УДК 330.4
DOI: 10.15587/2313-8416.2017.118284

СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖЕСТВА ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

© Н. И. Погожих, М. С. Софронова, Д. П. Панасенко

Рассматривается задача многокритериального выбора, которая вначале сводится к однокритериальной, а затем – к задаче линейного программирования. Для эффективного решения задачи предлагается способ преобразования множества возможных решений (соответствующей области допустимых решений) путем исключения из рассмотрения заведомо неперспективных альтернатив с возможность дальнейшего их направленного перебора. Приводятся численные результаты работы алгоритма при наличии от трех до пяти критериев

Ключевые слова: *теория принятия решений, многокритериальная задача, множество возможных решений, выпуклая оболочка*

1. Введение

В настоящее время является актуальной и требует продолжения изучения проблема принятия обоснованных решений в самых различных сферах нашей жизни [1]. Это обусловлено тем, что последствия принятия неудачных решений могут привезти к серьезным, и не только экономическим, потерям. Развитие теории принятия решений, как области исследования, опирающейся на понятия и методы математики, экономики, менеджмента, психологии, призвана помочь человеку разобраться со способами достижения желаемого результата и возможными последствиями компромиссных решений. Заметим, что именно совместное использование упомянутых наук приводит к нахождению некоторого оптимального решения. Так, человек, ориентирующийся только на свои предпочтения и интуицию, в сложных ситуациях может иметь недостаточно полное представление о задаче и, как следствие, не сможет достаточно детально проанализировать и сравнить альтернативные решения, оценить результаты этих решений, возможно, даже четко сформулировать критерии выбора [2].

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Одним из средств поиска эффективных решений сложных проблем является математическое моделирование [3]. Как известно [4], одними из составляющих математической модели являются функция цели (критерий) и системы ограничений, описывающие область допустимых решений (ОДР) (или множество возможных решений (МВР)). МВР может состоять из конечного числа элементов, но оно может оказаться и бесконечным. Конечное множество обычно задается перечислением всех его элементов, например, при использовании статистических данных [5]. Что касается бесконечного МВР, то его можно задавать различными способами (например, в виде множества решений некоторой системы уравнений или неравенств). Дальнейшее решение задачи выбора в сильной степени зависит от способа задания МВР. Некоторые из способов задания могут оказаться не слишком удобными для последующего оперирования со множествами [4].

Поскольку на практике оптимальный выбор осуществляется по нескольким критериям, то важное значение имеют методы многокритериальной оптимизации, позволяющие учесть противоречивые требования, предъявляемые к рассматриваемым решениям. Среди методов решения задач многокритериальной оптимизации можно выделить:

1) интерактивный (в процесс решения вовлекается человек – эксперт) [6], тогда решение субъективно и во многом зависит от предпочтений эксперта;

2) эволюционные методы, например, генетический алгоритм, имеющий ряд недостатков [7];

3) метод исследования пространства параметров, основанный на построении допустимого и Парето-оптимального множеств решений [8, 9].

Так как ОДР (МВР) в общем случае является многомерной, могут возникнуть трудности с ее описанием. Как известно [4], оптимальное решение задачи можно найти простым перебором конечного числа опорных решений (вершин ОДР), но в виду их большого количества, на практике осуществить перебор достаточно сложно.

3. Цель и задачи исследования

Цель исследования – разработка метода преобразования конечного множества возможных решений в теории принятия решений.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1) определить условия задания данных (критериев, альтернатив), проверить их корректность (для использования данного метода);

2) описать алгоритм преобразования конечного множества возможных решений;

3) проверить эффективность работы алгоритма.

4. Метод преобразования конечного множества возможных решений

4. 1. Введение основных понятий и обозначений

Рассмотрим некую управленческую задачу теории принятия решений. Пусть задан конечный набор решений (*множество возможных решений*) X, из которого следует осуществлять выбор. Предположим, что элементы множества X – это выборка достаточно большой размерности из некоторой генеральной совокупности решений рассматриваемой задачи. Поскольку на практике в задачах теории принятия решений часто нужно учитывать не один, а несколько критериев, будем рассматривать сразу несколько числовых функций $f_1, f_2, ..., f_n, n \geq 2,$ определенных на множестве возможных решений *X*. В зависимости от содержания задачи выбора эти функции называют критериями оптимальности или целевыми функциями.

Пусть функция $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ – векторный критерий, который принимает значения в пространстве *n*-мерных векторов R^n (критериальном пространстве или пространстве оценок), а $f(x) = = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \in R^n$ – векторная оценка возможного решения *x*, $x \in X$. Заметим, что в рамках рассматриваемой модели выбора решений множество возможных решений *X* может иметь произвольное происхождение. При этом, если решениями являются *n*-мерные векторы, то $x \in R^n$.

Сведем многокритериальную задачу к однокритериальной, обобщив критерии оптимальности в единый суперкритерий [8], т.е. скалярную функцию, зависящую от локальных критериев. Таким образом, задача сводится к максимизации суперкритерия:

$$f^* = \arg\max f(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)), x \in X. \quad (1)$$

Вид функции f^* определяется тем, как лицо, принимающее решение, представляет вклад каждого критерия $f_j, j = 1, 2, ..., n$, в суперкритерий. В силу того, что критерии f_j могут иметь различные единицы измерения и различные несоизмеримые масштабы, сравнивать решения в таких условиях зачастую невозможно. Возникает проблема приведения их масштабов к единому, обычно безразмерному масштабу измерения (проблема нормализации). А так как обычно локальные критерии имеют относительно друг друга различную важность (относительный вклад в суперкритерий), то это следует учитывать при выборе лучшего решения (проблема учета приоритета критериев). Предположим, что требование к соизмеримости масштабов выполнено, например, с помощью определения глобального критерия (суперкритерия) в виде линейной аддитивной свертки [8].

4. 2. Формулировка задачи

Рассмотрим многокритериальную задачу (пункт 4.1), сведенную к однокритериальной (1). Пусть имеется множество возможных решений (альтернатив) $X = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$. При наличии *n* локальных критериев $f_j, j = 1, 2, ..., n,$ сопоставим каждой альтернативе X_i *n*-мерный числовой вектор $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$, *i*=1,2,…,*m*, где x_{ij} – оценка альтернативы X_i по *j*-ому критерию.

Поставим в соответствие каждой альтернативе X_i точку $A_i(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ *n*-мерного пространства R^n, *i*=1,2,…,*m*, $m >> n$. Сведем задачу (1) к задаче линейного программирования (ЛП) предположив, что все функции $f^*, f_j, j = 1, 2, ..., n,$ линейны. Известно [4], что оптимальное решение задачи ЛП (если существует), достигается хотя бы в одной из вершин *n*-мерного выпуклого многогранника (в дальнейшем «*n*-политопа»), являющегося ОДР. Т.е. оптимальное решение задачи можно найти перебором конечного числа опорных решений (вершин ОДР), выделяя из них то, в котором выполняется условие (1). Так как каждый выпуклый *n*-мерный политоп является выпуклой оболочкой (ВО) некоторого конечного множества точек (и наоборот) [10], то ОДР (т.е. МВР) можно представить в виде ВО, исключив из дальнейшего рассмотрения точки (т.е. альтернативы), которые заведомо не являються оптимальними. После преобразования МВР (т.е. построения ВО) использование направленного перебора оставшихся альтернатив (вершин ВО) приведет к эффективному и менее трудоемкому решению задачи (1) (по сравнению с полным перебором).

4. 3. Преобразование МВР (построение ВО)

Построение ВО множества точек *A* – $\mathrm{conv}(A)$, осуществляется следующим образом [11].

Процедура 1. Проверка возможности построения ВО в пространстве R^n. Для этого формируется множество габаритных точек $E \subseteq A$ по следующему правилу.

Точка $A'(x_1', x_2', ..., x_n') \in E \subseteq A$, если выполняются условия:

а) $x_k' = \max(x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{mk})$ или

$x_k' = \min(x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{mk})$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$;

б) $\forall A_i', A_j' \in E$ при $i \neq j$ $A_i' \neq A_j'$.

Пусть *e* – число элементов в множестве *E*. При $e \geq n$ строится гиперплоскость π:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n + a_0 = 0$$

– одна из C_e^n возможных гиперплоскостей, проходящая через *n* точек множества *E*. Аналогично при *e*<*n* строится одна из C_m^n возможных гиперплоскостей, проходящую через *n* точек множества *A*. В результате получаем множество габаритных точек и уравнение гиперплоскости, построенной на *n* точках этого множества.

Замечание. Одним из условий того, что $\mathrm{conv}(A)$ – это ВО множества *A* в пространстве R^n, является следующее:

$$\mathrm{conv}(A) \subset R^n, \ \mathrm{conv}(A) \not\subset R^k, k \leq n-1.$$

В случае, когда ни одну гиперплоскость, проходящую через *n* точек множества *E* (или *A*), построить нельзя, значит все точки множества *A* принадлежат некоторой *k*-мерной плоскости ($k < n-1$). Задача сводится к построению ВО в пространстве R^k. Заметим, что это означает, что у всех альтернатив X_i соответствующие (*n*–*k*) оценок x_{ij} будут постоянны и равны между собой.

Процедура 2. Построение первоначальной ВО – n-симплекса S^1.

Замечание. Под n-симплексом будем понимать n-политоп с (n+1) вершиной.

Пусть дана гиперплоскость π, построенная на n точках

$$A_1^E, A_2^E, ..., A_n^E.$$

Находим точку $A_0(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in A$, для которой выполняются следующие условия:

$$\left|\delta_{A_0}(\pi)\right| = \left|a_1x_{01} + a_2x_{02} + ... + a_nx_{0n} + a_0\right| = \\ = \max_{\substack{A_i \in A \\ i=1,2,...,m}} \left\{\left|a_1x_{i1} + a_2x_{i2} + ... + a_nx_{in} + a_0\right|\right\},$$

$$\left|\delta_{A_0}(\pi)\right| \neq 0.$$

Если такой точки не существует, следовательно все точки множества A принадлежат гиперплоскости π, т. е. $\mathrm{conv}(A) \subset R^{n-1}$.

В противном случае формируем множество

$$\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_{n+1}\} = \{A_1^E, ..., A_n^E, A_0\}$$

и строим $\mathrm{conv}(\tilde{A})$ – n-мерный симплекс S^1.

Процедура построения выпуклой оболочки множества $\tilde{A} = \{\tilde{A}_j\}_{j=1}^{n+1}$, состоящего из ($n$+1)-ой точки $\tilde{A}_j(\tilde{x}_{j1}, \tilde{x}_{j2}, ..., \tilde{x}_{jn}),\ j = 1, 2, ..., n+1$, находящейся в общем положении, состоит в следующем.

1. Сгенерировать из точек множества $\tilde{A}$ (n+1) наборов по n точек.

2. Построить на точках $\tilde{A}_1^t, \tilde{A}_2^t, ..., \tilde{A}_n^t \in \tilde{A}$ каждого t-ого набора, t=1,2,…,n+1, гиперплоскости $\pi_t:\ a_1^tx_1 + a_2^tx_2 + ... + a_n^tx_n + a_0^t = 0$.

3. Обеспечить построенным гиперплоскостям $\pi_t,\ t = 1, 2, ..., n+1$, неположительную ориентацию относительно множества $\tilde{A}$. Для этого для каждого $t \in \{1, 2, ..., n+1\}$ необходимо:

а) выбрать точку

$$A''(x_1'', x_2'', ..., x_n'') \in \tilde{A} \setminus \{\tilde{A}_1^t, \tilde{A}_2^t, ..., \tilde{A}_n^t\};$$

б) вычислить величину

$$\delta_{A''}(\pi_t) = a_1^tx_1'' + a_2^tx_2'' + ... + a_n^tx_n'' + a_0^t;$$

в) если $\delta_{A''}(\pi_t) > 0$, то $a_k^t = -a_k^t,\ k = 0, 1, ..., n.$

В итоге, получим:

а) набор точек из множества $\tilde{A}$, которые являются вершинами $\mathrm{conv}(\tilde{A})$ – n-симплекса S^1;

б) (n+1) неположительно ориентированные гиперплоскости, описывающие n-симплекс S^1.

Процедура 3. Исключение из множества A точек, которые являются внутренними или граничными (но не являются вершинами) n-политопа S^h, h=1,2,…,h_0 (что соответствует исключению из МВР альтернатив, заведомо не являющихся перспективными).

Граница $\gamma = \mathrm{fr}S^h$ n-политопа S^h разбивает пространство R^n на две части – внешнюю $\gamma_+ = R^n \setminus S^h$ и внутреннюю $\gamma_- = \mathrm{int}\, S^h$.

Обозначим через $\bar{A}^{h-1}$ – множество точек из A, исключенных из рассмотрения на этапах 1,2,…,h–1 (при h=1 $\bar{A}^0 = \varnothing$), A^h – множество вершин n-политопа S^h, h=1,2,…,h_0 (при h=1 $A^1 = \tilde{A}$). Исключаем из рассмотрения те точки множества $A \setminus \bar{A}^{h-1}$, которые принадлежат множеству $S^h \setminus A^h$, используя следующее правило.

Точка $A'''(x_1''', x_2''', ..., x_n''') \in S^h \setminus A^h$, если выполняется одно из условий:

а) $\delta_{A'''}(\pi_t) < 0,\ t = 1, 2, ..., f^h$ (т. е. $A''' \in \gamma_-$), где f^h – количество гиперплоскостей, участвующих в построении границы S^h ($f^1 = n+1$);

б) $\delta_{A'''}(\pi_l) = 0$, и количество l_0 таких гиперплоскостей π_l меньше n, а для всех остальных ($f^h - l_0$) гиперплоскостей $\delta_{A'''}(\pi_l) < 0,\ l \in \{1, ..., f^h\}$.

Заметим, что при выполнении условий

$\delta_{A'''}(\pi_l) = 0$ при $l_0 \geq n$, (2)

$\delta_{A'''}(\pi_l) < 0$ для всех остальных ($f^h - l_0$) гиперплоскостей точка A''' является вершиной n-политопа S^h. Исключенные из рассмотрения точки включаем в множество $\bar{A}^h$.

Пусть $H_{S^h} = \{\pi_t\}_{t=1}^{f^h}$ – множество гиперплоскостей $\pi_t,\ t = 1, 2, ..., f^h$, участвующих в формировании границы n-политопа S^h.

Процедура 4. Построение n-политопа S^{h+1}, h=1,2,…,h_0–1.

Замечание. Под “построением n-политопа” подразумевается описание его с помощью вершин и неположительно ориентированных гиперплоскостей, т.е. представление n-политопа в виде пересечения полупространств, ограниченных этими гиперплоскостями.

Для данной гиперплоскости $\pi_t,\ t \in \{1, 2, ..., f^h\}$, необходимо:

1. Выбрать точку $A_0(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in A \setminus \bar{A}^h$ с максимальным отклонением от гиперплоскости π_t, т.е. такую, что

$$\delta_{A_0}(\pi_t) = a_1^tx_{01} + a_2^tx_{02} + ... + a_n^tx_{0n} + a_0^t = \\ = \max_{\substack{A_i \in A \setminus \bar{A}^h \\ i \in \{1,2,...,m\}}} \left\{a_1^tx_{i1} + a_2^tx_{i2} + ... + a_n^tx_{in} + a_0^t\right\}$$

2. Если $\delta_{A_0}(\pi_t) = 0$, то гиперплоскость π_t является опорной к множеству А и входит в описание (границы) выпуклой оболочки этого множества. Геометрически это означает, что все точки $A_i \in A$ лежат

по одну сторону от π_t и $\delta_{A_i}(\pi_t) \le 0,\ i = 1,2,...,m$. Заметим, что в этом случае n-политоп Sh+1 совпадает с n-политопом Sh.

Если $\delta_{A_0}(\pi_t) > 0$, то среди гиперплоскостей $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{f^h}$ выбрать те, например,

$$\pi_1^*, ..., \pi_{g-1}^*,\ g-1 < f^h - 1,$$

для которых выполняется условие

$$\delta_{A_0}(\pi_r) \ge 0,\ r \in \{1,2,...,f^h\},\ r \ne t.$$

Пусть $H_{A_0} = \{\pi_1^*, ..., \pi_{g-1}^*, \pi_g^*\} = \{\pi_1^*, ..., \pi_{g-1}^*, \pi_t\}$ и $P_{A_0} = \bigcup_{s=1}^{g} P_{A_0}^s$ – множество точек из A^h, на которых построены гиперплоскости множества H_{A_0}, где $P_{A_0}^s$ – множество точек из A^h (вершин n-политопа S^h), на которых построена гиперплоскость π_s^*, s=1,2,…,g. Пусть $\left|P_{A_0}^s\right| = g_s'$ – мощность множества $P_{A_0}^s$, $\left|P_{A_0}\right| = g'$ – мощность множества P_{A_0}, тогда $\sum_{s=1}^{g} g_s' \ge g'$.

3. Сгенерировать μ ($\mu = \sum_{s=1}^{g} C_{g_s'}^n$) множеств

$$\hat{A}_d = \{\hat{A}_{d1}, \hat{A}_{d2}, ..., \hat{A}_{d(n+1)}\}$$

из (n+1)-ой точки следующим образом:

$$\hat{A}_{d1}, \hat{A}_{d2}, ..., \hat{A}_{dn} \in P_{A_0}^{s'},\ s' \in \{1, 2, ..., g\}$$ и

$$\hat{A}_{d(n+1)} = A_0,\ d = 1,2,...,\mu.$$

Построить conv($\hat{A}_d$) (n-симплекс $\hat{S}_d$), $d = 1,2,...,\mu$, используя описанную ранее процедуру.

4. Для построения n-политопа

$$S^{h+1} = conv\left(S^h \cup \bigcup_{d=1}^{\mu} \hat{S}_d\right)$$

необходимо:

4. 1. Сформировать множество H^- всех построенных гиперплоскостей, участвующих в формировании $\hat{S}_d$, $d = 1,2,...,\mu$, $\left|H^-\right| = (n+1)\mu$ – мощность H^-.

4. 2. Исключить из множества H^- те гиперплоскости $\tilde{\pi}$, которые не являются опорными для точечного множества $\{A_0\} \cup P_{A_0} \cup A^h$, т. е. для которых не выполняется условие:

$$\forall \tilde{A} \in \{A_0\} \cup P_{A_0} \cup A^h\quad \delta_{\tilde{A}}(\tilde{\pi}) \le 0.$$

Обозначим множество «исключенных» гиперплоскостей через $\bar{H}^-$, т. е.

$$\bar{H}^- = \{\tilde{\pi}_j\}_{j=1}^{j_0},\ j_0 < (n+1)\mu.$$

4. 3. Сформировать множество гиперплоскостей $H_{S^{h+1}}$ следующим образом: $H_{S^{h+1}} = (H_{S^h} \cup H^-) \setminus \bar{H}^-$, $\left|H_{S^{h+1}}\right| = f^{h+1}$. Эти гиперплоскости участвуют в формировании границы n-политопа S^{h+1}. Заметим, что при формировании множества $H_{S^{h+1}}$ возможно совпадение некоторых гиперплоскостей, например π_i и π_j. Это означает, что гиперплоскость π_i (или π_j) проходит в общем случае через k (k>n) точек множества A. Гипергрань n-политопа S^{h+1}, лежащая в гиперплоскости π_i (или π_j) в общем случае является несимплициальным (n–1)-политопом S. Для определения вершин (n–1)-политопа S, которые одновременно являются вершинами n-политопа S^{h+1}, можно воспользоваться условием (2).

4. 4. Сформировать точечное множество A^{h+1}, элементами которого являются вершины n-политопа S^{h+1} по следующему правилу:

$$A^{h+1} = (A^h \cup \{A_0\}) \setminus \bar{A},$$

где $\bar{A} = \left\{\bar{A}_r\right\}_{r=1}^{r_0}, r_0 \in \mathrm{N}$ – множество точек из A^h, которые являются внутренними для множества $H_{S^{h+1}}$ или граничными, исключенными в п. 3. В результате получим описание n-политопа S^{h+1}.

Процесс построения conv(A) прекращается после конечного числа h_0 итераций, когда не существует ни одной внешней к текущему n-политопу S^{h_0} точки, или, что то же самое, выполняется условие $A = A^{h_0} \cup \bar{A}^{h_0}$. В результате сформируется набор перспективных альтернатив (вершины n-политопа S^{h_0}).

5. Результаты исследований и их обсуждение

В табл. 1 приведены результаты преобразования МВР X в задачах теории принятия решений при наличии 3, 4 и 5 критериев. Здесь m – начальное количество альтернатив X_i МВР, q – конечное количество альтернатив после преобразования МВР по описанному методу, % – процентное улучшение. Заметим, что оценки $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ альтернативы X_i выбираются случайным образом при условии, что $x_{ij} \in [1, 200]$, i=1,2,…,m; j=1,2,…,n.

Таблица 1

Результаты преобразования МВР в задачах с n критериями

n	m	q	%
3	25	17	32
	35	20	42,9
	45	27	40
	55	29	47,3
	65	32	50,8
	75	35	53,3
4	25	17	32
	35	24	31,4
	45	30	33,3
	55	34	38,2
	65	41	36,9
	75	48	36
5	25	22	12
	35	29	17
	45	39	13,3
	55	43	21,8
	65	52	20
	75	55	26,7

Как видно из табл. 1, использование описанного метода преобразования МВР уменьшает количество альтернатив при решении управленческих задач в среднем в зависимости от количества критериев на 44,4 % (при n=3), 34,4 % (при n=4), 22,2 % (при n=5).

Сопоставление шагов алгоритма математического моделирования с процедурами сбора данных в информационных системах предприятий и других субъектах хозяйствования, позволяет свести к минимуму роль управленческого персонала при принятии решений. Однако, в этом случае ответственность за результаты принятых решений должны нести специалисты как менеджмента, так и экономисты, финансисты учета.

Адаптация действующих информационных систем и/или их модернизация позволяет существенно повысить эффективность результатов математического моделирования.

6. Выводы

Предложенный алгоритм преобразования МВР основан на построении ВО соответствующей области допустимых решений и обладает следующими особенностей:

1) алгоритм предложенного метода преобразования МВР является открытым, это дает возможность при работе метода вводить в рассмотрение новые альтернативы;

2) в ходе работы алгоритма предусмотрено исключение из рассмотрения заведомо неперспективных альтернатив, что существенно снижает временную сложность решения задачи (1).

Литература

1. Полтавский, А. В. Методы принятия решений при разработке объектов сложных технических систем [Текст] / А. В. Полтавский, С. С. Семенов, А. А. Бурба // Двойные технологии. – 2014. – № 3 (68). – С. 38–46.

2. Оптнер, С. А. Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем [Текст] / С. А. Оптнер. – М.: Советское Радио, 1969. – 216 с.

3. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры [Текст] / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

4. Урубков, А. Р. Методы и модели оптимизации управленческих решений [Текст] / А. Р. Урубков, И. В. Федотов. – М.: Дело АНХ, 2011. – 240 с.

5. Чураков, Е. П. Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике [Текст] / Е. П. Чураков. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 240 с.

6. Geoffrion, A. M. An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department [Text] / A. M. Geoffrion, J. S. Dyer, A. Feinberg // Management Science. – 1972. – Vol. 19, Issue 4. – P. 357–368. doi: 10.1287/mnsc.19.4.357

7. Rosenberg, R. Simulation of genetic populations with biochemical properties [Text]: dissertation / R. Rosenberg. – Ann Arbor: University of Michigan, 1967.

8. Ногин, В. Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению [Текст] / В. Д. Ногин // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2008. – № 1. – С. 98–112.

9. Соболь, И. М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями [Текст] / И. М. Соболь, Р. Б. Статников. – М.: Дрофа, 2006. – 175 с.

10. McMullen, P. Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture [Text] / P. McMullen, G. Shephard. – Cambridge: Cambridge University Press, 1971.

11. Гиль, Н. И. Об одном подходе к построению выпуклой оболочки конечного множества точек в R^n [Текст] / Н. И. Гиль, М. С. Софронова // Искусственный интеллект. – 2009. – № 4. – С. 30–36.

Дата надходження рукопису 25.10.2017

Погожих Николай Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли, ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051
E-mail: m.pogozhikh@hduht.edu.ua

Софронова Марина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли, ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051
E-mail: m_myravyova@ukr.net

Панасенко Дмитрий Павлович, асистент, кафедра компьютерные и радиоэлектронные системы контроля и диагностики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002
E-mail: dimko_p@rks.kh.ua