительное влияние на энергетический баланс организма. Реакция сосудов на тепловую процедуру наблюдается на всей поверхности тела, но наиболее интенсивно она выражена на месте непосредственного приложения тепла. При локальном температурном воздействии в тесном соприкосновении с температурным раздражителем находится кожа, рецепторы которой воспринимают болевое (механическое, термическое), температурное (холод, тепло) и тактильное раздражение. При этом кровоток в сосудах кожи изменяется в 100 – 180 раз, а регуляция теплоотдачи осуществляется преимущественно за счет изменения кровообращения, особенно в тканях рук и ног [1].

На этом основан ряд методов, применяемых в физиотерапевтической практике, к которым можно отнести ванны с постепенно повышаемой температуры (ванны по Гауффе), контрастные ванны, частичные ванны (ручные) и т.д., а также использование различных сред, таких как парафин, озокерит и др. [2].

К частным или местным ваннам относят водолечебные процедуры, которые воздействуют на определенную часть тела. Широко применяются ручные ванны с соответствующими

сосудами, изготовленными из оцинкованного железа [3]. При этом в воду погружают предплечье, одну или обе кисти, а также полностью всю руку. Назначаются ванны разной температуры и продолжительности: теплые при температуре воды $37 - 38^{\circ}$ С длительностью до 20 - 30 минут, горячие при температуре воды $40 - 44^{\circ}$ С длительностью от 10 до 20 минут и холодные при температуре воды $8 - 14^{\circ}$ С продолжительностью от 5 до 12 минут.

Для усиления раздражающего действия могут быть назначены ванны контрастных температур [4]. При этом используются две ванночки, одну из которых наполняют горячей водой (40 – 45° C), другую – холодной (8 – 10° C). Пациент опускает руку поочередно сначала в горячую воду на 1 – 2 минуты, а затем в холодную на 10 – 15 секунд, повторяя эту процедуру несколько раз. Холодные ручные ванны показаны обычно при острых воспалительных процессах на руке, ванны контрастных температур – при потливости, акроцианозе и др., горячие – для рассасывания инфильтратов и т.д.

Недостатками описанных выше физиотерапевтических процедур являются их низкая эффективность и дискомфортность, сложность и неудобство в реализации, недостаточная точность дозировки теплового воздействия.

Реализация рассмотренного метода теплового воздействия может быть осуществлена с использованием термоэлектрических преобразователей энергии [5]. При этом указанные недостатки в большой мере устраняются.

Целью настоящего исследования является математическое моделирование, а также теоретические исследования термоэлектрической системы (ТЭС) для теплового воздействия на руку человека с целью проведения эффективных физиотерапевтических и восстановительных процедур.

Модель системы

В качестве объекта исследований рассматривается прибор, реализованный в виде конструкции, содержащей гибкое эластичное основание со встроенными в него термоэлектрическими модулями, на спаях которых размещаются гибкие металлические тепловыравнивающие пластины (рис. 1). Устройство приводится в плотный тепловой контакт с объектом воздействия (зоной руки человека).



Рис. 1. Внешний вид ТЭС для локального теплового воздействия на руку человека.

Тепловая модель ТЭС, реализующей физиотерапевтические процедуры на уровне средней трети плеча, приведена на рис. 2. В соответствии со спецификой функционирования ТЭС, осуществляющей тепловое воздействие таким образом, что тепловой поток от прибора направлен в направлении, перпендикулярном к поверхности руки, тепловая модель зоны воздействия, на основе которой осуществляется расчет системы, имеет вид, показанный на рис. 2. Здесь следует выделить участки: 1 – кожный покров, 2 – мышечную ткань и 3 – костную ткань, отличающиеся теплофизическими параметрами и уровнем внутренних тепловыделений.



Рис. 2. Тепловая модель для расчета ТЭС, реализующей физиотерапевтические процедуры на уровне средней трети плеча.

Обозначим область, ограниченную кожным покровом D_1 , мышечной тканью D_2 , костной тканью D_3 , поверхность кожного покрова, контактирующую с ТЭС S_{1-1} , с мышечной тканью S_{1-2} , поверхность мышечной ткани, контактирующей с костной тканью S_{2-3} , S'_{2-3} . Тогда описание теплофизических процессов, проистекающих в руке человека при тепловом воздействии ТЭС, в обобщенном математическом виде может быть представлено следующим образом:

- при воздействии на уровне средней трети плеча

$$a_{1} \frac{\partial^{2} T_{1}}{\partial x^{2}} + a_{1} \frac{\partial^{2} T_{1}}{\partial y^{2}} + \frac{Q_{en1}}{c_{1} \rho_{1}} = \frac{\partial T_{1}}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad x, y \in D_{1};$$

$$a_{2} \frac{\partial^{2} T_{2}}{\partial x^{2}} + a_{2} \frac{\partial^{2} T_{2}}{\partial y^{2}} + \frac{Q_{en2}}{c_{2} \rho_{2}} = \frac{\partial T_{2}}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad x, y \in D_{2};$$

$$a_{3} \frac{\partial^{2} T_{3}}{\partial x^{2}} + a_{3} \frac{\partial^{2} T_{3}}{\partial y^{2}} + \frac{Q_{en3}}{c_{3} \rho_{3}} = \frac{\partial T_{3}}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad x, y \in D_{3};$$

$$T_{1}, T_{2}, T_{3} = 309.6 \text{ K} \quad \text{при} \quad \tau = 0;$$

$$(1)$$

 $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} = \alpha (T_1 - T_{T \supset b})$ при $x, y \in S_{1-1}$ – в случае неидеального контакта кожного покрова и рабочей

поверхности ТЭС;

 $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} = q_{T \supset E}$ при $x, y \in S_{1-1}$ – в случае идеального контакта кожного покрова и рабочей поверхности ТЭС;

ISSN 1726-7692

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2}$$
 при $x, y \in S_{1-2};$
 $\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial n_2}$ при $x, y \in S_{2-3};$

где T_1 , T_2 , T_3 , T'_3 – температуры кожного покрова, мышечной и костной ткани; a_1 , a_2 , a_3 – коэффициенты температуропроводности кожного покрова, мышечной и костной ткани; λ_1 , λ_2 , λ_3 – коэффициенты теплопроводности кожного покрова, мышечной и костной ткани; c_1 , c_2 , c_3 – удельная теплоемкость кожного покрова, мышечной и костной ткани; ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 – плотность кожного покрова, мышечной и костной ткани; ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 – плотность кожного покрова, мышечной и костной ткани; Q_{6H1} , Q_{6H2} , Q_{6H3} – удельное количество теплоты, выделяемое в кожном покрове, мышечной и костной ткани; α – коэффициент теплообмена между кожным покровом и рабочей поверхностью ТЭС; $T_{TЭБ}$ – температура рабочей поверхности термоэлектрической батареи (ТЭБ); $q_{TЭБ}$ – плотность теплового потока на рабочей поверхности ТЭБ; n_1 , n_2 , n_3 – нормали к поверхностям S_{1-1} , S_{1-2} , S_{2-3} , соответственно; $n_i = xh_i + yz_i$; h, z – единичные векторы; i = 1...3.

Решение системы уравнений (1) осуществлено численным методом конечных элементов, в соответствии с методикой, изложенной в [6] и реализованной в пакете прикладных программ Elcut. Полученные результаты позволяют определить изменение температуры в различных точках биологического объекта – руки человека, а также отследить ее изменение в зависимости от величины теплового потока от ТЭС (холодопроизводительности и теплопроизводительности ТЭБ) и внешних условий.

Результаты моделирования

Численный эксперимент проводился в соответствии с требуемыми режимами проведения физиотерапевтических процедур: диапазон достигаемых температур биологического объекта – от 277 до 317 К, продолжительность воздействия – от 10 до 30 мин., возможность чередования охлаждения и нагрева соответствующей зоны биологического объекта.

В качестве исходных принимались следующие значения: $\lambda_1 = 0.407 \text{ Br/(M·K)}$, $\lambda_2 = 0.439 \text{ Br/(M·K)}$, $\lambda_3 = 0.34 \text{ Br/(M·K)}$; $\rho_1 = 1036 \text{ кг/m}^3$, $\rho_2 = 1050 \text{ кг/m}^3$, $\rho_3 = 1036 \text{ кг/m}^3$; $c_1 = 3458 \text{ Дж/(кг·K)}$, $c_2 = 4020 \text{ Дж/(кг·K)}$, $c_3 = 3127 \text{ Дж/(кг·K)}$; $Q_{en1} = 0$, $Q_{en2} = 30 \text{ Дж/(кг·c)}$, $Q_{en3} = 0$. Основные геометрические размеры зон воздействия показаны на рис.3. Данные приведены в миллиметрах.

Результаты расчетов представлены на рис. 4 – 13.

На рис. 4 изображено двумерное температурное поле сечения средней трети плеча при охлаждающем воздействии посредством исследуемой ТЭС при величине теплового потока на боковой поверхности биологического объекта, равного 2500 Вт/м².

На рис. 5 – 6 показаны соответствующие одномерные графики распределения температуры вдоль поперечной оси сечения средней трети плеча, а также вдоль поперечной оси, проходящей через костную ткань, в стационарном режиме. При этом для случая, соответствующего рис. 5, рассмотрены значения температуры при различных величинах теплового потока на боковой поверхности объекта воздействия, равных – $q_{TЭE} = 2500 \text{ BT/m}^2$, $q_{TЭE} = 2250 \text{ BT/m}^2$, $q_{TЭE} = 2000 \text{ BT/m}^2$. Согласно полученным данным температура биологического объекта с увеличением $q_{TЭE}$ уменьшается. При этом максимальное снижение температуры примерно одинаково и наблюдается на слое кожного покрова при $q_{TЭE} = 2500 \text{ BT/m}^2$, составляя 280 К. Соответственно температура в центре биологического объекта изменяется слабо, примерно на 0.5 К, что связано с наличием внутренних тепловыделений в объекте теплового воздействия, а также его незначительной теплопроводностью и относительно большой теплоемкостью.



Рис. 3. Модель сечения средней трети плеча, принятая при расчете, с конечноэлементной сеткой и основными размерами (мм).



Рис. 5. Распределение температуры вдоль поперечной оси средней трети плеча при охлаждающем воздействии для различных значений $q_{T o E} \ 1 - q_{T o E} = 2500 \ Bm/m^2$, $2 - q_{T o E} = 2250 \ Bm/m^2$, $3 - q_{T o E} = 2000 \ Bm/m^2$.



Рис. 4. Двумерное температурное поле сечения средней трети плеча в стационарном режиме при охлаждающем воздействии для q_{TЭБ} = 2500 Bm/м².



Рис. 6. Распределение температуры вдоль поперечной оси костной ткани средней трети плеча при охлаждающем воздействии для q_{TЭБ} = 2500 Bm/м².

Согласно рассмотренным графикам на распределение температуры в объекте воздействия определенным образом влияет наличие в его объеме костной ткани. При принятых условиях, предусматривающих отсутствие внутренних тепловыделений в костной ткани, такое изменение температуры составляет примерно 1 – 2 К по сравнению со случаем, когда бы данный объект отсутствовал в объеме ткани.

На рис. 7 изображено двумерное температурное поле сечения средней трети плеча в режиме нагревания посредством исследуемой ТЭС при величине теплового потока на боковой поверхности биологического объекта, равной 700 Вт/м². Соответствующие одномерные графики приведены на рис. 8. Представленные зависимости в основном подобны приведенным для случая работы ТЭС в режиме охлаждения. Отличие состоит в росте температуры объекта воздействия с увеличением значения $q_{TЭБ}$, а также в меньшем значении требуемой мощности ТЭБ для поддержания температурного режима биологического объекта, соответствующего проведению физиотерапевтических процедур. При рассмотренных условиях максимальное увеличение температуры кожного покрова средней трети плеча получено при $q_{TЭБ} = 700 \text{ Вт/м}^2$, достигая 315 К. Для случая работы ТЭС в режиме нагрева, наличие костной ткани в объеме биологического объекта также вносит соответствующие изменения в структуру его температурного поля. Указанное влияние идентично случаю работы ТЭС в режиме охлаждения и составляет величину порядка 1 - 2 K.



Рис. 7. Двумерное температурное поле сечения средней трети плеча в стационарном режиме при нагревающем воздействии для q_{TЭБ} = 700 Bm/м².



поперечной оси средней трети плеча при нагревающем воздействии для различных значений q_{ТЭБ} 1 – q_{ТЭБ} = 700 Bm/м², 2 – q_{ТЭБ} = 650 Bm/м², q_{ТЭБ} = 600 Bm/м².

На рис. 9 приведено двумерное стационарное температурное поле сечения средней трети плеча для случая, соответствующего контрастному тепловому воздействию, когда на правую поверхность биологического объекта направлен тепловой поток $q_{T \to E.0} = -3500 \text{ Bt/m}^2$, а на левую –

 $q_{T \ni E, H} = 1000 \text{ BT/M}^2$. Соответствующие одномерные графики, отражающие распределение температуры указанной зоны руки вдоль поперечной оси для разных значений $q_{T \ni E,0}$ и $q_{T \ni E,H}$, представлены на рис. 10. В соответствии с данными зависимостями наличие на противоположных боковых поверхностях разнознаковых тепловых потоков существенно изменяет тепловое поле объекта по сравнению со случаем, когда по боковой поверхности распределен тепловой поток, имеющий один и тот же знак. Значение температуры убывает от боковой поверхности, соответствующей тепловому потоку $q_{T \ni E,H}$ к поверхности, на которую оказывает влияние тепловой поток $q_{T \ni E,0}$. При этом изменение $q_{T \ni E,0}$ от величины 3500 BT/M² до 2500 BT/M² при неизменном значении $q_{T \ni E,H} = 1000 \text{ BT/M}^2$ увеличивает температуру вдоль поперечной оси примерно на 4 К. Таким образом, при проведении контрастных тепловых процедур, в условиях, соответствующих данным зависимостям, для достижения требуемой температуры кожного покрова, являющегося непосредственно объектом физиотерапевтического воздействия, требуется учет взаимного влияния величин $q_{T \ni E,H}$ и $q_{T \ni E,H}$ и ланиения анализом температурного поля объекта по предложенной модели позволит оптимизировать энергетические характеристики исследуемой TЭС.







Рис. 10. Распределение температуры вдоль поперечной оси средней трети плеча при контрастном тепловом воздействии для различных значений $q_{TDE.}$ 1 – $q_{TDE.o}$ = 3500 Bm/ M^2 , $q_{TDE.H}$ = 1000 Bm/ M^2 ; 2 – $q_{TDE.o}$ = 3000 Bm/ M^2 , $q_{TDE.H}$ = 1000 Bm/ M^2 ; 3 – $q_{TDE.o}$ = 2500 Bm/ M^2 , $q_{TDE.H}$ = 1000 Bm/ M^2 .

Для анализа динамических характеристик ТЭС исследовано изменение температуры различных точек биологического объекта при охлаждающем и нагревающем воздействии ТЭС. На рис. 11 рассмотрено изменение во времени температуры различных точек средней трети плеча при охлаждении, а на рис. 12 – при нагреве для $q_{TЭБ.0} = -2500 \text{ Bt/m}^2$ и $q_{TЭБ.H} = 800 \text{ Bt/m}^2$ соответственно. Изучено изменение во времени кожного покрова, мышечной и костной ткани биологического

объекта. Согласно результатам расчета длительность выхода ТЭС в стационарный режим работы лежит в относительно небольших пределах. Для случая, соответствующего рис. 11 – 12, время, необходимое для стабилизации температуры биологического объекта, составляет примерно 1200 с (20 мин.). Указанное обстоятельство следует учитывать при проведении физиотерапевтических процедур. Целесообразным будет являться включение прибора до проведения теплового воздействия с целью вывода его на рабочий режим.







Рис. 12. Изменение температуры различных точек сечения средней трети плеча во времени при нагревающем воздействии для q_{TЭБ,н} = 800 Bm/м². 1 – кожный покров, 2 – костная ткань, 3 – мышечная ткань.

Представляет интерес изучение функционирования ТЭС в режиме контрастного теплового воздействия, связанного с чередованием охлаждения и нагрева биологического объекта. На рис. 13 показано изменение температуры кожного покрова средней трети плеча во времени для такого режима процедур. Рассмотрен один цикл контрастного воздействия: снижение температуры объекта, а затем ее повышение и наоборот. В зависимости от методики проведения физиотерапевтических процедур цикл может быть повторен несколько раз. В соответствии с полученными данными с использованием ТЭС лечебная процедура контрастного теплового воздействия может быть реализована в полной мере. Продолжительность смены одного режима воздействия на другой относительно незначительна. На зависимостях, отображенных, на рис. 13 она составляет порядка 8-9 мин. Следует заметить, что для ускорения смены режимов воздействия может быть использован кратковременный форсированный режим работы ТЭБ, заключающийся в повышении тока питания ТЭБ и соответственно значения $q_{TЭБ}$ в переходном режиме ваботы прибора.

На основе анализа полученных значений теплового потока на боковой поверхности биологического объекта, эквивалентных величине холодо- и теплопроизводительности ТЭБ, производится расчет последней. Искомыми величинами в данном случае являются геометри-

ческие размеры термоэлементов (ТЭ), входящих в состав ТЭБ, величина питающего электрического тока, потребляемая электрическая энергия. В большинстве случаев в качестве ТЭБ в ТЭС могут быть использованы термоэлектрические модули (ТЭМ) стандартного типа, подбор которых может быть произведен с использованием специальных пакетов прикладных программ.



Рис. 13. Изменение температуры биологического объекта во времени при контрастных процедурах для $q_{T \supset E,o} = 4000 \text{ Bm/m}^2$, $q_{T \supset E,H} = 1200 \text{ Bm/m}^2$. 1 - охлаждение-нагрев, 2 - нагрев-охлаждение.

Для исследуемого варианта ТЭС могут быть использованы стандартные ТЭМ типа TB-127-1.0-1.5 в количестве четырех шт., производимые ИПФ Криотерм (г. Санкт-Петербург), в полной мере реализующие требуемые режимы проведения терапевтических процедур. Для их подбора использован пакет прикладных программ Thermoelectric system calculation [7]. Там же приведены рабочие характеристики данного типа ТЭМ.

Выводы

- 1. Локальное тепловое воздействие широко используется в медицинской практике при лечении и профилактике различного рода заболеваний.
- Реализация указанного метода лечения может быть осуществлена посредством использования ТЭС, отличающихся экологичностью, высокой надежностью, эффективностью, малыми габаритными размерами.
- Термоэлектрический прибор, исследованный в работе, реализован в виде конструкции, содержащей гибкое эластичное основание со встроенными в него термоэлектрическими модулями, на спаях которых размещаются гибкие металлические тепловыравнивающие пластины.
- 4. Тепловая модель ТЭС для проведения тепловых физиотерапевтических процедур на среднюю треть плеча представляет собой трехслойную структуру (кожный покров, мышечная и костная ткань) сложной конфигурации, на внешнюю поверхность кожного покрова которой направлен тепловой поток от ТЭБ, входящих в состав системы.
- 5. Математическая модель ТЭС представляет собой систему дифференциальных уравнений в

частных производных с граничными условиями второго, третьего и четвертого рода, решение которой получено численным методом конечных элементов.

- 6. При численном эксперименте получены двумерные и одномерные графики изменения температуры в различных точках системы: прибор-объект воздействия при различных мощностях ТЭБ, а также условиях функционирования прибора.
- 7. Установлено, что с увеличением мощности ТЭБ при работе последней в режиме охлаждения температура биологического объекта уменьшается, а при работе ТЭБ в режиме нагрева – увеличивается. При этом в исследованном диапазоне мощностей ТЭБ наиболее сильно изменяется температура кожного покрова, температура же мышечной ткани в центре биологического объекта изменяется незначительно.
- Согласно рассмотренным графикам, на распределение температуры в объекте воздействия определенным образом влияет наличие в его объеме костной ткани. При принятых условиях такое изменение температуры составляет примерно 1 – 2 К по сравнению со случаем, когда бы данный объект отсутствовал в объеме ткани.
- 9. Наличие на различных областях боковой поверхности разнознаковых тепловых потоков существенно изменяет тепловое поле объекта в сравнении со случаем, когда по боковой поверхности распределен тепловой поток, имеющий один и тот же знак. При этом в данном случае наблюдается практически монотонное увеличение температуры от зоны охлаждения к зоне нагрева.
- 10. Получены графики изменения температуры различных точек руки человека при локальном тепловом воздействии посредством ТЭС во времени. Согласно полученным данным, время, необходимое для стабилизации температуры при охлаждении и нагреве биологического объекта, составляет примерно 20 мин., а продолжительность переходного режима при контрастных процедурах – 8 – 9 мин.
- 11. Для реализации требуемых режимов проведения тепловых процедур возможно использование стандартных ТЭМ, промышленно выпускаемых производственными фирмами.

Литература

- 1. Колушкин А.Н. Целебный холод воды / А.Н. Колушкин. М.: Физкультура и спорт, 1996. 137 с.
- 2. Магазаник Г.Л. Тепловые лечебные средства / Г.Л. Магазаник. Л.: Медгиз, 1961. 223 с.
- 3. Комарова Л.А. Руководство по физическим методам лечения / Л.А. Комарова, Л.А. Благовидова. Л.: Медицина, 1983. 264 с.
- 4. Кенц В.В. Местные холодовые воздействия в физиотерапии / В.В. Кенц, А.И. Сухенко, Т.М. Дука // Вопросы курортологии. 1983. № 2. С. 83 87.
- 5. Патент РФ на изобретение №2299711. Термоэлектрическое полупроводниковое устройство для локального температурного воздействия на руку человека / Исмаилов Т.А., Евдулов О.В., Аминов Г.И., Хазамова М.А., опубл. 27.11.2007, Бюл. №15.
- 6. Румянцев А.В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности / А.В. Румянцев. Калининград: КГУ, 1995.
- 7. http://www.kryotherm.ru.

Поступила в редакцию 29.10.2013.