

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ГРУНТА ПО ЛОПАТКЕ С ПРОФИЛЕМ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ

*Национальный университет гражданской защиты Украины
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет*

Составлено дифференциальное уравнение движения частицы грунта по криволинейной лопатке грунтометательного механизма с учетом сил трения. Рассмотрена лопатка с профилем оптимальной формы – брахистохрона в поле центробежных сил, уравнение которой получено в полярной системе координат. Приведены результаты исследований кинематических характеристик движущейся частицы.

Постановка проблемы. Работы, направленные на модернизацию технологии грунтометания при ликвидации низовых пожаров в условиях отсутствия воды чрезвычайно важны, так как существующие конструкции грунтометательных механизмов недостаточно совершенны [1, 2]. Рядом достоинств обладают роторные грунтометатели [2, 3], которые грунт в зону возгорания выбрасывают с помощью лопаток, расположенных на вращающемся роторе. От формы и расположения лопаток существенно зависят технологические характеристики устройств. Исследования по решению этих задач имеют актуальный характер.

Анализ основных исследований и публикаций. В работах [2, 3] проведены комплексные исследования по выбору рациональных параметров грунтометателя с прямыми лопатками. Перспективным представляется использование в грунтометателях криволинейных лопаток. Исследования по обоснованному выбору их формы и анализу движения частиц грунта по ним в настоящее время отсутствуют.

Постановка задачи. Для криволинейной лопатки грунтометательного механизма, форма профиля которой является брахистохроной для центральной силы – центробежной силы инерции, записанной в полярной системе координат, построить математическую модель движения частицы грунта, учитывающую наличие сил трения. Исследовать с ее помощью влияние параметров механизма на кинематические характеристики движения частиц грунта.

Основная часть. На рис. 1 показана схема грунтометателя: 1 – ступица; 2 – кольцо; 3 – спица; 4 – криволинейная лопатка. Предполагается, что метатель вращается с угловой скоростью ω против хода часовых стрелок. Радиусы R_1 и

R_2 представляют собой радиусы окружностей, проходящих через заднюю и переднюю кромки лопатки.

Вывод уравнения движения частицы грунта. Специфика задачи состоит в том, что движение необходимо изучать во вращающейся системе координат с использованием уравнений динамики относительного движения. Дополнительные трудности вносит то обстоятельство, что аналитическое описание оптимальной траектории удастся получить в полярной системе координат (рис. 2)

$$\rho = \rho(\varphi), \quad (1)$$

где ρ – полярный радиус; φ – полярный угол.

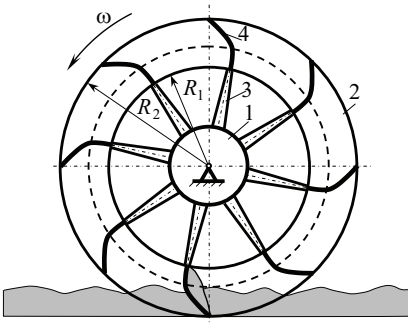


Рис. 1. Схема грунтometательного механизма

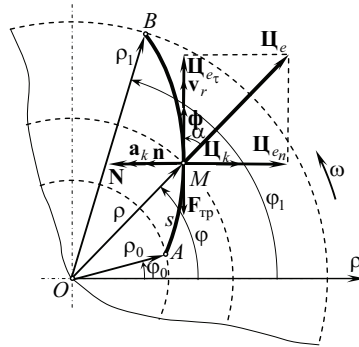


Рис. 2. Схема для записи уравнения движения частицы грунта

На указанном рисунке частица грунта M изображена в текущем положении с координатами (ρ, φ) на криволинейной лопатке AB . Точки A и B имеют соответственно координаты (ρ_0, φ_0) и (ρ_1, φ_1) . В изложенной ниже теории полярным радиусам ρ_0 и ρ_1 соответствуют радиусы R_1 и R_2 . Для принятого направления вращения ротора грунтometателя вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ будет перпендикулярен плоскости рисунка и направлен на читателя.

Использованы следующие обозначения: $\boldsymbol{\phi}$ – касательная, направленная в сторону возрастания дуговой координаты s ; \boldsymbol{n} – нормаль, направленная в сторону вогнутости траектории; \boldsymbol{v}_r – относительная скорость; $\boldsymbol{a}_k = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r$ – кориолисово ускорение.

Для сил приняты такие обозначения: $\boldsymbol{\Pi}_e$ – переносная (центробежная) сила инерции; $\boldsymbol{\Pi}_k$ – кориолисова сила инерции; \boldsymbol{N} – нормальная реакция лопатки; $\boldsymbol{F}_{тр}$ – сила трения скольжения (направлена против относительной скорости).

Выражения для модуля силы $\mathbf{\Pi}_e$ и ее проекции на направление полярного радиуса совпадают

$$\Phi_e = \Phi_{e_p} = ma_\omega = m\omega^2\rho, \quad (2)$$

где m – масса частицы грунта;

$a_\omega = \omega^2\rho$ – осестремительное (нормальное) ускорение.

Для кориолисовой силы инерции имеет место формула

$$\mathbf{\Pi}_k = -m\mathbf{a}_k, \quad (3)$$

а для ее модуля с учетом выражения для кориолисова ускорения

$$\Phi_k = 2m\omega v_r, \quad (4)$$

где $v_r = |v_{r_\tau}|$ – модуль относительной скорости;

$v_{r_\tau} = \frac{ds}{dt}$ – проекция относительной скорости на касательную (алгебраическая величина скорости).

Модули силы трения и нормальной реакции связаны известным соотношением

$$F_{\text{тр}} = Nf, \quad (5)$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Для проекций переносной (центробежной) силы $\mathbf{\Pi}_e$ на касательную Φ_{e_τ} и нормаль Φ_{e_n} имеют место формулы

$$\Phi_{e_\tau} = \Phi_e \cos\alpha; \quad (6) \quad \Phi_{e_n} = -\Phi_e \sin\alpha, \quad (7)$$

где α – угол между вектором $\mathbf{\Pi}_e$ и единичным вектором касательной \mathbf{f} .

Можно показать [4], что для $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ справедливы выражения

$$\cos\alpha = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}; \quad (8) \quad \sin\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}. \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения относительного движения несвободной материальной точки в естественной форме при движении в плоскости будут иметь вид [5]

$$ma_{r_\tau} = \Phi_{e_\tau} - F_{\text{тр}}; \quad ma_{r_n} = N - \Phi_{e_n} - \Phi_k, \quad (10)$$

где a_{r_τ}, a_{r_n} – проекции ускорения на касательную и нормаль.

С учетом формул для касательного и нормального ускорений

$$a_{r_\tau} = \frac{dv_{r_\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (11) \quad a_n = \frac{v^2}{\rho_k} = \frac{v_{r_\tau}^2}{\rho_k} = \frac{1}{\rho_k} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (12)$$

уравнения можно записать иначе

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = \Phi_{e_\tau} - Nf; \quad \frac{m}{\rho_k} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = N - \Phi_{e_n} - \Phi_k, \quad (13)$$

где ρ_k – радиус кривизны траектории.

Преобразуем уравнения (13) к уравнению для нахождения закона движения частицы с учетом того, что уравнение траектории оказалось целесообразным определять в полярной системе координат.

Длина дуги и радиус кривизны кривой (1) определяются соответственно по формулам [6]:

$$s = s(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi; \quad (14) \quad \rho_k(\varphi) = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho''}, \quad (15)$$

где $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$, $\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$.

Теперь выражения для алгебраической величины скорости и касательного ускорения представим так:

$$v_{r_\tau} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \dot{\varphi}; \quad (16)$$

$$a_{r_\tau} = \frac{dv_{r_\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2s}{d\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{ds}{d\varphi} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2s}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{ds}{d\varphi} \ddot{\varphi}, \quad (17)$$

где точкой обозначена производная по времени.

Из второго уравнения (13) для нормальной реакции с учетом (4), (7), (9), (12), (15), (16) и (17) имеем

$$N = m \left[\frac{\dot{\varphi}^2 \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2}{\rho_k} - \frac{\omega^2 \rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} + 2\omega \dot{\varphi} \frac{ds}{d\varphi} \right]. \quad (18)$$

Перепишем теперь первое уравнение (13) с учетом формул (2), (8), (17), (18)

$$m \left(\frac{d^2s}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{ds}{d\varphi} \ddot{\varphi} \right) = m \frac{\omega^2 \rho \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} - m \left[\frac{\dot{\varphi}^2 \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2}{\rho_k} - \frac{\omega^2 \rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} + 2\omega \dot{\varphi} \frac{ds}{d\varphi} \right] f. \quad (19)$$

Разделив обе части выражения (19) на m , после несложных преобразований, ему можно придать вид однородного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами относительно полярного угла $\varphi(t)$

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^{-1} \left(\frac{d^2s}{d\varphi^2} + \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 \frac{\rho^2 + 2\rho\rho' - \rho'\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} f \right) \dot{\varphi}^2 + 2\omega f \dot{\varphi} - \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^{-1} \frac{\omega^2 \rho(\rho' + \rho f)}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) следует интегрировать с начальными условиями: при $t=0$ $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$.

Оптимальная форма криволинейной лопатки. Задача выбора оптимальной формы лопатки может быть схематизирована, как задача определения формы кривой в поле центробежных сил инерции, которая обеспечивает минимальное время движения (задача о брахистохроне в поле центробежных сил). Известно, что классическая задача о брахистохроне для однородного поля сил тяжести была отправной точкой при создании вариационного исчисления [7]. Методы построения оптимальных траекторий, когда на точку действует центробежная сила инерции, авторам неизвестны.

В данной статье воспользуемся одним из типов кривых, полученных в результате решения такой задачи [8]

$$\varphi = \arctg z - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \arctg \frac{z}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, \quad (21)$$

где

$$z = \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}; \quad (22)$$

$C^2 < 1$ – константа.

Для нахождения постоянных C и C_1 с учетом (22) выпишем краевые условия:

$$\text{при } \varphi = \varphi_0 \quad \rho = \rho_0, \quad z = z(\rho_0) = z_0 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_0^2} - 1} = \infty; \quad (23)$$

$$\text{при } \varphi = \varphi_1 \quad \rho = \rho_1, \quad z = z(\rho_1) = z_1 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (24)$$

На левой границе для (21) имеем

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \frac{\pi}{2} + C_1, \quad (25)$$

откуда следует, что

$$C_1 = \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \right) \frac{\pi}{2}. \quad (26)$$

На правой границе соотношение (21) дает

$$\varphi_1 = \text{arctg } z_1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \text{arctg } \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}} + C_1. \quad (27)$$

Из этого выражения аналогично (25) для C_1 имеем

$$C_1 = \varphi_1 - \text{arctg } z_1 + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \text{arctg } \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}}. \quad (28)$$

Для нахождения константы C воспользуемся трансцендентным уравнением, следующим из сравнения правых частей выражений (26) и (28) при учете краевого условия (24)

$$f(x) = \varphi_1 - \text{arctg } \sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{arctg } \frac{\sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}}{\sqrt{1-x}} - \varphi_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{\pi}{2} = 0, \quad (29)$$

где $x = C^2$.

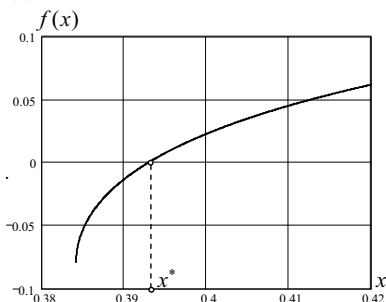


Рис. 3. График функции $f(x)$

График функции $f(x)$ показан на рис. 3; приняты следующие параметры: $\rho_0 = 0,496$ м, $\rho_1 = 0,632$ м, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 20^\circ$. При наличии графика корень функции в среде MathCAD удобно находить с использованием встроенной функции **root(f(x), x, a, b)**. Для корня в рассматриваемом случае получено значение $x^* = 0,393 < 1$, которому соответствует $C = \sqrt{x^*} = 0,627$. В соответствие с выражением (26) или (28)

для C_1 имеем

$$C_1 = \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2} = \varphi_1 - \text{arctg } \sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \text{arctg } \frac{\sqrt{\frac{C^2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}}{\sqrt{1-C^2}} = 0,445.$$

Найденные значения постоянных C и C_1 с помощью формул (21) и (22) позволяют записать следующее выражение для искомой функции

$$\varphi(\rho) = \text{arctg } \sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \text{arctg } \frac{\sqrt{\frac{C^2\rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}}{\sqrt{1-C^2}} + C_1. \quad (30)$$

График этой функции представлен на рис. 4, а; более удобный для анализа график обратной функции $\rho(\varphi)$ – на рис. 4, б.

Исследование движения частиц грунта. Построение и интегрирование дифференциального уравнения (20) при проведении расчетов имеет ряд особенностей, обусловленных тем, что аналитическое представление оптимальной траектории (30) записано в полярной системе координат, причем в обратной форме. Аналитически разрешить выражение (30) относительно ρ не удается.

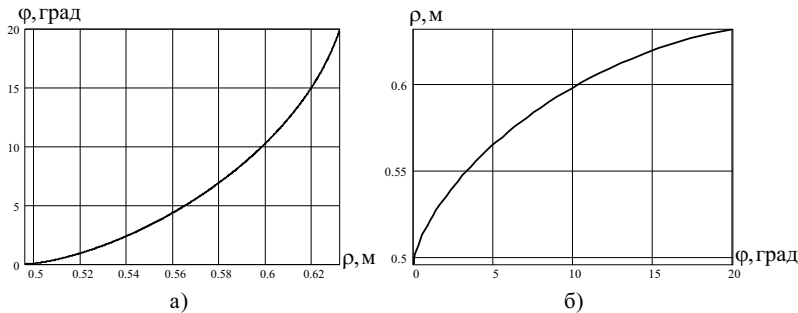


Рис. 4. Графики функций: а) – $\varphi(\rho)$; б) – $\rho(\varphi)$

Однако современные математические пакеты, в частности MathCAD [9], позволяют достаточно просто обойти указанные трудности, используя идею интерполяции таблично заданных функций. В данной работе расчеты выполнялись с применением кубической сплайн-интерполяции. Важным обстоятельством при этом является то, что полученные таким способом функции в среде MathCAD можно аналитически дифференцировать, как и традиционные функции.

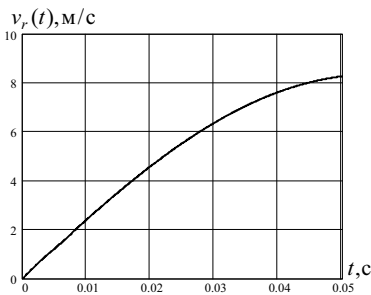


Рис. 5. Зависимость относительной скорости частицы от времени

относительной скорости частицы грунта от времени, представленная на рис. 5 на интервале времени $[0, \tau]$, где $\tau=0,0506\text{с}$ – время движения частицы по лопатке. Указанное время определялось как корень уравнения

$$\varphi(t) - \varphi_1 = 0$$

с использованием функции **root**.

Приведем некоторые результаты исследований движения частицы грунта с применением разработанной математической модели. Рассматривалась лопатка оптимальной формы с приведенными выше значениями $\rho_0, \rho_1, \varphi_0, \varphi_1$; принимались: частота вращения ротора – $n=222\text{мин}^{-1}$; коэффициент трения – $f=0,1$.

После интегрирования дифференциального уравнения (20) с соответствующими начальными условиями, по формуле (16) определена зависимость

Важными технологическими характеристиками устройства являются абсолютная скорость частицы и угол ее схода с лопатки.

Угол поворота ротора ψ (для дальнейшего его удобно отсчитывать от вертикали в направлении вращения, когда кромка лопатки B (см. рис. 2) находится в наинизшем положении) в момент схода частицы грунта с лопатки равен

$$\psi_0 = \omega\tau. \quad (31)$$

Тогда проекции переносной скорости частицы грунта в момент схода с лопатки

$$v_{0e} = \omega R_2, \quad (32)$$

а ее проекции на горизонтальную и вертикальную неподвижные оси

$$v_{0e_x} = v_{0e} \cos \psi_0; \quad v_{0e_y} = v_{0e} \sin \psi_0. \quad (33)$$

Нетрудно показать, что проекции относительной скорости на указанные оси (угол α имеет прежний смысл; см. выше):

$$v_{0r_x} = v_{0r} \sin(\psi_0 + \alpha); \quad v_{0r_y} = -v_{0r} \cos(\psi_0 + \alpha). \quad (34)$$

Тогда для проекций абсолютной скорости и ее модуля имеем:

$$v_{0_x} = v_{0r_x} + v_{0e_x}; \quad v_{0_y} = v_{0r_y} + v_{0e_y}; \quad v_0 = \sqrt{v_{0_x}^2 + v_{0_y}^2}. \quad (35)$$

Угол, образуемый вектором скорости v_0 с горизонтом (угол схода)

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{v_{0_y}}{v_0}. \quad (36)$$

На рис. 6 показаны зависимости абсолютной скорости и угла схода частицы грунта с лопатки от коэффициента трения f (определяется свойствами грунта).

Даже при значительных изменениях f в пределах от 0 до 0,5 скорость изменилась мало – приблизительно на 7%, угол схода – существенно – на 41%.

Проведены расчеты по изучению влияния частоты вращения ротора на кинематические характеристики движения частицы. Оказалось, что увеличение частоты вращения n с 200 мин^{-1} до 300 мин^{-1} (50%) не существенно сказалось на угле схода (уменьшился менее чем на 4%), соответствующий угол поворота ротора вообще практически не изменился. Значительно при этом меняется абсолютная скорость схода частицы (на 47%). На рис. 7 показана соответствующая зависимость. Этот результат важен с технологической точки зрения – оптимальный угол схода при изменении частоты вращения не изменяется. Увеличение частоты вращения приведет к возрастанию дальности

бросания грунта и при этом угол схода будет оставаться близким к оптимальному.

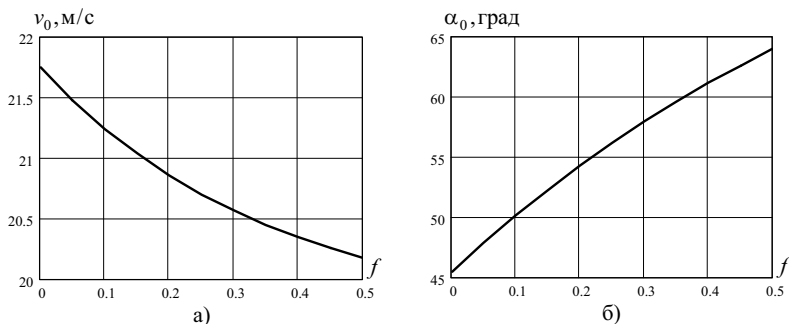


Рис. 6. Влияние коэффициента трения на: а) абсолютную скорость при сходе частицы с лопатки; б) угол вылета частицы с лопатки

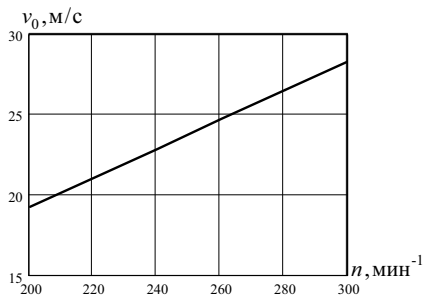


Рис. 7. Зависимость абсолютной скорости частицы при сходе с лопатки от частоты вращения ротора

Выводы. Математическая модель движения частицы грунта по лопатке грунтометательного механизма учитывает силы трения. Форма профиля лопатки является брахистохроной для центральной силы – центробежной силы инерции, записанной в полярной системе координат. Приведены результаты исследований влияния параметров механизма на кинематические характеристики движения частиц грунта по лопатке и рекомендации по их выбору.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение зависимости кинематических характеристик движущихся частиц грунта от параметров оптимальных траекторий и их вида.

Литература

1. Семків О.М. Розрахунок робочого органа ланцюгового грунтометального механізму / Семків О.М., Шатохін В.М. // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”. Випуск 87.– К.: КНУБА, 2011.– С. 303-312.
2. Попова А.М. Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп’ютерних експериментів / Попова А.М., Шатохін В.М. // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип.4. – Т.54. – С.135-144.
3. Семків О.М. Дослідження траєкторії руху частки ґрунту після її вильоту з робочої поверхні лопатки роторного грунтометальника / Семків О.М.,

Попова А.М. // Праці Таврійського державного агротехнол. університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип.4. – Т.54. – С.126-134.

4. *Шатохин В.М. Избранные вопросы теоретической механики: Учеб. пособие. // Шатохин В.М., Голинский Б.Л. /– Харьков: НТУ “ХПИ”, 2005.– 212 с.*

5. *Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики. В 2-х томах. т. II. Динамика./ Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. –М.: Наука, 1983.– 640 с.*

6. *Бронштейн И.Н. Справочник по математике./ Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. –М.: Наука, 1981.– 720 с.*

7. *Эльсгольц Л.В. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. / Эльсгольц Л.В. –М.: Наука, 1969.– 279 с.*

8. *Шатохин В.М. Оптимальные траектории движения точки, перемещающейся под действием центробежной силы инерции // Шатохин В.М., Шатохина Н.В. /Восточно-Европейский журнал передовых технологий.–Харьков, 2012.– Вып. 4/7 (58).– С. 9-14.*

9. *Кирьянов Д.В. Mathcad 13./ Кирьянов Д.В. – СПб.: ВХВ-Петербург, 2006.– 608 с.*

**ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ЧАСТКИ ҐРУНТУ
ПО ЛОПАТЦІ ІЗ ПРОФІЛЕМ ОПТИМАЛЬНОЇ ФОРМИ
У ПОЛІ ВІДЦЕНТРОВИХ СИЛ ІНЕРЦІЇ
*О.М. Семків, В.М. Шатохин, А.М. Попова.***

Побудовано диференціальне рівняння руху частки ґрунту по криволінійній лопатці ґрунтометального механізму з урахуванням сил тертя. Розглянуто лопатку з профілем оптимальної форми – брахістохрону в полі відцентрових сил, рівняння якої отримано в полярній системі координат. Приведено результати досліджень кінематичних характеристик частки, що рухається.

**RESEARCH OF MOVEMENT OF THE PARTICLE OF SOIL
ON THE VANE WITH THE PROFILE OF THE OPTIMUM FORM
IN THE FIELD OF CENTRIFUGAL FORCES OF INERTIA
*O.M. Semkiv, V.M. Shatokhin, A.N. Popova.***

The differential equation of a soil particle movement by curvilinear blade of ground-thrower mechanism with account of frictional force is built. Blade of optimal shape – brachistochrone in the centrifugal force field, which equation had been obtained in polar coordinate system, is considered. The results of kinematic behaviour researches of moving particle are given.